К СТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОВОГО САМОВОСПЛАМЕНЕНИЯ

С. А. Каганов

(*Саратов*)

Задача о тепловом самовоспламенении рассматривалась [1,2].

Пусть в сосуде происходит химическая реакция; предполагается, что скорость реакции зависит от температуры; если в сосуде устанавливается стационарная температура, то теплового самовоспламенения не происходит; если стационарное распределение температуры невозможно, то происходит тепловое самовоспламенение (взрыв). Из опыта известно, что тепловой взрыв может произойти в сосуде достаточно большого размера, т. е. существует некоторый критический размер сосуда.

В математической формулировке задача ставится следующим образом. В области G, ограниченной поверхностью Γ, рассматривается краевая задача

$$\Delta T + \varphi(T) = 0, \qquad T\big|_{\Gamma} = 1 \tag{1}$$

Функция $\varphi(T)$ характеризует скорость реакции в зависимости от температуры. Требуется определить размер областей, в которых задача (1) имеет решение.

В работах [1,2] задача рассматривалась для функции $\varphi(T)\ \exp T$ в случае плоских, цилиндрических и сферических сосудов. Как отмечено в работе [2], представляет интерес рассмотрение задачи для функций $\varphi(T)$ более общего вида, а также доказательство того факта, что если решение существует для некоторого сосуда, то оно существует и для вложенных в него сосудов. Ниже вначале ставится задача для сосудов плоской, цилиндрической и сферической форм с функцией $\varphi(T)$ весьма общего вида; затем рассматривается решение указанных задач для сосудов общей формы. Показывается, как при помощи весьма несложных расчетов можно оценить критические размеры сосудов плоской, цилиндрической и сферической форм для достаточно общих $\varphi(T)$. Функция $\varphi(T)$ предполагается положительной в $(0, +\infty)$, непрерывной и монотонно возрастающей в этом интервале. В п. 4 функция $\varphi(T)$ предполагается дополнительно непрерывно дифференцируемой.

1. *Плоский сосуд*. В этом случае дифференциальное уравнение (1) имеет вид

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \varphi(T) = 0, \quad T\big|_{x=\pm h=0} \tag{2}$$

Ввиду симметрии задачи граничные условия можно заменить следующими:

$$T\Big|_{x=h} = \frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \tag{3}$$

Обозначим $T(0) = T_m$. Решая (2) и удовлетворяя граничному условию, имеем

$$h = \int_0^{T_m} \frac{dT}{\sqrt{2J}} = F(T_m); \qquad J = J(T,\ T_m) = \int_T^{T_m} \varphi(T)\,dT \tag{4}$$

Если функция $F(T_m)$ неограниченно возрастает в интервале $[0, +\infty)$, то решение задачи существует для любого h. Если же $F(T_m)$ ограничена, то существует критическое значение h. Оценим функцию $F(T_m)$. Отметим, что интеграл в (4) сходящийся, так как

$$\int_0^{T_m} \frac{dT}{\sqrt{2J}} = \int_0^{T_m} \frac{dT}{\sqrt{2\varphi(T^*)(T_m - T)}} < \frac{1}{\sqrt{2\varphi(0)}} \int_0^{T_m} \frac{dT}{\sqrt{T_m - T}}$$

Имеем

$$F(T_m) = \int_0^{T_m} \frac{dT}{\sqrt{2J}} = \int_0^{T_m} \frac{dT}{\sqrt{2\varphi(T^*)(T_m - T)}} > \frac{1}{\sqrt{2\varphi(T_m)}} \int_0^{T_m} \frac{dT}{\sqrt{T_m - T}}$$

Отсюда

$$F(T_m) > \sqrt{2}\sqrt{\frac{T_m}{\varphi(T_m)}} \tag{5}$$

Далее имеем при $0 < \delta < 1$

для $T_m \delta \leqslant T \leqslant T_m$

$$\int_T^{T_m} \varphi(T)\,dT = \varphi(T^*)(T_m - T) > \varphi(T_m\delta)(T_m - T)$$

для $0 \leqslant T \leqslant T_m \delta$

$$\int_T^{T_m} \varphi(T)\,dT = \int_T^{T_m\delta} \varphi(T)\,dT + \int_{T_m\delta}^{T_m} \varphi(T)\,dT > \varphi(T_m\delta)\,T_m(1-\delta)$$

Поэтому

$$F(T_m) < \int_0^{T_m\delta} \frac{dT}{\sqrt{2\varphi(T_m\delta)\,T_m(1-\delta)}} + \int_{T_m\delta}^{T_m} \frac{dT}{\sqrt{2\varphi(T_m\delta)(T_m - T)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{T_m\delta}{\varphi(T_m\delta)}}\,A(\delta)$$

Функция

$$A(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\delta(1-\delta)}} + \sqrt{\frac{2(1-\delta)}{\delta}}$$

имеет при $\delta = 0.8$ минимум, равный 1.7.

