

УДК 539.3; 533.6  
DOI: 10.15372/PMTF202315264

# ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ, ВЫПУЧИВАНИЯ И АЭРОУПРУГОСТИ ТОНКОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ В НЕЙ ЛОКАЛЬНЫХ И ГЛОБАЛЬНЫХ ДЕФЕКТОВ ГЕОМЕТРИИ

Х. Мусазадех, М. М. Мохаммади\*

Университет Тарбият Модарес, Тегеран, Иран

\* Технологический университет Малека Аштара, Тегеран, Иран

E-mails: hamid.moosazadeh@modares.ac.ir, Mohammadi.mm@mut.ac.ir

Проведено исследование нелинейных колебаний, выпучивания и аэроупругости тонкой композитной пластины. Рассмотрены способы симметричной и антисимметричной укладки различного количества слоев под различными углами в диапазоне от 0 до 90°. Изучено поведение пластины при постоянных и переменных тепловых нагрузках с учетом зависимости коэффициента удельной теплоемкости и модуля упругости от температуры. Исследовано влияние на поведение пластины наличия в ней дефектов геометрии. С использованием метода Галеркина система дифференциальных уравнений в частных производных сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решена методом Рунге — Кутты.

**Ключевые слова:** тонкая композитная пластина, флаттер, поршневая теория, градиент температуры, дефекты геометрии, закритическое поведение

**Введение.** При сжимающих напряжениях вследствие наличия в пластине дефектов геометрии и градиента температуры возможна потеря ее устойчивости или возникновение колебаний с неограниченно возрастающей амплитудой (флаттер пластины).

Результаты теоретического исследования флаттера изогнутых пластин [1–3] качественно согласуются с экспериментальными данными [4]. Количественное различие этих данных обусловлено тем, что реальное трехмерное тело заменяется двумерной моделью при соответствующих краевых условиях.

В работе [5] с использованием метода Галеркина исследован линейный флаттер слоистой композитной пластины. В [6] с использованием модели Кармана деформирования пластины при больших деформациях и метода Галеркина для сведения задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям изучен нелинейный флаттер композитной пластины при обтекании ее сверхзвуковым потоком. Установлено, что угол армирования материала волокнами и модуль упругости материала существенно влияют на значение скорости потока, при котором возникает флаттер. В работах [7, 8] с использованием метода конечных элементов выполнен анализ нелинейного флаттера тонкой слоистой пластины под действием однородного теплового потока.

Авторы работы [9] с помощью метода конечных элементов, модели Кармана деформирования пластины при больших деформациях, поршневой теории первого порядка и

уравнений квазистабилизированной термоупругости исследовали нелинейный флаттер композитной пластины при высокой температуре. В работе [10] приведены результаты исследования методом конечных элементов колебаний и динамической устойчивости (дивергенции и флаттера) слоистых композитных пластин из вязкоупругого материала, изогнутых в двух направлениях и находящихся под действием боковых нагрузок. Авторы использовали уравнения, учитывающие поперечный сдвиг и инерцию поворота. В работах [11, 12] методом конечных элементов выполнен анализ устойчивости с учетом демпфирования композитных оболочек и исследовано их критическое поведение при аэромеханическом воздействии. Изучены также колебания и флаттер оболочек при их обтекании сверхзвуковым потоком.

В работе [13] с помощью метода конечных элементов исследовано влияние направления армирования волокнами, отношения толщины композитной пластины к ее длине, а также направления обтекающего пластину сверхзвукового потока на критическую скорость, при которой появляется флаттер. При этом учитывались деформации сдвига в пластине и использовалась поршневая теория первого порядка. Вывод уравнений задачи основан на принципе виртуальной работы. Также в работе [13] вычислены собственные числа задачи. В [14] с использованием принципа Гамильтона, метода конечных элементов и поршневой теории исследована устойчивость неоднородной косоугольной пластины в сверхзвуковом потоке. Установлено, что зависимость критической скорости от физических параметров задачи может быть немонотонной и негладкой.

В работе [15] с использованием метода конечных элементов, уравнений Кармана деформирования пластин при больших деформациях и уравнений квазистатической аэrodинамики исследован флаттер композитной пластины в частотной и временной областях. Изучено влияние градиента температуры, отношения длины пластины к ее ширине, порядка расположения слоев и направления армирования волокнами при воздействии на пластину аэrodинамических и температурных нагрузок. Установлено, что наличие градиента температуры приводит к увеличению жесткости пластины и критической скорости потока. В работе [16] определяется критическое аэrodинамическое давление на композитную пластину, обтекаемую сверхзвуковым потоком, с учетом влияния температуры. Вычислены собственные формы колебаний пластины при различных краевых условиях и установлено, что при некоторых условиях до момента появления флаттера может произойти потеря устойчивости пластины. Определен оптимальный способ армирования материала волокнами, обеспечивающий максимальное критическое давление. В работе [17] исследовано поведение многослойной пластины в сверхзвуковом потоке при воздействии на нее ударной нагрузки и аэrodинамического нагрева. Для определения аэrodинамического давления на пластину использовалась поршневая теория первого и третьего порядков. Модель аэроупругости построена с использованием принципа Гамильтона. Для определения теплового потока в аэrodинамической модели применялся метод эталонной температуры. Для решения задачи о нестационарной теплопередаче в пластине использовался метод конечных элементов. Установлено, что с увеличением температуры аэроупругая устойчивость уменьшается, также отмечается, что при описании сверхзвуковых течений необходимо учитывать влияние ударной волны.

В работе [18] исследованы флаттер и критическое поведение пластины в сверхзвуковом потоке с учетом дефектов геометрии пластины. Для определения аэrodинамического давления использовались геометрически нелинейная модель деформирования пластины и поршневая теория. В [19, 20] с учетом больших упругих деформаций, деформаций сдвига и инерции поворота теоретически и экспериментально изучены свободные колебания тонкой пластины с начальным дефектом и нелинейные колебания квадратной пластины при наличии начального смещения торцов. В работе [21] исследовано влияние дефектов геометрии

на линейные колебания, а также на колебания с большой амплитудой антисимметричной многослойной квадратной тонкой пластины. Установлено, что при высоте дефекта, приближенно равной половине толщины пластины, процесс упрочнения пластины меняется на процесс разупрочнения. В [22] с использованием метода конечных элементов исследовано влияние формы дефектов на поведение плоских пластин при сжимающих и сдвиговых нагрузках в закритической области. Исследование закритического поведения слоистых композитов при наличии дефектов геометрии и равномерного распределения температуры по толщине пластины выполнено в работе [23] с использованием нелинейных соотношений Кармана.

Неустановившиеся колебания пластины из функционально-градиентного материала под действием температурных нагрузок и при наличии дефектов геометрии исследовано в работе [24]. В [25] изучено влияние различных параметров на флаттер изогнутой панели в сверхзвуковом потоке. Для определения аэродинамического давления применялась поршневая теория третьего порядка, для моделирования поведения пластины использовались определяющие соотношения Кармана. Установлено, что уменьшение собственной частоты и критической скорости потока происходит в том случае, если в результате воздействия температурного поля модуль упругости становится малым. В работе [26] с использованием рационального *B*-сплайна и теории пластин Рейсснера — Миндлина исследована устойчивость и вычислены собственные частоты колебаний пластины из функционально-градиентного материала. Установлено, что градиентальное распределение свойств материала пластины, форма дефектов и граничные условия существенно влияют на величину критического давления и на собственные частоты колебаний пластины.

В работе [27] методом конечных полос исследовано влияние угла армирования волокнами прямоугольной композитной пластины при наличии расслоения на флаттер в сверхзвуковом потоке. Выявлена зависимость матриц жесткости и массы от направления армирования волокнами. В [27] были учтены деформации сдвига, для определения аэродинамического давления использовалась поршневая теория первого порядка. Исследовано влияние способа укладки слоев материала и геометрии на критическую скорость потока, а также влияние геометрических размеров дефектов и краевых условий на критическое аэродинамическое давление. В работе [28] изучены явление флаттера и автоколебания составных конструкций. С использованием специальной методики численного динамического расчета и метода прямого интегрирования получено стационарное решение задачи. Установлено, что колебания, вызывающие потерю устойчивости конструкции, обусловлены способом крепления руля к опорной поверхности. Такие колебания сопровождаются катастрофическим изменением формы композитной конструкции.

Авторы работ [29, 30] исследовали нелинейные колебания, потерю устойчивости, флаттер и закритическое поведение изогнутой панели при механических и тепловых нагрузках с использованием поршневой теории третьего порядка. Установлено, что кривизна пластины оказывает существенное влияние на ее устойчивость в сверхзвуковом потоке. В работе [31] изучен флаттер оболочки из функционально-градиентного материала, армированной углеродными нанотрубками и имеющей начальные несовершенства, в сверхзвуковом потоке. Использовались модули упругости Хилла, поршневая теория третьего порядка и геометрически нелинейные уравнения Кармана. Установлено, что армирование оболочки углеродными нанотрубками в среднем слое позволяет значительно увеличить критическую скорость потока. Более того, влияние дефекта геометрии на критическую скорость более существенно, чем армирование оболочки углеродными нанотрубками.

