Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 5

ГЕОМЕТРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ СИСТЕМ

УДК 533.6.011.72

А. В. Омельченко, В. Н. Усков

Балтийский государственный технический университет, 198005 Санкт-Петербург

Понятие оптимальных ударно-волновых систем, состоящих из нескольких плоских косых скачков уплотнения и замыкающего прямого скачка, было введено в конце 40-х годов в работах Г. И. Петрова и Е. П. Ухова [1], а также К. Осватича (библиография в [2]). Численно [1] и аналитически [2] определены интенсивности косых скачков, при которых достигаются максимальные значения коэффициентов восстановления статических и полных давлений в системе.

Подробный теоретический анализ оптимальных систем проведен в [3]. В развитие [3] в данной работе исследована геометрия тел, обтекание которых приводит к образованию оптимальных ударно-волновых систем. Приводятся строгие аналитические решения, определяющие углы поворота потока в оптимальных системах, в которых имеются экстремумы не только коэффициентов восстановления давлений, но и величин скоростного напора и плотности. Особое внимание уделяется анализу оптимальных многоскачковых систем при больших числах Маха.

Полученные решения носят не только теоретический, но и прикладной характер и могут быть использованы при газодинамическом проектировании сверхзвуковых воздухозаборников, аппаратов струйных технологий и других технических объектов.

1. Рассматривается плоский сверхзвуковой поток совершенного невязкого газа, проходящий систему S_n из n волн (ударных или изоэнтропных). Множество газодинамических переменных $F = \{p, \rho, T, \rho v^2, p_0, \rho_0, T_0\}$, характеризующих невозмущенный поток, в системе S_n преобразуется в соответствующее множество F_n газодинамических переменных за S_n.

Состояние потока за системой часто [1–5] характеризуется коэффициентами восстановления $K_n^{(f)}$ газодинамических переменных, представляющих собой отношение элементов множества F_n к соответствующим параметрам торможения невозмущенного потока.

В [3] показано, что при заданных показателе адиабаты γ и числе Маха M невозмущенного потока любой из коэффициентов восстановления может быть выражен через отношение статических давлений $J_s \equiv p_n/p$ до и за системой, часто называемое интенсивностью системы.

Легко видеть, что величина J_s равна произведению интенсивностей $J_k = p_k/p_{k-1}$ всех входящих в систему волн. Следовательно, для любого $f \in F$ величина $K_n^{(f)}$ представляет собой функцию n переменных — интенсивностей волн J_k.

Проведенный в [1–3] анализ показал, что некоторые из функций $K_n^{(f)}$ ведут себя немонотонно, достигая экстремума при определенных значениях $J_k^{(f)}$. Ударно-волновые системы с интенсивностями $J_k^{(f)}$ называются оптимальными для переменных f.

Свойства потока за оптимальной ударно-волновой системой существенно зависят от интенсивности замыкающего скачка σ. Обычно он выделяется особо, и оптимальная система с замыкающим скачком обозначается $S_{n,\sigma}$.

В некоторых системах тип замыкающего скачка уплотнения может быть выбран на основе анализа на экстремум тривиальных ударно-волновых систем [3], содержащих только одну замыкающую волну ($n = 0$). В [3] доказано, что для $f = p$ или $f = \rho$ замыкающий скачок является прямым ($\sigma = m$) и имеет интенсивность $J_m = (1+\varepsilon)\mathrm{M}^2 - \varepsilon$, $\varepsilon = (\gamma-1)/(\gamma+1)$. Максимальное значение скоростного напора ($f = \rho v^2 \equiv d$) достигается в системе со слабым ($\sigma = \alpha$) замыкающим разрывом ($J_\alpha = 1$).

В некоторых технических устройствах необходимо преобразовать сверхзвуковой поток в дозвуковой с минимальными потерями полного давления, т. е. решить задачу

$$K_{n,\sigma}^{(p_0)} \to \max_{\mathrm{M}_{n,\sigma} \leqslant 1}, \tag{1.1}$$

где $\mathrm{M}_{n,\sigma}$ — число Маха за системой $S_{n,\sigma}$.