Таким образом,

$$\sqrt{2}\sqrt{\frac{T_m}{\varphi(T_m)}} < F(T_m) < 1.7\sqrt{\frac{T_m\delta}{\varphi(T_m\delta)}} \qquad (6)$$

Из (6) следует, что если

$$\lim \frac{\varphi(T)}{T} = 0 \quad \text{при } T \to \infty$$

то решение (2) существует при любом h. Если же

$$\lim \frac{\varphi(T)}{T} = A \quad \text{при } T \to \infty \quad (0 < A \leqslant +\infty)$$

то $F(T_m)$ ограничена и существует критическое значение h_0

$$\sqrt{2}\max_T \sqrt{\frac{T}{\varphi(T)}} \leqslant h_0 \leqslant 1.7\max_T \sqrt{\frac{T}{\varphi(T)}} \qquad (7)$$

Очевидно,

$$F(T_m) \to 0 \text{ для } T_m \to \infty \quad \text{при } A = +\infty$$

В этом случае для значений $0 < h < h_0$ существует не менее двух решений: для одного из них $T_m \to 0$ при $h \to 0$; для другого $T_m \to \infty$ при $h \to 0$.

Пусть $\varphi(T) = 2\exp T$, следуя [2], из (7) имеем

$$\sqrt{2}\max_T \sqrt{\frac{T}{2e^T}} \leqslant h_0 \leqslant 1.7\max_T \sqrt{\frac{T}{2e^T}} \quad \text{или} \quad 0.60 \leqslant h_0 \leqslant 0.71$$

Точное значение h_0, как известно [2], равно 0.66. Оценку для h_0 можно получить и способом работы [3], но оценка справа получается несколько хуже.

2. *Цилиндрический сосуд*. Уравнение (1) имеет вид (в цилиндрических координатах)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \varphi(T) = 0, \qquad T\Big|_{r=R} = \frac{dT}{dr}\Big|_{r=0} = 0 \qquad (8)$$

Положим $x = r / R$. Тогда (8) перепишется в виде

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{dT}{dx}\right) + \lambda x \varphi (T) = 0 \qquad (\lambda = R^2), \qquad T\Big|_{x=1} = \frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \tag{9}$$

Вместо краевой задачи (9) рассмотрим интегральное уравнение

$$T(x) = \lambda \int_0^1 K(x, \xi)\, \xi \varphi [T(\xi)]\, d\xi \qquad \left(K(x, \xi) = \begin{cases} -\ln \xi & (x \leqslant \xi) \\ -\ln x & (x \geqslant \xi) \end{cases}\right) \tag{10}$$

Здесь $K(x, \xi)$ — функция Грина соответствующего дифференциального оператора.

Исследование этого интегрального уравнения производится таким же способом, как в [3]. Для критического значения получаем оценку

$$2 \max_T \sqrt{\frac{T}{\varphi(T)}} \leqslant R_0 \leqslant \sqrt{14} \max_T \sqrt{\frac{T}{\varphi(T)}} \tag{11}$$

Если $\lim \varphi(T) = 0$ при $T \to \infty$, то решение существует для любого R. Если $\lim \varphi(T) > 0$ при $T \to \infty$, то существует критическое значение R_0, которое оценивается при помощи (11). Например, для $\varphi(T) = 2e^T$ имеем $0.84 \leqslant R_0 \leqslant 1.63$.

Точное значение R_0, как известно, равно единице [2].

3. *Сферический случай*. Аналогичным путем для критического значения R_0 получаем оценку

$$2.44 \max_T \sqrt{\frac{T}{\varphi(T)}} \leqslant R_0 \leqslant 6.88 \max_T \sqrt{\frac{T}{\varphi(T)}} \tag{12}$$

Для случая $\varphi(T) = 2e^T$ имеем $1.04 \leqslant R_0 \leqslant 2.95$. Точное значение, как известно [2], равно 1.29.

Неравенства (7), (11) и (12) позволяют оценивать критические размеры сосудов без громоздких вычислений для произвольной функции $\varphi(T)$, в то время как точные значения критических размеров в [1, 2] получены при помощи гораздо более сложных вычислений и только для $\varphi(T) = \exp T$.

4. *Сосуд произвольной формы*. Введем функцию Грина $K(P, Q)$ оператора ΔT с краевым условием $T = 0$ на Γ, тогда исследование задачи (1) можно свести к исследованию интегрального уравнения

$$T(P) = \int_G K(P, Q)\, \varphi [T(Q)]\, dQ \tag{13}$$

Здесь G — область ограничения поверхностью Γ.

Рассмотрим последовательность функции

$$T_0(P) = 0, \qquad T_n(P) = \int_G K(P, Q)\, \varphi [T_{n-1}(Q)]\, dQ \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

Укажем без доказательства основные утверждения.

Если (13) имеет решение, то последовательность (14) сходится и ее предельная функция является решением (13). Если для некоторой области G уравнение (13) имеет решение и $G^* \subset G$, то для области G^* уравнение (13) также имеет решение.

Если $\lim (T^{-1} \varphi(T)) = 0$ при $t \to \infty$, то уравнение (13) имеет решение для произвольной области G. Если $\lim (T^{-1} \varphi(T)) > 0$ при $T \to \infty$, то имеется область G, для которой (и для всех $G^* \supset G$) решение уравнения (13) не существует. Последовательность $Tn(P)$ в этом случае расходится.

Отметим, что для достаточно малых областей (1) всегда имеет решение.

Указанный метод исследования задачи (1) может быть применен для изучения уравнений и более общего вида.

Поступила 10 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., АН СССР, 1947.
2. Баренблатт Г. И. Задача о тепловом самовоспламенении, § 15 в статье И. М. Гельфанда. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. УМН, 1959, т. XIV, вып. 2 (86), стр. 87—158.
3. Каганов С. А. Об установившемся течении вязкой несжимаемой жидкости с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры. ПМТФ. 1962, № 3, стр. 115—118