В данной работе проводится анализ нелинейных колебаний, потери устойчивости и аэротермоупругости тонкой нелинейной ортотропной композитной пластины. Исследуется влияние на поведение пластины глобальных и локальных дефектов геометрии, симмет-

ричного и антисимметричного способов укладки листов, количества слоев, угла наклона волокон, зависимости характеристик материала от температуры, а также тепловых и механических внешних нагрузок.

**1. Основные уравнения.** Ниже формулируется рассматриваемая задача и приводятся основные уравнения.

1.1. *Уравнения движения.* Принцип виртуальной работы для динамических процессов записывается в следующем виде:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt. \quad (1)$$

Здесь  $\delta U$  — вариация работы напряжений при деформации:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}] dz \right\} dx dy = \\ &= \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx}(\delta \varepsilon_{xx}^0 + z \delta \varepsilon_{xx}^1) + \sigma_{yy}(\delta \varepsilon_{yy}^0 + z \delta \varepsilon_{yy}^1) + \sigma_{xy}(\delta \gamma_{xy}^0 + z \delta \gamma_{xy}^1)] dz \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (2)$$

$\delta V$  — вариация работы внешних сил:

$$\begin{aligned} \delta V &= - \int_{\Omega_0} \left[ q_b(x, y) \delta w \left( x, y, \frac{h}{2} \right) + q_t(x, y) \delta w \left( x, y, -\frac{h}{2} \right) \right] dx dy - \\ &\quad - \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} [\hat{\sigma}_{nn} \delta u_n + \hat{\sigma}_{ns} \delta u_s + \hat{\sigma}_{nz} \delta w] dz ds = \\ &= - \int_{\Omega_0} \{ [q_b(x, y) + q_t(x, y)] \delta w_0(x, y) \} dx dy - \\ &\quad - \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \hat{\sigma}_{nn} \left( \delta u_{0n} - z \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} \right) + \hat{\sigma}_{ns} \left( \delta u_{0s} - z \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} \right) + \hat{\sigma}_{nz} \delta w_0 \right] dz ds, \end{aligned} \quad (3)$$

$\delta K$  — вариация кинетической энергии:

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 \left[ \left( \dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) \left( \delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + \left( \dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \right) \left( \delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dx dy, \end{aligned} \quad (4)$$

$q_b, q_t$  — интенсивность внешних сил, приложенных на нижней ( $z = h/2$ ) и верхней ( $z = -h/2$ ) лицевых поверхностях слоя;  $\hat{\sigma}_{nn}, \hat{\sigma}_{ns}, \hat{\sigma}_{nz}$  — компоненты тензора напряжений

на участке  $\Gamma_\sigma$  границы  $\Gamma$ ;  $\delta u_{0n}$ ,  $\delta u_{0s}$  — нормальная и касательная компоненты вектора виртуальных перемещений на границе  $\Gamma$ ;  $\rho_0$  — плотность материала пластины;  $\dot{u}_0 = \partial u_0 / \partial t$ . Подставляя выражения (2)–(4) в уравнение (1) и интегрируя по толщине слоя, получаем

$$0 = \int_0^t \left\{ \int_{\Omega} \left[ N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^0 + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^1 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^1 - q \delta w_0 - \right. \right. \\ - I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) + I_1 \left( \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \dot{u}_0 + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \dot{v}_0 + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) - \\ - I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \left. \right] dx dy - \\ \left. \left. - \int_{\Gamma_\sigma} \left( \hat{N}_{nn} \delta u_{0n} + \hat{N}_{ns} \delta u_{0s} - \hat{M}_{nn} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) ds \right\} dt, \quad (5) \right.$$

где  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$ ,  $N_{xy}$  — усилия на срединной поверхности пластины;  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$  — изгибающие моменты;  $Q_n$  — перерезывающая сила;  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  — моменты инерции. Виртуальные деформации выражаются через виртуальные перемещения по формулам

$$\delta \varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}, \\ \delta \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}, \\ \delta \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}, \\ \delta \varepsilon_{xx}^1 = -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}, \quad \delta \varepsilon_{yy}^1 = -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2}, \quad \delta \gamma_{xy}^1 = -2 \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), интегрируя по частям и объединяя коэффициенты при вариациях виртуальных перемещений  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ , получаем

$$0 = \int_0^t \left\{ \int_{\Omega} \left[ - \left( N_{xx,x} + N_{xy,y} - I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right) \delta u_0 - \left( N_{xy,x} + N_{yy,y} - I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \right) \delta v_0 - \right. \right. \\ - \left( M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N(w_0 + \hat{w}) + q - I_0 \ddot{w}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_1 \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} + \right. \\ \left. \left. + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 \right] dx dy + \\ + \int_{\Gamma_\sigma} \left[ (N_{xx} n_x + N_{xy} n_y) \delta u_0 + (N_{xy} n_x + N_{yy} n_y) \delta v_0 + \left( M_{xx,x} n_x + M_{xy,y} n_x + M_{yy,y} n_y + \right. \right. \\ \left. \left. + M_{xy,x} n_y + P(w_0 + \hat{w}) - I_1 \ddot{u}_0 n_x - I_1 \ddot{v}_0 n_y + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} n_x + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} n_y \right) \delta w_0 - \right. \\ \left. - (M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} - (M_{xy} n_x + M_{yy} n_y) \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right] ds - \right\} dt, \quad (7)$$

$$-\int_{\Gamma_\sigma} \left( \hat{N}_{nn} \delta u_{0n} + \hat{N}_{ns} \delta u_{0s} - \hat{M}_{nn} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) ds \} dt,$$

где

$$\begin{aligned} N(w_0 + \hat{w}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xx} \frac{\partial (w_0 + \hat{w})}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial (w_0 + \hat{w})}{\partial y} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial (w_0 + \hat{w})}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial (w_0 + \hat{w})}{\partial y} \right), \\ P(w_0 + \hat{w}) &= \left( N_{xx} \frac{\partial (w_0 + \hat{w})}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial (w_0 + \hat{w})}{\partial y} \right) n_x + \\ &\quad + \left( N_{xy} \frac{\partial (w_0 + \hat{w})}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial (w_0 + \hat{w})}{\partial y} \right) n_y. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$  и  $\delta w_0$ , получаем уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\begin{aligned} \delta u_0: \quad & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x}, \\ \delta v_0: \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y}, \\ \delta w_0: \quad & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N(w_0 + \hat{w}) + q = \\ & = I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right). \end{aligned} \tag{7}$$

На границе пластины должны быть заданы величины  $u_n$ ,  $u_s$ ,  $w_0$ ,  $\partial w_0 / \partial n$ ,  $N_{nn}$ ,  $N_{ns}$ ,  $V_n$ ,  $M_{nn}$ . В качестве начальных условий при  $t = 0$  задаются смещения и производные от них по времени.

1.2. *Определяющие уравнения для слоистой пластины.* Определяющие уравнения связывают силы и моменты с деформациями слоистых пластин. Материал каждого слоя полагается ортотропным относительно осей симметрии свойств слоя, и его поведение подчиняется закону Гука. Используя определение обобщенных сил и моментов, закон распределения деформаций по толщине пластины и определяющие соотношения термоупругости, получаем

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 + z \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^0 + z \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^0 + z \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} dz, \\ \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 + z \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^0 + z \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^0 + z \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} z dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix}, \\
\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}^T &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^T dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_x \\ \bar{\alpha}_y \\ \bar{\alpha}_{xy} \end{Bmatrix}^k \Delta T dz, \\
\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_0 \\ T_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_1 \\ T_1 \end{Bmatrix}, \\
\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}^T &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^T z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_x \\ \bar{\alpha}_y \\ \bar{\alpha}_{xy} \end{Bmatrix}^k \Delta T z dz, \\
\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_0 \\ T_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_1 \\ T_1 \end{Bmatrix},
\end{aligned}$$

где  $A_{ij}$  — элементы матрицы жесткости на растяжение;  $D_{ij}$  — элементы матрицы жесткости на изгиб;  $B_{ij}$  — элементы матрицы комбинированной жесткости на растяжение и изгиб. Элементы всех этих матриц выражаются через элементы матрицы жесткости  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ :

$$\begin{aligned}
(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^k(1, z, z^2) dz, \\
(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij})^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \bar{\alpha}_j(1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^k \bar{\alpha}_j^k(1, z, z^2) dz.
\end{aligned}$$

Выражения для усилий и моментов можно записать в виде

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^T\} \\ \{M^T\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{N^m\} \\ \{M^m\} \end{Bmatrix},$$

где  $N^m$ ,  $M^m$  — обобщенные силы и моменты, соответствующие механическим внешним нагрузкам.