Начиная с работ [1, 2], оптимальные для $f = p_0$ системы рассматриваются с замыкающим прямым скачком уплотнения ($S_{n,m}^{(p_0)}$).

Очевидно, что условие $\mathrm{M}_{n,\sigma} \leqslant 1$ может обеспечить и косой скачок уплотнения с интенсивностью из диапазона $[J_*(\mathrm{M}), J_m(\mathrm{M})]$, где величина $J_*(\mathrm{M})$ соответствует скачку, за которым скорость газа равна скорости звука [4]:

$$J_* = \frac{\mu-1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\mu-1}{2\varepsilon}\right)^2 + \mu}, \qquad \mu = 1 + \varepsilon(\mathrm{M}^2 - 1). \tag{1.2}$$

В системе $S_{n,\sigma}$ потери полного давления тем меньше, чем меньше значение интенсивности замыкающего скачка уплотнения, поэтому для выполнения (1.1) целесообразно использовать систему $S_{n,*}$, в которой замыкающий скачок уплотнения имеет интенсивность $J_\sigma = J_*$ (1.2).

Значения интенсивностей оптимальных волн, выбранные на основе анализа экстремальных значений переменных f, определяют углы β поворота потока в системе, а следовательно, и геометрию оптимального (для f) тела.

В данной работе проводится анализ углов поворота потока в оптимальных для переменных f ударно-волновых системах при различных типах замыкающего скачка уплотнения. Особое внимание уделяется течениям с большими числами Маха.

2. Анализ [3] оптимальных систем ударных волн показал, что максимальные значения исследуемых функций достигаются в системах, состоящих из простой изоэнтропной волны i и замыкающего скачка уплотнения σ.

Интенсивности $J_i^{(f)}$ оптимальных изоэнтропных волн в потоке с заданным значением M должны быть такими, чтобы обеспечить особые числа Маха M_f перед замыкающим скачком уплотнения: $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_f$.

В случаях $f = d$ и $f = \rho$ величина $\mathrm{M}_d = \mathrm{M}_\rho = \sqrt{2}$, а замыкающий скачок является слабым разрывом ($J_\sigma = 1$) для $f = d$ и прямым скачком для $f = \rho$. Для переменной p имеем $\mathrm{M}_p = \sqrt{(2-\varepsilon)/(1-\varepsilon)}$ и $J_\sigma = J_m(\mathrm{M}_p)$, а для p_0 выполняется $\mathrm{M}_{p_0} = 1$ и $J_\sigma = 1$.

Угол поворота потока на оптимальной изоэнтропной волне определяется по формуле

$$\beta_{s,\sigma} = \omega(\mathrm{M}) - \omega(\mathrm{M}_f), \tag{2.1}$$

где $\omega(\mathrm{M})$ — функция Прандтля — Майера.

Поскольку углы поворота на слабом разрыве и на прямом скачке уплотнения равны нулю, то на оптимальных для скоростного напора и плотности системах $S_{1,\alpha}^{(d)}$ и $S_{1,m}^{(\rho)}$ углы поворота потока равны и рассчитываются по формуле (2.1) при $\mathrm{M}_f = \sqrt{2}$ (кривая *1* на рис. 1; здесь и далее все расчеты выполнены для $\gamma = 1{,}4$).

В оптимальной для статического давления системе суммарный угол поворота потока также совпадает с углом поворота потока на изоэнтропной волне и определяется из (2.1) при $\mathrm{M} = \mathrm{M}_p$ (зависимости $\beta(\mathrm{M})$, отвечающие оптимальным для статического давления системам, слабо отличаются от аналогичных функций, построенных для скоростного

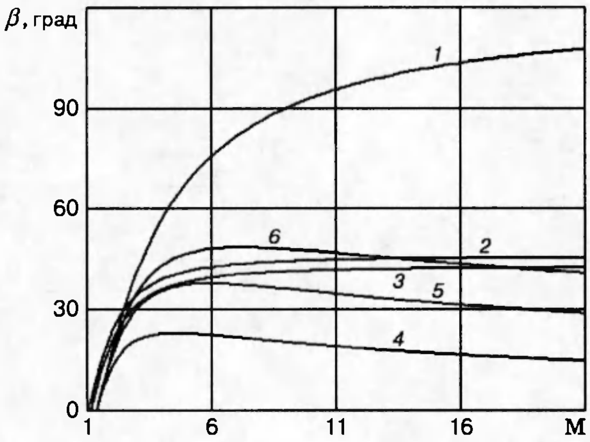

Рис. 1

напора и плотности, и потому отдельно не приводятся).

В случае $f = p_0$ оптимальной системой является волна сжатия со скоростью течения за ней, равной скорости звука. Следовательно, в такой системе интенсивности замыкающего звукового и прямого скачков уплотнения равны единице. Угол поворота потока в системах $S_{1,*}^{(p_0)}$ и $S_{1,m}^{(p_0)}$ также определяется из (2.1) при условии $\mathrm{M}_{p_0} = 1$ (кривая *1* на рис. 2,*а*; фрагмент, отмеченный пунктирной линией на рис. 2,*а*, дается в увеличенном масштабе на рис. 2,*б*).

Как видно из рис. 1, 2, углы поворота монотонно возрастают от нуля до предельного ($\mathrm{M}\to\infty$) значения

$$\beta_{\lim} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} - \omega(\mathrm{M}_f). \tag{2.2}$$

При больших числах Маха набегающего потока углы поворота потока в волне сжатия мало отличаются от предельного значения (2.2).

Начиная с некоторого числа Маха $\mathrm{M}_r^{(J)}$ (см. таблицу), угол $\beta_{s,\sigma}$ превышает предельный угол β_l поворота потока на косом скачке уплотнения, который рассчитывается по