1.3. *Уравнения движения в смещениях.* Усилия  $N$  и моменты  $M$  выражаются через смещения, температуру и внешние силы по формулам

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} A_{16} \\ A_{12} A_{22} A_{26} \\ A_{16} A_{26} A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} - \left[ \begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{array} \right]^T \left\{ \begin{array}{l} T_0(x, y) \\ T_0(x, y) \\ T_0(x, y) \end{array} \right\} - \\
& \quad - \left[ \begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{array} \right]^T \left\{ \begin{array}{l} T_1(x, y) \\ T_1(x, y) \\ T_1(x, y) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} N_{xx}^m \\ N_{yy}^m \\ N_{xy}^m \end{array} \right\}, \\
\left\{ \begin{array}{l} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{array} \right\} & = \left[ \begin{array}{ccc} B_{11} B_{12} B_{16} \\ B_{12} B_{22} B_{26} \\ B_{16} B_{26} B_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \end{array} \right\} + \\
& + \left[ \begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} - \left[ \begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{array} \right]^T \left\{ \begin{array}{l} T_0(x, y) \\ T_0(x, y) \\ T_0(x, y) \end{array} \right\} - \\
& \quad - \left[ \begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array} \right]^T \left\{ \begin{array}{l} T_1(x, y) \\ T_1(x, y) \\ T_1(x, y) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} M_{xx}^m \\ M_{yy}^m \\ M_{xy}^m \end{array} \right\}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Уравнения движения в смещениях получаются после подстановки выражений (8) в уравнения движения (7).

4.4. *Соотношения аэродинамики.* Взаимодействие потока и конструкции моделируется с использованием нелинейной поршневой теории первого и третьего порядков. Внешняя нагрузка  $q$  в уравнениях (7) заменяется на  $\Delta P_a$  — давление, действующее на пластину при ее обтекании аэродинамическим потоком:

$$\Delta P_a = P^d(x, t) + P^s(x)$$

( $P^d(x, t)$ ,  $P^s(x)$  — нестационарная и стационарная аэродинамические силы соответственно). Выражение для давления на пластину в случае изоэнтропического течения, полученное с использованием поршневой теории, имеет вид [32]

$$P^d(x, t) = P_\infty \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_z}{c_\infty} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}. \tag{9}$$

Путем разложения выражения (9) получаются поршневые теории первого и третьего порядков

$$P^d(x, t) = P_\infty \left( 1 + \gamma \frac{M}{\beta_1} \left( \eta \frac{V_z}{c_\infty} \right) \right), \tag{10}$$

$$P^d(x, t) = P_\infty \left( 1 + \gamma \frac{M}{\beta_1} \left( \eta \frac{V_z}{c_\infty} \right) + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} \frac{M}{\beta_1} \left( \eta \frac{V_z}{c_\infty} \right)^2 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{12} \frac{M}{\beta_1} \left( \eta \frac{V_z}{c_\infty} \right)^3 \right),$$

где  $\eta = M / \sqrt{M^2 - 1}$ ;  $c_\infty^2 = \gamma P_\infty / \rho_\infty$  — скорость звука;  $P_\infty, \rho_\infty$  — атмосферное давление и плотность воздуха;  $\gamma$  — константа изоэнтропического газа. При определении нестационарного аэродинамического давления используется скорость обтекающего пластину потока [2]

$$V_z = \beta_2 w_{0,t} + U_\infty (w_{0,x} + \hat{w}_{0,x}).$$

Здесь  $w_0$  — текущий прогиб пластины;  $\hat{w}_{0,x}$  — начальный прогиб пластины;  $U_\infty$  — скорость потока на бесконечности. Поток обтекает только верхнюю лицевую поверхность пластины, на нижней лицевой поверхности скорость потока равна нулю и давление на нее, не превышающее атмосферного давления, полагается постоянным. Число Маха  $M$ , динамическое давление  $q_\infty$ , коэффициенты  $\beta_1, \beta_2$  определены следующим образом:

$$M = \frac{U_\infty}{c_\infty}, \quad q_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2}, \quad \beta_1 = \sqrt{M^2 - 1}, \quad \beta_2 = \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1}.$$

Для больших чисел Маха полагается  $\beta_1 = M, \beta_2 = 1$ .

Приведенная выше система уравнений решается в следующих безразмерных переменных:

$$W = \frac{w}{h}, \quad \hat{W} = \frac{\hat{w}}{h}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad A_R = \frac{b}{a}, \quad \bar{t} = t\Omega_0, \quad \Omega_0 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sqrt{\frac{D_0}{\rho_m h}},$$

$$\bar{\Omega} = \Omega_0 \frac{a}{c_\infty}, \quad K = \frac{\omega}{\Omega_0}, \quad \bar{h}_1 = \frac{h}{a}, \quad \bar{h}_2 = \frac{h}{b}, \quad \bar{P}^s(x) = P^s(x) \frac{a^4}{D_{11}h}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_m}{\rho_\infty},$$

$$\beta = \sqrt{M^2 - 1}, \quad \lambda = \frac{2q_\infty a^3}{\beta D_0}, \quad R_x = \frac{N_{xx}^m a^2}{D_{11}}, \quad R_y = \frac{N_{yy}^m a^2}{D_{11}},$$

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} \frac{h^2}{D_{11}}, \quad \bar{B}_{ij} = B_{ij} \frac{h}{D_{11}}, \quad \bar{D}_{ij} = D_{ij} \frac{1}{D_{11}}, \quad \bar{I}_0 = \frac{I_0}{\rho_m h}, \quad \bar{I}_1 = \frac{I_1}{\rho_m h^2}, \quad \bar{I}_2 = \frac{I_2}{\rho_m h^3},$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}^2)}, \quad M = \frac{U_\infty}{c_\infty}, \quad q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2.$$

1.5. *Геометрия начальных дефектов.* Геометрия глобальных и локальных начальных дефектов композитной пластины показана на рис. 1. Для моделирования глобальных и локальных начальных дефектов используются разложение Тейлора и гиперболические функции:

$$\hat{W} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{H}{h} A_{nm} \sin(n\pi\xi) \sin(m\pi\eta_1); \quad (11)$$

$$\hat{W} = (H/h) \operatorname{sech} [\delta_1(\xi - \psi_1)] \cos [\mu_1 \pi(\xi - \psi_1)] \operatorname{sech} [\delta_2(\eta_1 - \psi_2)] \cos [\mu_2 \pi(\eta_1 - \psi_2)]. \quad (12)$$

Соотношением (12) моделируются дефекты следующих типов:

- 1) синусоидальные:  $\delta_1 = \delta_2 = 0, \mu_1 = \mu_2 = 1, \psi_1 = \psi_2 = 0,5$ ;
- 2) локальные:  $\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0, \mu_1 = 1, \dots, n, \mu_2 = 1, \dots, n, \psi_1 = 0, \dots, 1, \psi_2 = 0, \dots, 1$ ;
- 3) глобальные:  $\delta_1 = \delta_2 = 0, \mu_1 \neq 1, \mu_2 \neq 1, \psi_1 = 0, \dots, 1, \psi_2 = 0, \dots, 1$ .

Здесь  $\eta_1$  — безразмерная область начального дефекта;  $\delta_1, \delta_2$  — фиксированные значения, характеризующие протяженность локального дефекта;  $\mu_1, \mu_2$  — число полуволн в направлениях осей  $x$  и  $y$  соответственно. Следует отметить, что дефекты геометрии возникают вследствие воздействия окружающей среды и внешних тепловых нагрузок.

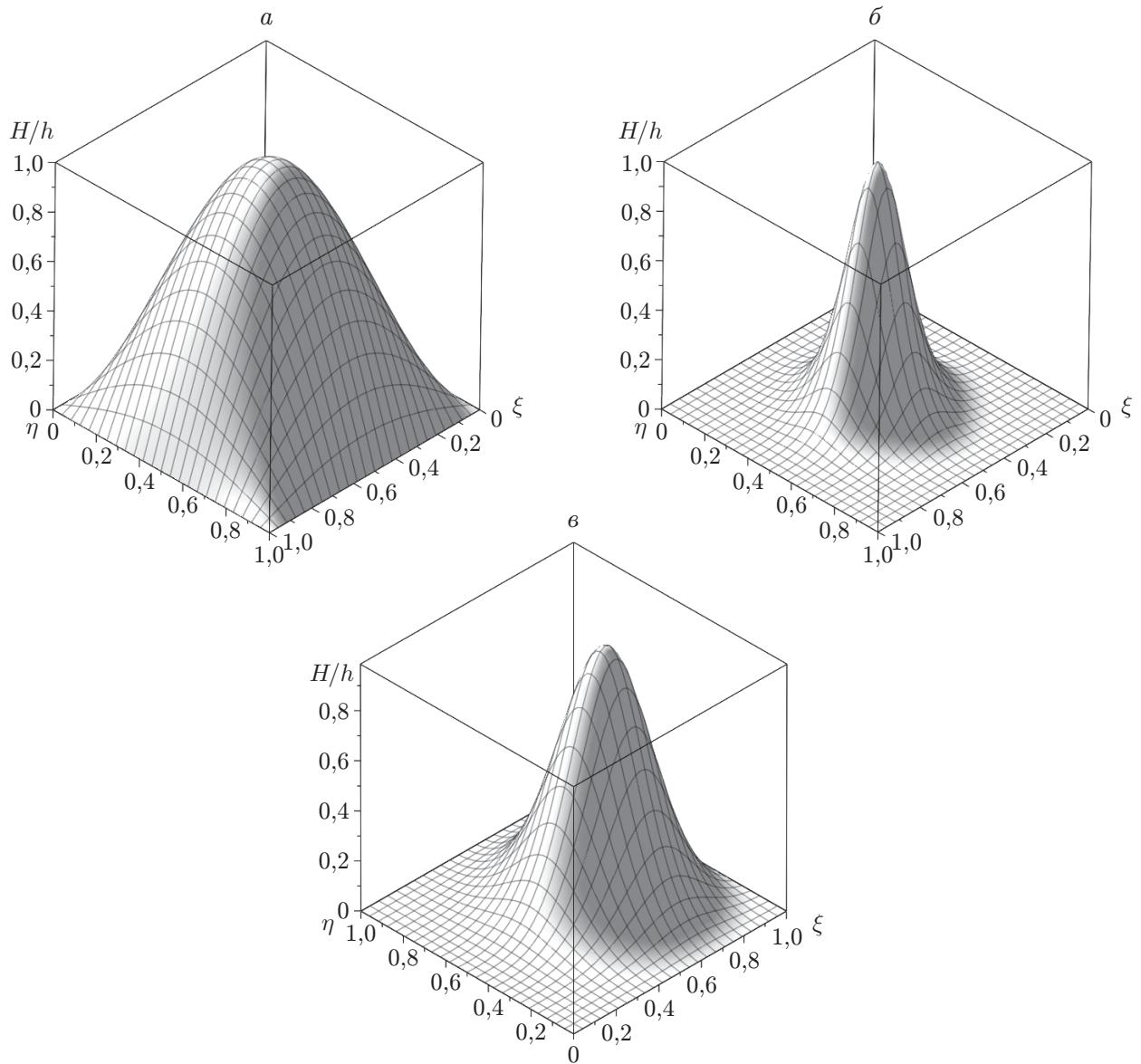


Рис. 1. Форма начальных глобальных (а) и локальных (б, в) дефектов пластины:  
а —  $D_s = 0,9$ , б —  $D_s = 0,5$ ,  $\eta = \xi = 0,5$ , в —  $D_s = 0,65$ ,  $\eta = \xi = 0,7$

1.6. *Метод Галеркина.* Решение нелинейных уравнений в частных производных будем искать в виде

$$U(\xi, \bar{t}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}(\bar{t}) \varphi_{ui}(\xi) \psi_{uj}(\eta), \quad V(\xi, \bar{t}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ij}(\bar{t}) \varphi_{vi}(\xi) \psi_{vj}(\eta),$$

$$W(\xi, \bar{t}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{ij}(\bar{t}) \varphi_{wi}(\xi) \psi_{wj}(\eta),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{ui}(\xi) &= \cos(\lambda_i \xi), & \psi_{uj}(\xi) &= \sin(\lambda_j \eta), & \lambda_i &= i\pi, & \lambda_j &= j\pi, \\ \varphi_{vi}(\xi) &= \sin(\lambda_i \xi), & \psi_{vj}(\xi) &= \cos(\lambda_j \eta), & \lambda_i &= i\pi, & \lambda_j &= j\pi, \\ \varphi_{wi}(\xi) &= \sin(\lambda_i \xi), & \psi_{wj}(\xi) &= \sin(\lambda_j \eta), & \lambda_i &= i\pi, & \lambda_j &= j\pi. \end{aligned}$$

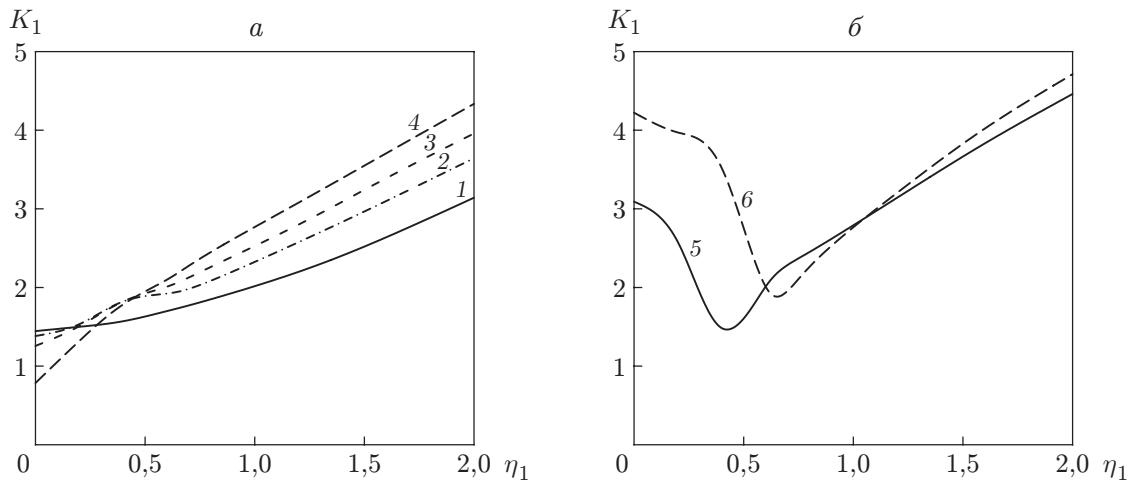


Рис. 2. Зависимости основной частоты колебаний  $K_1$  от безразмерной координаты  $\eta_1$  при  $\bar{h} = 0,01$ ,  $D_s = 0,9$  ( $[45/-45]_{2S}$ ) и различных значениях высоты синусоидального дефекта:  
 а — 1 —  $H/h = 0$ , 2 —  $H/h = 0,4$ , 3 —  $H/h = 0,8$ , 4 —  $H/h = 1,2$ ; б — 5 —  $H/h = 1,6$ , 6 —  $H/h = 2,0$

Используются краевые условия для шарнирно опертой пластины:

$$W = W_{,\xi\xi} = 0, \quad \xi = 0, 1, \quad W = W_{,\eta\eta} = 0, \quad \eta = 0, 1.$$

С помощью метода Галеркина задача сводится к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которые решаются методом Рунге — Кутты.

**2. Результаты исследования.** Ниже приводятся результаты исследования колебаний пластины с начальными дефектами при различных значениях параметров пластины и окружающей среды.

2.1. *Свойства материала конструкции и окружающей среды.* Материал конструкции (углепластик марки Т300/5208) и обтекающий поток имели следующие характеристики:  $G_{13} = 7,17(1 - 1,09 \cdot 10^{-3} \Delta T)$  ГПа,  $\rho_\infty = 1,225$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_{12} = 0,28$ ,  $G_{23} = 6,21(1 - 1,09 \cdot 10^{-3} \Delta T)$  ГПа,  $a = b = 1$  м,  $E_1 = 181(1 - 6,35 \cdot 10^{-4} \Delta T)$  ГПа,  $\alpha_{T1} = -0,07 \cdot 10^{-6}(1 - 0,69 \cdot 10^{-3} \Delta T)$  1/°C,  $h = 0,01$ ,  $E_2 = 10,3(1 - 7,69 \cdot 10^{-4} \Delta T)$  ГПа,  $\alpha_{T2} = 30,1 \cdot 10^{-6}(1 + 0,28 \cdot 10^{-4} \Delta T)$  1/°C,  $C_\infty = 340$  м/с,  $G_{12} = 7,17(1 - 1,09 \cdot 10^{-3} \Delta T)$  ГПа,  $\rho_m = 1600$  кг/м<sup>3</sup>,  $\gamma = 1,4$ .

2.2. *Результаты нелинейного анализа колебаний, потери устойчивости и закритического поведения тонкой пластины с учетом дефектов геометрии.* На рис. 2 для восьмислойной тонкой пластины ( $\bar{h} = 0,01$ ) с симметричной укладкой слоев под углом 45° приведены зависимости основной частоты колебаний от безразмерной координаты  $\eta_1$  при различных значениях высоты синусоидального дефекта шириной 0,9. При увеличении высоты дефекта в диапазоне  $0 \leq H/h \leq 1,2$  увеличивается основная частота колебаний пластины (см. рис. 2, a). При  $1,6 \leq H/h \leq 2,0$  сначала частота колебаний уменьшается (происходит разупрочнение), а затем увеличивается (происходит упрочнение). С увеличением высоты дефекта диапазон значений  $\eta_1$ , в котором происходит разупрочнение пластины, увеличивается.

На рис. 3 для восьмислойной тонкой пластины ( $\bar{h} = 0,01$ ) с симметричной укладкой слоев под углом 60° приведены зависимости амплитуды смещения и основной частоты колебаний от безразмерной координаты  $\eta_1$  при различных значениях высоты синусоидального дефекта шириной 0,9.