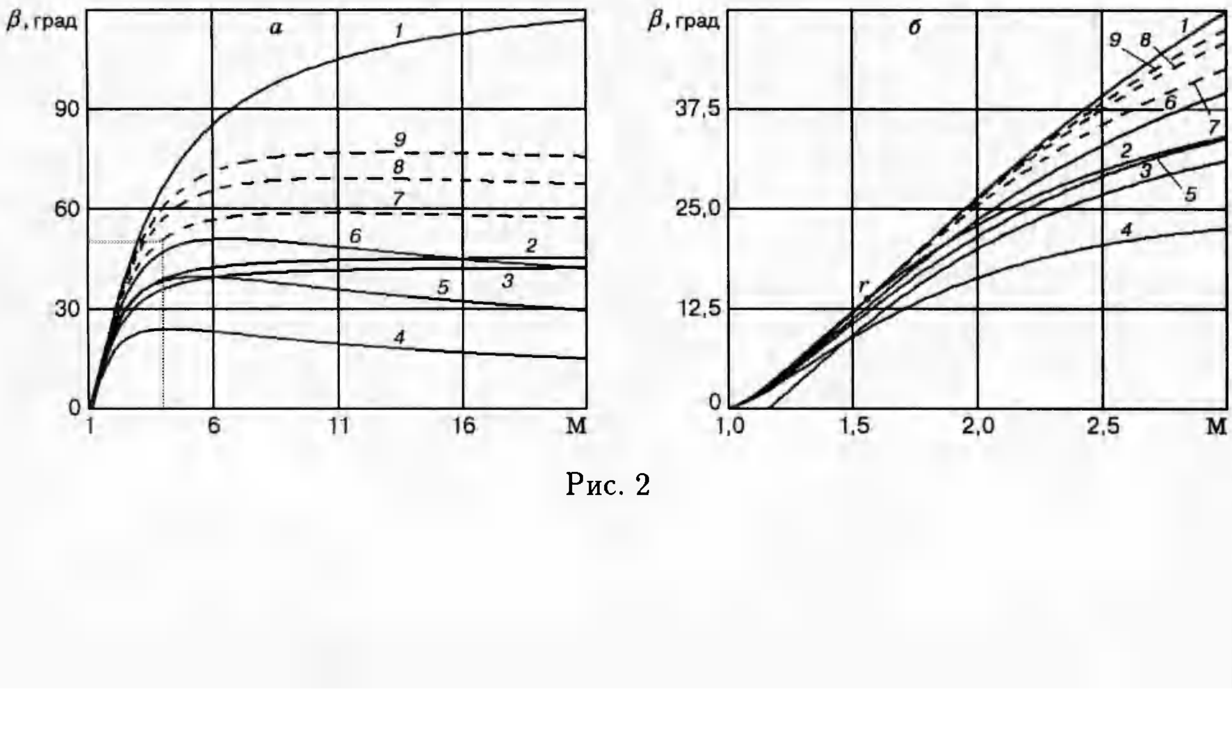

Рис. 2

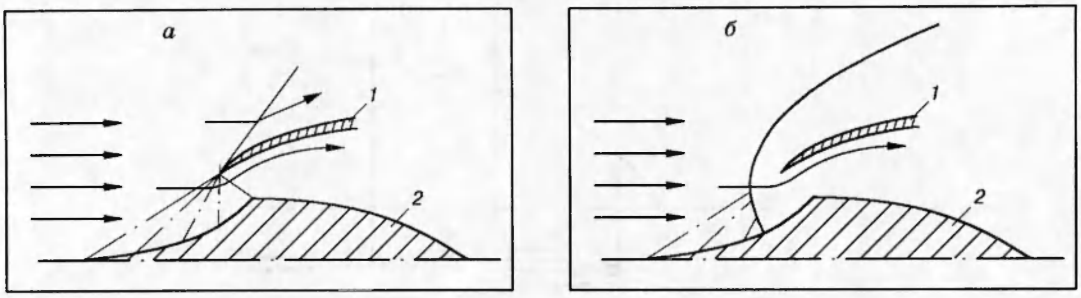

Рис. 3

зависимостям [4]

$$J_l = \frac{\mu - (1+\varepsilon)}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\mu - (1+\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\mu(1+2\varepsilon) - 1}{\varepsilon}},$$

$$\beta_l = \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{J_l - 1}{J_l + \varepsilon}\,\frac{(1+\varepsilon) + (J_l+\varepsilon)}{1+\varepsilon J_l}}\;\frac{(1-\varepsilon)(J_l - 1)}{2(J_l+\varepsilon)}\right].$$

Данное обстоятельство ограничивает возможность использования систем с изоэнтропными волнами в реальных технических объектах. В частности, в сверхзвуковых входных диффузорах с внешним сжатием это ограничение связано с наличием обечайки [5] (рис. 3). Обычно считается, что внутренняя стенка обечайки должна быть ориентирована по направлению потока за замыкающим скачком уплотнения σ. Если предположить, что угол поворота потока во входном канале плоского диффузора (между обечайкой *1* и центральным телом *2*) совпадает с углом наклона внешней стороны обечайки (т. е. предположить, что угол β_ω между внутренней и внешней сторонами обечайки стремится к нулю (рис. 3,*а*)), то на суммарный угол поворота потока $\beta_{s,\sigma}$ в системе необходимо наложить ограничение

$$\beta_{s,\sigma} < \beta_l(\mathrm{M}). \tag{2.3}$$

В реальных диффузорах $\beta_\omega = 3\div5°$, поэтому ограничение на угол $\beta_{s,\sigma}$ является более жестким:

$$\beta_{s,\sigma} < \beta_l(\mathrm{M}) - \beta_\omega. \tag{2.4}$$

При невыполнении (2.4) перед обечайкой образуется отошедшая криволинейная ударная волна (рис. 3,*б*), что приводит к ухудшению газодинамических характеристик входного диффузора.

Ограничения (2.3) и (2.4) показаны на рис. 1, 2 (кривые *2* и *3* соответственно). Эти кривые имеют точки пересечения с кривой *1* (точка r на рис. 2,*б*). Отвечающие этим точкам значения $\mathrm{M}_y^{(f)}$ служат верхними границами существования оптимальных систем с изоэнтропными волнами.

Поскольку числа Маха $\mathrm{M}_y^{(f)}$ относительно невелики (см. таблицу), то при гиперзвуковых скоростях невозмущенного потока организовать оптимальные системы с изоэнтропными волнами технически трудно.

Параметры	$\mathrm{M}_r^{(p)}$	$\mathrm{M}_r^{(d)}$	$\mathrm{M}_r^{(p_0)}$	$\mathrm{M}_\beta^{(d)}$	$\mathrm{M}_\beta^{(p)}$	$\mathrm{M}_g^{(1)}$	$\mathrm{M}_g^{(2)}$	$\mathrm{M}_g^{(3)}$	$\mathrm{M}_g^{(4)}$
M	2,66	2,51	1,56	4,62	4,73	1,87	6,63	15,78	20,49
J_1	6,14	5,31	2,10	7,58	7,65	1,42	4,95	10,36	12,57

3. В системах $S_{n,\sigma}$ с косыми скачками уплотнения максимальные значения переменных f достигаются, если интенсивности первых n скачков равны между собой ($J_1 = J_2 = \ldots = J_n \equiv J$) [2, 3]. Значения $J^{(d)}$ и $J^{(\rho)}$, обеспечивающие максимальные величины коэффициентов $K_{n,\alpha}^{(d)}$ и $K_{n,m}^{(\rho)}$, определяются по формуле

$$\mu = \frac{J^{n-1}(1+\varepsilon J)^{n+1}}{(J+\varepsilon)^{n-1}(1+\varepsilon)}, \tag{3.1}$$

а интенсивности $J^{(p)}$, приводящие к максимуму функции $K_{n,m}^{(p)}$, — по формуле

$$\mu = \frac{J^{n-1}(1+\varepsilon J)^{n+1}}{(J+\varepsilon)^{n-1}(1+\varepsilon)\,(1-\varepsilon^2)}. \tag{3.2}$$

Коэффициент восстановления полного давления в системе $S_{n,m}^{(p_0)}$ достигает экстремума при интенсивностях $J^{(p_0)}$, которые находятся из уравнения

$$\mu = A\frac{J^{n-1}(1+\varepsilon J)^n}{(J+\varepsilon)^n}[J^2 + 2BJ + 1 + (J-1)\sqrt{J^2+2CJ+1}], \tag{3.3}$$

где $A = \varepsilon(2+\varepsilon)/4(1+\varepsilon)^2$; $B = (\varepsilon^2+2\varepsilon+2)/\varepsilon(2+\varepsilon)$; $C = \varepsilon(3\varepsilon+4)/(2+\varepsilon)^2$.

В перечисленных системах интенсивность J_σ замыкающего скачка σ отличается от $J^{(f)}$, и только в оптимальной системе $S_{n,*}^{(p_0)}$ интенсивности всех скачков, включая замыкающий звуковой скачок, равны и определяются явно по формуле

$$J_1 = J_2 = \ldots = J_{n+1} = \frac{\alpha-1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{\alpha-1}{2\varepsilon}\right)^2 + \alpha}, \qquad \alpha = \mu^{1/(1+n)}. \tag{3.4}$$

Зная число Маха набегающего потока и определив из (3.1)–(3.4) значения интенсивностей входящих в систему волн, несложно рассчитать углы поворота потока в оптимальной для переменной f системе.