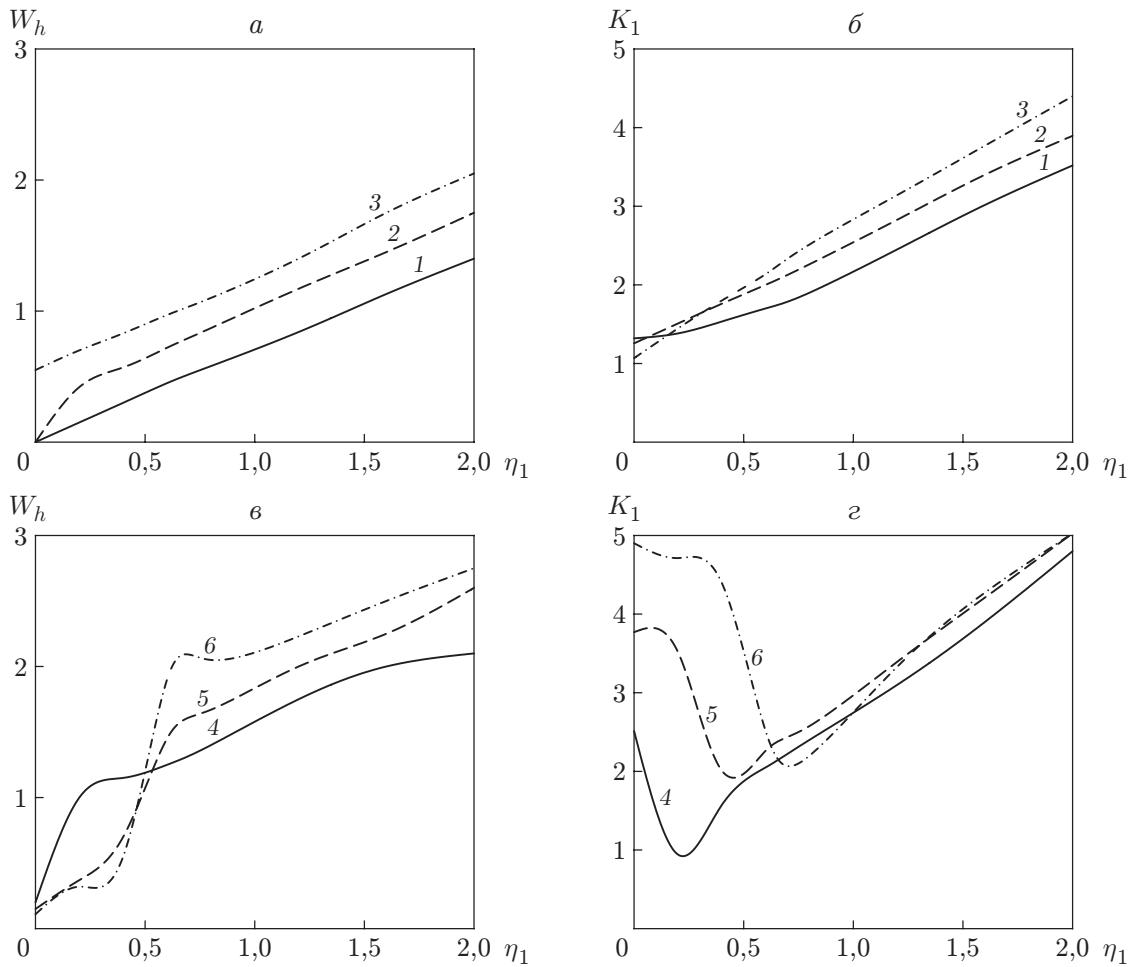


Рис. 3. Зависимости амплитуды смещения  $W_h$  (а, в) и первой частоты  $K_1$  (б, г) от безразмерной координаты  $\eta_1$  при  $\bar{h} = 0,01$ ,  $D_s = 0,9$  ( $[60/-60]_{2S}$ ) и различных значениях высоты дефекта:

а, б —  $0 \leq H/h \leq 0,8$  (1 —  $H/h = 0$ , 2 —  $H/h = 0,4$ , 3 —  $H/h = 0,8$ ), в, г —  $1,2 \leq H/h \leq 2,0$  (4 —  $H/h = 1,2$ , 5 —  $H/h = 1,6$ , 6 —  $H/h = 2,0$ )

При значениях высоты дефекта  $H/h = 0; 0,4; 0,8$  смещение пластины монотонно увеличивается с увеличением переменной  $\eta_1$  (см. рис. 3,а). Чем больше высота дефекта, тем больше величина смещения пластины. В диапазоне значений высоты дефекта  $0 \leq H/h \leq 0,8$  при малых значениях переменной  $\eta_1$  основная частота колебаний пластины  $K_1$  уменьшается с увеличением высоты дефекта, а затем, с увеличением переменной  $\eta_1$ , увеличивается (см. рис. 3,б). При  $\eta_1 < 0,5$  с увеличением высоты дефекта амплитуда смещений пластины уменьшается, а при  $\eta_1 > 0,5$  — увеличивается (см. рис. 3,в).

При значениях высоты дефекта  $H/h = 1,2; 1,6; 2,0$  основная частота колебаний пластины уменьшается в диапазонах значений переменной  $0 \leq \eta_1 \leq 0,2$ ,  $0 \leq \eta_1 \leq 0,4$  и  $0 \leq \eta_1 \leq 0,6$  соответственно (происходит разупрочнение), при дальнейшем увеличении переменной  $\eta_1$  основная частота колебаний пластины увеличивается (происходит упрочнение) (см. рис. 3,г). С увеличением высоты дефекта диапазон значений переменной  $\eta_1$ , в котором происходит разупрочнение, увеличивается.

На рис. 4 для восьмислойной тонкой пластины ( $\bar{h} = 0,01$ ) с симметричной укладкой слоев под углом  $45^\circ$  приведены зависимости основной частоты колебаний от безразмерной координаты  $\eta_1$  при различных значениях высоты и ширины локального дефекта. Из при-

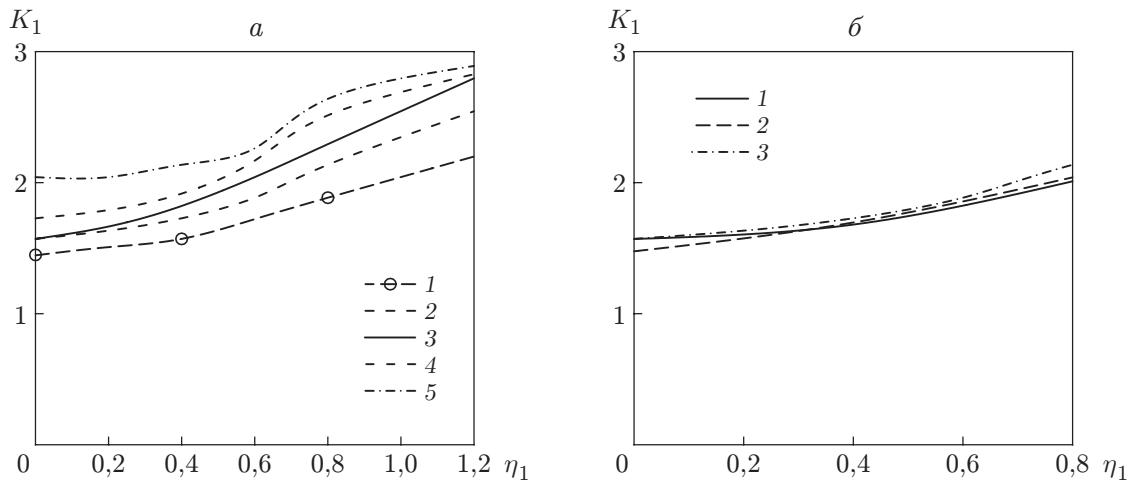


Рис. 4. Зависимости основной частоты колебаний от безразмерной координаты  $\eta_1$  при  $\bar{h} = 0,01$  ( $[45/-45]_{2S}$ ) и различных значениях высоты и ширины локального дефекта:  
 $a$  —  $D_s = 0,7$  ( $1 - H/h = 0$ ,  $2 - H/h = 0,4$ ,  $3 - H/h = 0,8$ ,  $4 - H/h = 1,1$ ,  $5 - H/h = 1,4$ ),  $\delta$  —  $H/h = 0,4$  ( $1 - D_s = 0,35$ ,  $2 - D_s = 0,5$ ,  $3 - D_s = 0,7$ )

веденных на рис. 4,  $a$  зависимостей следует, что при любой высоте локального дефекта, в отличие от глобального синусоидального дефекта, основная частота колебаний пластины монотонно увеличивается с увеличением безразмерной координаты  $\eta_1$ . Из рис. 4,  $\delta$  следует, что ширина локального дефекта не оказывает существенного влияния на зависимость основной частоты колебаний пластины от безразмерной координаты  $\eta_1$ .

На рис. 5 для восьмислойной тонкой пластины ( $\bar{h} = 0,01$ ) с симметричной и антисимметричной укладкой слоев под углом  $45^\circ$  приведены зависимости основной частоты колебаний от температуры, равномерно распределенной по поверхности пластины. (По толщине пластины температура изменяется с градиентом, равным 10.) При увеличении безразмерной температуры в диапазоне  $T/T_{cr} = 0 \div 1$  частота колебаний пластины уменьшается и при  $H/h = 0$  практически равна нулю (потеря устойчивости пластины), при дальнейшем увеличении температуры в закритической области частота колебаний пластины увеличивается. С увеличением высоты дефекта частота колебаний пластины также увеличивается. С увеличением температуры в закритической области колебания пластины становятся более устойчивыми. В докритической области частота колебаний пластины практически не зависит от ширины дефекта, а в закритической области при ширине дефекта  $D_s = 0,7$  она больше, чем при  $D_s = 0,5$  (см. рис. 5,  $\delta$ ).

2.3. Результаты анализа нелинейной задачи аэроупругости пластины при наличии в ней начального дефекта геометрии. На рис. 6 для восьмислойной тонкой пластины ( $\bar{h} = 0,01$ ) с симметричной укладкой слоев под углами  $45$  и  $60^\circ$  приведены зависимости безразмерного динамического давления, при котором появляется флаттер пластины, от высоты синусоидального дефекта шириной  $D_s = 0,9$ . Для пластины с укладкой слоев под углом  $45^\circ$  критическая скорость обтекающего потока практически при всех значениях высоты дефекта больше критической скорости потока, обтекающего пластины с укладкой слоев под углом  $60^\circ$ . Однако для значений высоты дефекта в окрестности  $H/h = 1,2$  критическая скорость потока, обтекающего пластины с укладкой слоев под углом  $60^\circ$ , больше критической скорости потока, обтекающего пластины с укладкой слоев под углом  $45^\circ$ . Следовательно, критическая скорость потока существенно зависит от высоты дефекта и способа укладки слоев.

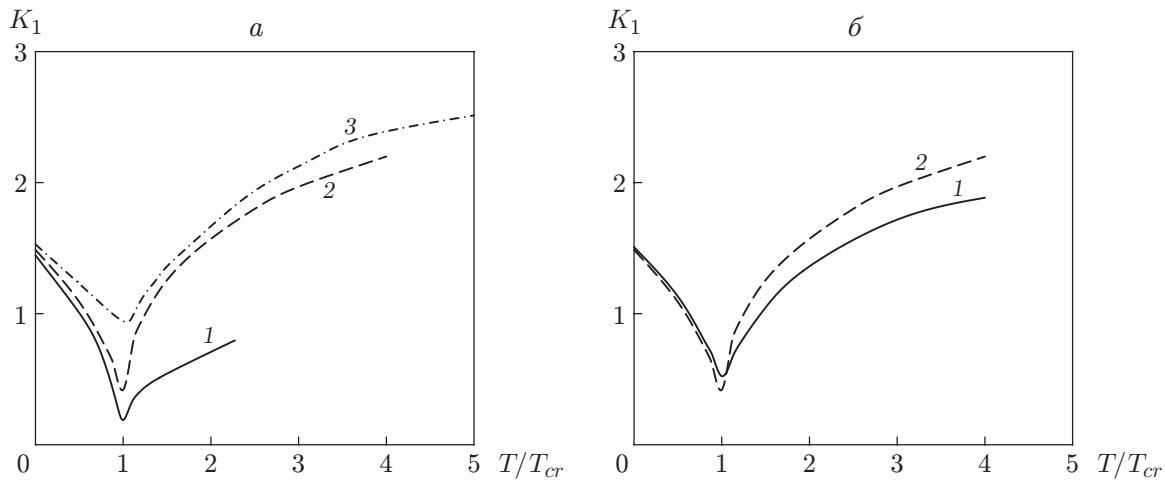


Рис. 5. Зависимости основной частоты колебаний от температуры, равномерно распределенной по поверхности пластины, при  $\bar{h} = 0,01$  ( $[45/-45]_{2S}$ ) и различных значениях высоты и ширины дефекта:  
 $a$  —  $D_s = 0,7$  (1 —  $H/h = 0$ , 2 —  $H/h = 0,4$ , 3 —  $H/h = 0,8$ ),  $\delta$  —  $H/h = 0,4$  (1 —  $D_s = 0,5$ , 2 —  $D_s = 0,7$ )

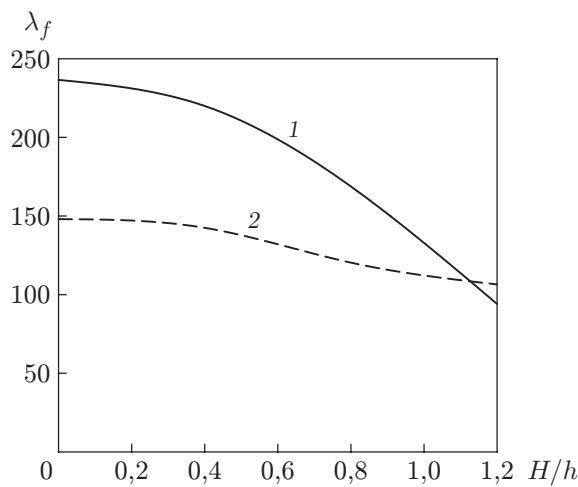


Рис. 6. Зависимость безразмерного динамического давления  $\lambda_f$  от высоты дефекта синусоидальной формы при  $\bar{h} = 0,01$ ,  $D_s = 0,9$ :  
1 —  $[45/-45]_{2S}$ , 2 —  $[60/-60]_{2S}$

На рис. 7 представлены зависимости максимальных положительных и отрицательных значений прогибов пластины от критической скорости потока для пластины с симметричной укладкой слоев под углами  $45$  и  $60^\circ$ .

На рис. 8 показаны фазовые диаграммы для тонкой пластины с симметричной укладкой слоев под углом  $45^\circ$  при  $\lambda_f = 247, 275$ .

На рис. 9 для пластины с симметричной укладкой слоев под углом  $45^\circ$  приведены зависимости критического динамического давления от высоты дефекта шириной  $D_s = 0,7$ . В отличие от случая пластины с нелокальным синусоидальным дефектом при наличии локального дефекта критическое давление увеличивается с увеличением высоты дефекта. Следовательно, при наличии локального дефекта аэроупругая устойчивость пластины из композитного материала может увеличиться.

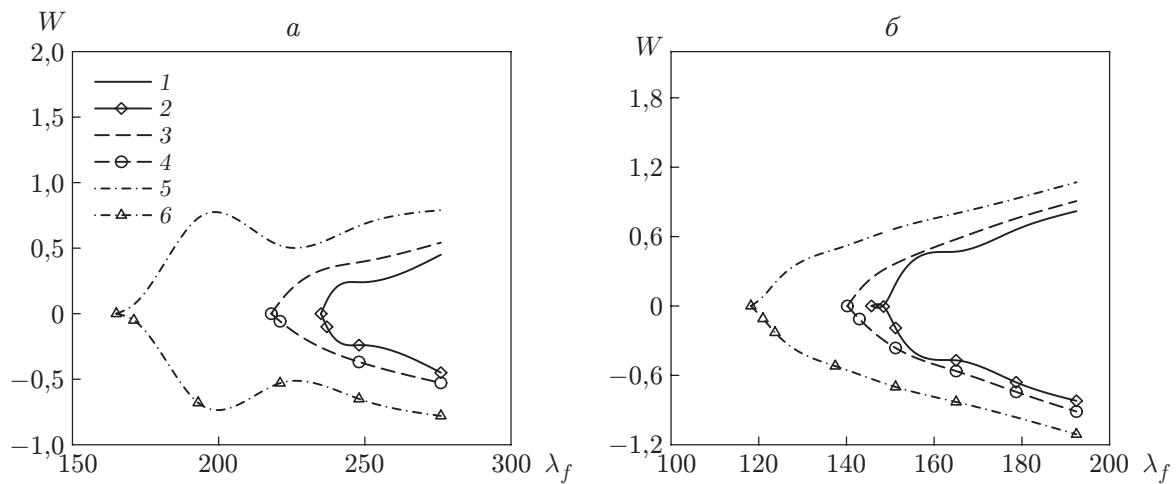


Рис. 7. Зависимости максимальных (1, 3, 5) и минимальных (2, 4, 6) смещений от безразмерного динамического давления при наличии в пластине синусоидального дефекта ( $\bar{h} = 0,01$ ,  $D_s = 0,9$ ):  
 $a$  —  $[45/-45]_{2S}$ ,  $\bar{b}$  —  $[60/-60]_{2S}$ ; 1, 2 —  $H/h = 0$ , 3, 4 —  $H/h = 0,4$ , 5, 6 —  $H/h = 0,8$