4. Углы поворота потока в оптимальных системах, состоящих из одного косого скачка и замыкающего скачка, приведены на рис. 1, 2 (кривые 4). В отличие от оптимальных систем с изоэнтропными волнами, углы поворота в рассматриваемых системах ведут себя немонотонно при изменении M и имеют максимум при $\mathrm{M} = \mathrm{M}_\beta^{(f)}$. Если $\mathrm{M} > \mathrm{M}_\beta^{(f)}$, то углы уменьшаются с ростом M и стремятся к постоянной величине при M→∞.

Несложный анализ показывает, что в оптимальных системах $S_{1,\alpha}^{(d)}$ и $S_{1.m}^{(\rho)}$ (кривая 4 на рис. 1) максимальное значение угла $\beta^{(d)} = \beta^{(\rho)}$ достигается при интенсивности косого скачка

$$J_\beta^{(d)} = J_\beta^{(\rho)} = \frac{\sqrt{\varepsilon} + (1+\varepsilon) + (1+\sqrt{\varepsilon})\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}},$$

а для оптимальной системы $S_{1.m}^{(p)}$ максимуму угла поворота потока соответствует

$$J_\beta^{(p)} = \frac{\sqrt{\varepsilon}(4+\varepsilon-\varepsilon^2) + (1+\varepsilon)\sqrt{(4-\varepsilon^2)(4-\varepsilon)}}{2\sqrt{\varepsilon}}.$$

Значения $\mathrm{M}_\beta^{(d)}$ и $\mathrm{M}_\beta^{(p)}$ приведены в таблице.

При M→∞ углы поворота потока в оптимальных системах $S_{1.\alpha}^{(d)}$, $S_{1,m}^{(\rho)}$ и $S_{1,m}^{(p)}$ стремятся к нулю, что дает возможность удовлетворить ограничениям (2.3) и (2.4) при любых числах

Маха из полуинтервала $[M_f^{(f)}, \infty)$.

Особо следует отметить различие в поведении углов поворота в оптимальных для полного давления системах $S_{1,m}^{(p_0)}$ и $S_{1,*}^{(p_0)}$.

Как видно из рис. 2 (кривая *4*), характер функции $\beta_{s,m}(M)$ в системе $S_{1,m}^{(p_0)}$ качественно не отличается от поведения этой функции в системах $S_{1,\alpha}^{(d)}$, $S_{1,m}^{(\rho)}$ и $S_{1,m}^{(\rho)}$. В частности, $\beta_{s,m} \to 0$ при $M \to \infty$, что позволяет выполнить ограничения (2.3) и (2.4) при любых числах Маха.

В системе $S_{1,*}^{(p_0)}$ характер функции $\beta_{s,*}(M)$ иной. Из рис. 2,*а,б* (кривая *7*) видно, что ограничение (2.3) для функции $\beta_{s,*}(M)$ выполняется только при малых числах Маха, а ограничение (2.4) не выполняется вообще. Это связано с тем, что в системе $S_{1,*}^{(p_0)}$ ведет себя немонотонно только угол поворота β_1 на первом скачке; он достигает максимума при некотором M и стремится к нулю при $M \to \infty$. В отличие от β_1, угол поворота потока на замыкающем скачке монотонно возрастает с увеличением M и стремится к предельному значению [2]

$$\beta_h = \operatorname{arctg} \frac{1 - \varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} \qquad (4.1)$$

($\beta_h = 45{,}58°$).

Суммарный угол $\beta_{1,*}$ с ростом M увеличивается, достигает максимума ($\beta_{\max} > \beta_h$ (4.1)), а затем стремится к углу β_h сверху (кривая *7* на рис. 2,*а*).