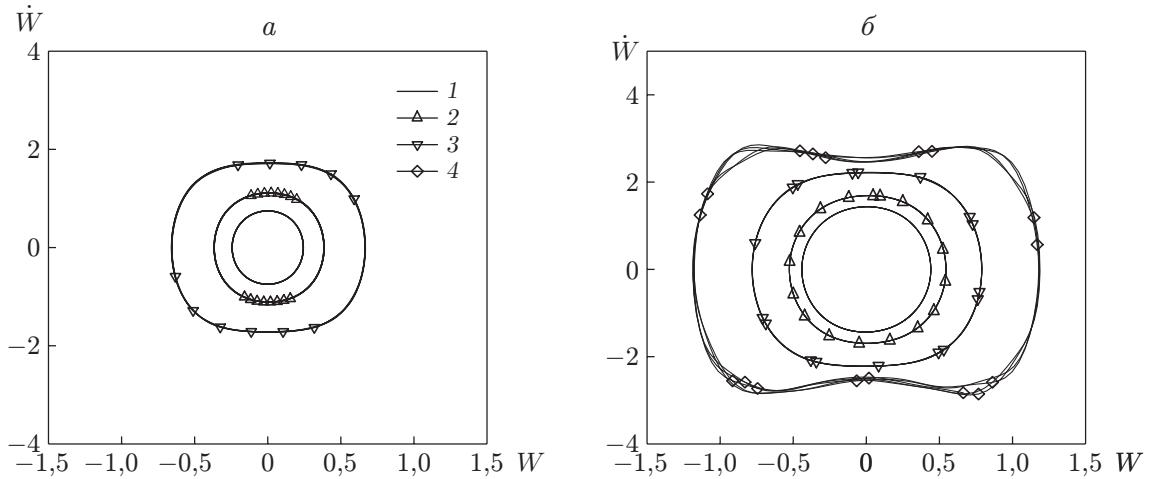


Рис. 8. Фазовые диаграммы для тонкой пластины с симметричной укладкой слоев под углом  $45^\circ$  при  $\bar{h} = 0,01$ ,  $D_s = 0,9$  ( $[45/-45]_{2S}$ ):  
 $a$  —  $\lambda_f = 247$ ,  $\bar{b}$  —  $\lambda_f = 275$ ; 1 —  $H/h = 0$ , 2 —  $H/h = 0,4$ , 3 —  $H/h = 0,8$ , 4 —  $H/h = 1,2$

На рис. 10 для пластины с симметричной укладкой слоев под углом  $45^\circ$  представлены зависимости критического динамического давления от ширины локального дефекта. Сплошная горизонтальная линия соответствует значению критического давления для пластины без дефекта. Из приведенных зависимостей следует, что от ширины локального дефекта существенно зависят демпфирующие свойства пластины и ее аэродинамическая жесткость.

На рис. 11 показана зависимость частоты флаттера от динамического давления при различных значениях высоты дефекта, на рис. 12 — зависимость амплитуды смещения от частоты флаттера при различных значениях высоты дефекта.

На рис. 13 приведены зависимости максимального и минимального смещений пластины от критического динамического давления, на рис. 14 — фазовые диаграммы для пластины с симметричной укладкой слоев при наличии в ней локального дефекта.

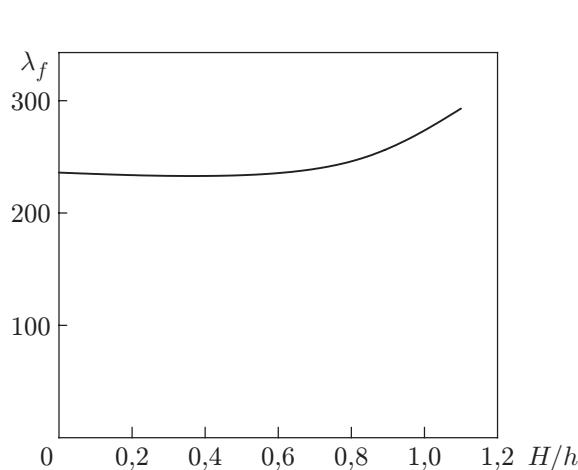


Рис. 9

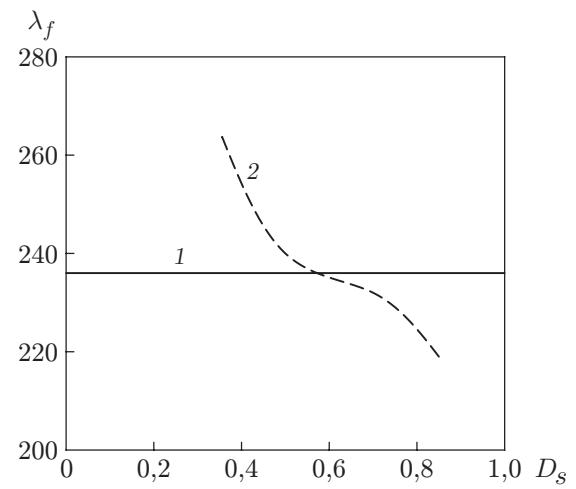


Рис. 10

Рис. 9. Зависимость критического динамического давления от высоты локального дефекта при  $D_s = 0,7$ ,  $\bar{h} = 0,01$  ( $[45/-45]_{2S}$ )

Рис. 10. Зависимость критического динамического давления от ширины локального дефекта для пластины с симметричной укладкой слоев под углом  $45^\circ$  при  $\bar{h} = 0,01$  ( $[45/-45]_{2S}$ ):

1 —  $H/h = 0$ , 2 —  $H/h = 0,4$

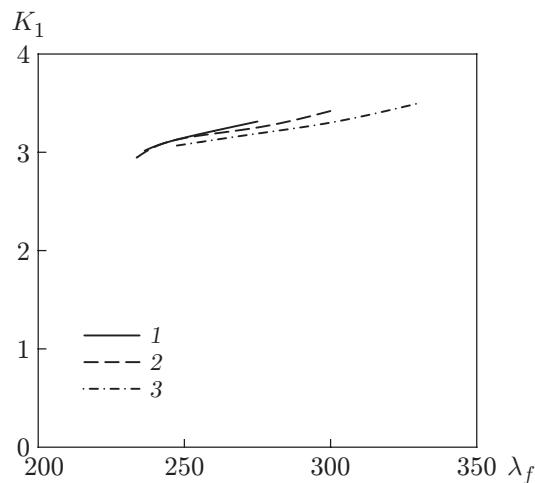


Рис. 11

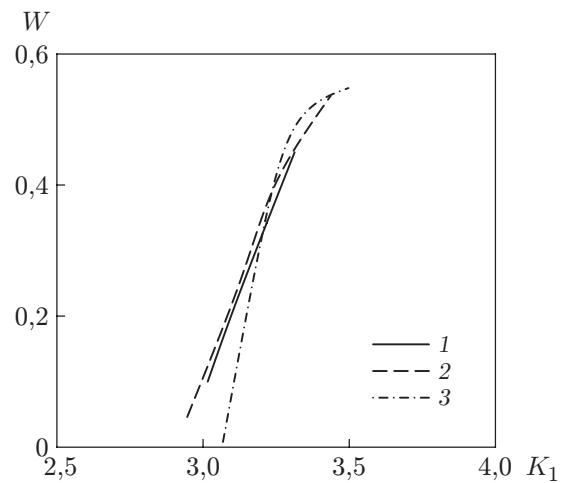


Рис. 12

Рис. 11. Зависимость частоты флаттера от динамического давления при  $\bar{h} = 0,01$ ,  $D_s = 0,7$  ( $[45/-45]_{2S}$ ) и различных значениях высоты дефекта:

1 —  $H/h = 0$ , 2 —  $H/h = 0,4$ , 3 —  $H/h = 0,8$

Рис. 12. Зависимость амплитуды смещения от частоты флаттера при  $\bar{h} = 0,01$ ,  $D_s = 0,7$  ( $[45/-45]_{2S}$ ) и различных значениях высоты дефекта:

1 —  $H/h = 0$ , 2 —  $H/h = 0,4$ , 3 —  $H/h = 0,8$

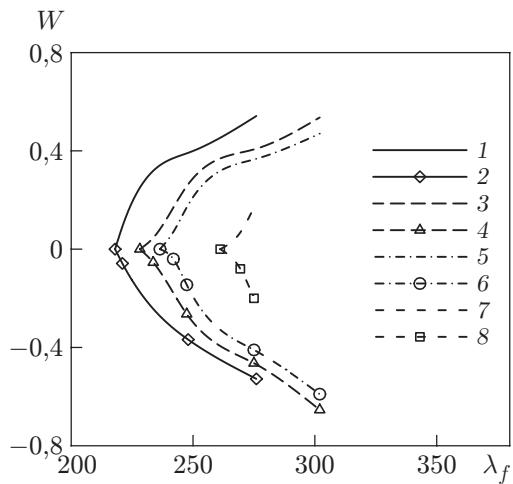


Рис. 13

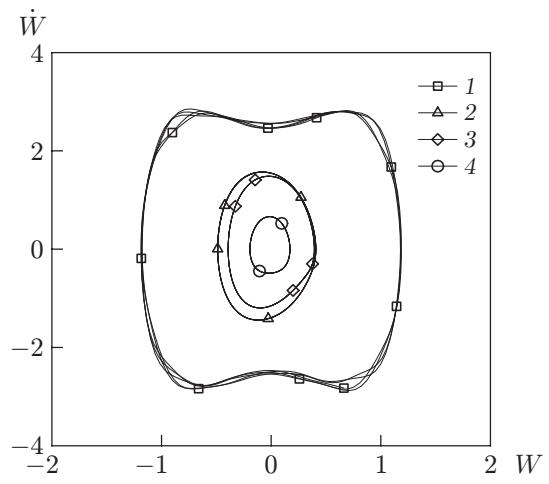


Рис. 14

Рис. 13. Зависимости максимального (1, 3, 5, 7) и минимального (2, 4, 6, 8) смещений пластины от критического динамического давления при  $\bar{h} = 0,01$ ,  $H/h = 0,4$  ( $[45/-45]_{2S}$ ) и различных значениях ширины дефекта:  
 1, 2 —  $D_s = 0,9$ , 3, 4 —  $D_s = 0,7$ , 5, 6 —  $D_s = 0,5$ , 7, 8 —  $D_s = 0,35$