Отметим, что в области, ограниченной неравенством (2.3), угол поворота потока в оптимальной системе с изоэнтропной волной меньше угла поворота потока в оптимальной системе со скачком уплотнения. Следовательно, система $S_{1,*}^{(p_0)}$ со скачком уплотнения является неэффективной как при больших значениях M (по сравнению с системой $S_{1,m}^{(p_0)}$ с точки зрения ограничений (2.3) и (2.4)), так и при малых (по сравнению с системой $S_{1,*}^{(p_0)}$ для изоэнтропной волны с точки зрения восстановления полного давления).

Однако в тех технических устройствах, в которых неравенства (2.3) или (2.4) не являются важными, при больших числах Маха целесообразно использовать систему $S_{1,*}^{(p_0)}$ вместо системы $S_{1,m}^{(p_0)}$.

5. Увеличение числа скачков уплотнения ($n > 1$) в оптимальных системах $S_{n,\sigma}^{(f)}$ качественно не изменяет зависимости от M суммарных углов поворота потока (см. кривые *5* и *6* на рис. 1, 2, соответствующие системам $S_{n,\alpha}^{(d)}$, $S_{n,m}^{(\rho)}$ и $S_{n,m}^{(p_0)}$, а также кривые *8* и *9*, отвечающие системе $S_{n,*}^{(p_0)}$, построенные для $n = 2$ и 3 соответственно). С увеличением n растет $\beta_{\max}$, и происходит перемещение положения максимума в область больших чисел Маха. Как и при $n = 1$, угол $\beta_{s,\sigma} \to 0$ при $M \to \infty$ во всех системах с $n > 1$, за исключением $S_{n,*}^{(p_0)}$, где он стремится к предельному углу поворота (4.1).

Однако имеет место и принципиальное отличие в поведении кривых при $n = 1$ и $n > 1$. Оно заключается в том, что для систем с $n > 1$ возможно пересечение кривых *5* и *6* с кривыми *2* и *3*, соответствующими ограничениям (2.3) и (2.4).

Так, кривая *6* на рис. 2,*а,б*, отвечающая углу поворота потока в оптимальной для p_0 системе, состоящей из трех косых скачков и замыкающего прямого скачка, в диапазоне $M \in [1, M_g^{(1)}]$ лежит ниже кривой *2*. В точке с $M = M_g^{(1)}$ (см. таблицу) эти кривые пересекаются, а при $M > M_g^{(1)}$ суммарный угол поворота потока в оптимальной системе $S_{3,m}^{(p_0)}$ оказывается больше $\beta_l(M)$ (рис. 2,*б*). Это приводит к тому, что при $M > M_g^{(1)}$ условия

(2.3) и (2.4) не выполняются.

При $\mathrm{M} = \mathrm{M}_g^{(2)}$ суммарный угол поворота достигает максимума, затем уменьшается и стремится к нулю при $\mathrm{M} \to \infty$. При $\mathrm{M} = \mathrm{M}_g^{(3)}$ кривая *6* опять пересекается с кривой *2*, а в точке $\mathrm{M} = \mathrm{M}_g^{(4)}$ — и с кривой *3* (рис. 2,*a*). Следовательно, как и при малых M, для любых значений M из диапазона $[\mathrm{M}_g^{(4)}, \infty)$ может быть реализована многоскачковая оптимальная система, использующаяся для восстановления полного давления в сверхзвуковых входных диффузорах.

Указанное обстоятельство остается верным и при других значениях n.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда по исследованиям в области фундаментального естествознания (код проекта 95-0-4.2-171).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петров Г. И.** Избранные труды. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования. М.: Наука, 1992.
2. **Герман Р.** Сверхзвуковые входные диффузоры. М.: Физматгиз, 1960.
3. **Омельченко А. В., Усков В. Н.** Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 6. С. 118–126.
4. **Адрианов А. Л., Старых А. Л., Усков В. Н.** Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1995.
5. **Абрамович Г.Н.** Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1991. Ч. 1.

Поступила в редакцию 25/XII 1995 г.,
в окончательном варианте — 20/III 1996 г.