Рис. 14. Фазовые диаграммы для пластины с симметричной укладкой слоев ( $[45/-45]_{2S}$ ) при наличии в ней локального дефекта ( $\bar{h} = 0,01$ ,  $H/h = 0,4$ ):  
 1 —  $D_s = 0,9$ , 2 —  $D_s = 0,7$ , 3 —  $D_s = 0,5$ , 4 —  $D_s = 0,35$

**3. Сопоставление результатов, полученных с использованием предложенного метода, с полученными ранее результатами.** На рис. 15 приведены зависимости смещения пластины при наличии в ней глобального дефекта геометрии от безразмерной температуры, построенные с использованием предложенного метода и полученные ранее в работе [23]. Рассматривалась тонкая графитоэпоксидная композитная пластина ( $0/90/90/0$ )<sub>S</sub> с постоянной температурой. Характеристики материала пластины имели следующие значения:  $G_{12} = 4,55$  ГПа,  $\alpha_{T2} = 30,1 \cdot 10^{-6}$  1/°C,  $\nu_{12} = 0,22$ ,  $G_{13} = 7,17$  ГПа,  $\rho_m = 1586$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_1 = 155$  ГПа,  $G_{23} = 3,25$  ГПа,  $a/h = 250$ ,  $E_2 = 8,07$  ГПа,  $\alpha_{T1} = -0,07 \cdot 10^{-6}$  1/°C.

Из зависимостей, приведенных на рис. 15, следует хорошее соответствие результатов.

На рис. 16 приведены зависимости частоты колебаний пластины от безразмерной координаты  $\eta_1$ , полученные в данной работе с использованием предложенного метода и в работе [33]. Рассматривалась пластина с шарниро опертыми торцами и симметричной укладкой слоев при наличии в ней глобального дефекта синусоидальной формы. Характеристики материала пластины имели следующие значения:  $H/h = 0,2$ ,  $G_{12} = 26$  ГПа,  $\rho_m = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_{12} = 0,3$ ,  $E_1 = 70$  ГПа,  $a/h = 20$  [33].

**Заключение.** В работе выполнен анализ нелинейных колебаний, потери устойчивости и аэроупругости тонкой ортотропной композитной пластины. Исследовано влияние структуры композитной пластины, числа ее слоев, тепловых и механических нагрузок на колебания пластины и на ее деформирование при наличии дефектов геометрии. Учитывалась зависимость свойств материала (удельной теплоемкости и модуля упругости) от температуры. Получены следующие результаты.

При симметричной укладке слоев под углом 45° и высоте локального дефекта в диапазоне  $0 \leq H/h \leq 1,2$  частота колебаний пластины непрерывно увеличивается с увеличением безразмерной координаты  $\eta_1$ , а сама пластина упрочняется. При высоте глобального дефекта в диапазоне  $1,6 \leq H/h \leq 2,0$  с увеличением безразмерной координаты  $\eta_1$  частота

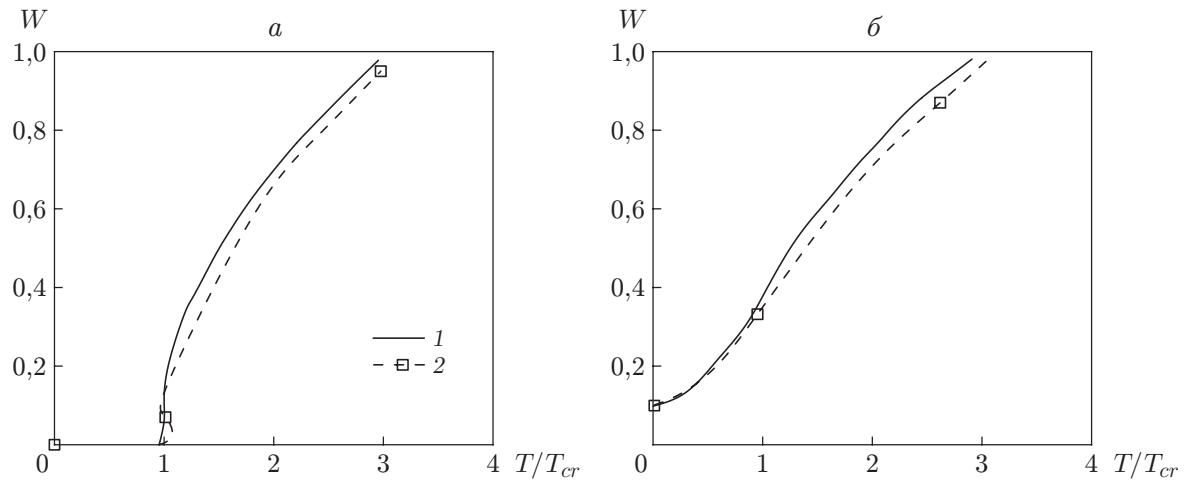


Рис. 15. Зависимость смещения пластины от безразмерной температуры при  $A_R = 1$ :  
 $a$  —  $H/h = 0$ ,  $b$  —  $H/h = 0,1$ ; 1 — данные [23], 2 — данные настоящей работы

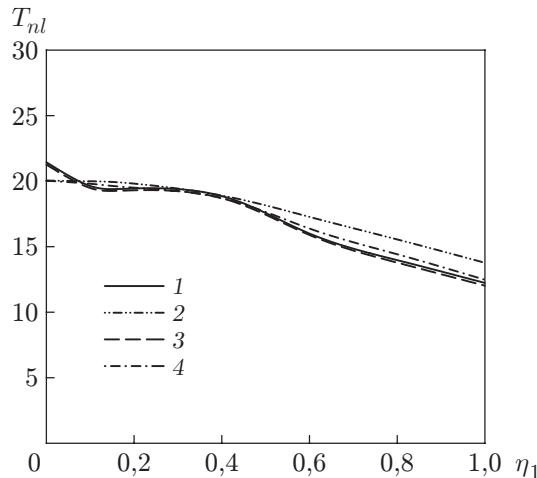


Рис. 16. Зависимости частоты колебаний пластины от безразмерной координаты  $\eta_1$  при  $H/h = 0,2$ ,  $A_R = 1$ ,  $a/h = 20$ :  
1 — данные [33], 2 — данные [34], 3 — данные [35], 4 — данные настоящей работы

та колебаний сначала уменьшается (происходит разупрочнение), а затем увеличивается (происходит упрочнение).

При наличии локального дефекта с увеличением безразмерной координаты  $\eta_1$  частота нелинейных колебаний пластины непрерывно возрастает при любой высоте дефекта.

С увеличением высоты дефекта частота колебаний пластины увеличивается, а с увеличением температуры колебания пластины в закритической области становятся более устойчивыми. При температурной нагрузке с уменьшением ширины дефекта частота колебаний уменьшается.

Тип локального дефекта оказывает существенное влияние на частоту колебаний пластины.

С увеличением высоты глобального дефекта давление, при котором появляется флаттер, уменьшается.

С увеличением жесткости пластины влияние дефекта геометрии на значение давления, при котором наступает флаттер, увеличивается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stearman R. O., Lock M. H., Fung Y. C. Ames tests on the flutter of cylindrical shells, aeroelasticity and structural dynamics: Rep. / California Inst. of Technol. N SM 62-37. Pasadena, 1962.
2. Dowell E. H. Nonlinear flutter of curved plate. Pt 1 // AIAA J. 1969. V. 7, N 3. P. 424–431.
3. Dowell E. H. Nonlinear flutter of curved plate. Pt 2 // AIAA J. 1970. V. 8, N 2. P. 261–263.
4. Anderson W. J. Experiments on the flutter of flat and slightly curved panels at Mach number 2.81: Rep. / California Inst. of Technol. N SM 62-34. Pasadena, 1962.
5. Sawyer J. W. Flutter and buckling of general laminated plates // J. Aircraft. 1977. V. 14, N 4. 38793.
6. Shiao L. C., Lu L. T. Nonlinear flutter of composite laminated plates // Math. Comput. Modell. 1990. V. 14. P. 983–988.
7. Dixon I. R., Mei C. Nonlinear flutter of rectangular composite panels under uniform temperature using finite elements // Nonlinear vibrations. Anaheim: ASME, 1992. P. 123–132.
8. Dixon I. R., Mei C. Finite element analysis of large-amplitude panel flutter of thin laminates // AIAA J. 1993. V. 31. P. 701–707.
9. Zhou R. C., Xue D. Y., Mei C. Finite element time domain — modal formulation for nonlinear flutter of composite panels // AIAA J. 1994. V. 32. P. 2044–2052.
10. Kumar L. R., Datta P. K., Prabhakara D. L. Dynamic instability characteristics of laminated composite doubly curved panels subjected to partially distributed follower edge loading // Intern. J. Solids Structures. 2005. V. 42. P. 2243–2264.
11. Shin W. H., Oh I. K., Lee I. Nonlinear flutter of aerothermally buckled composite shells with damping treatments // J. Sound Vibrat. 2009. V. 324. P. 556–569.
12. Oh I. K., Kim D. H. Vibration characteristics and supersonic flutter of cylindrical composite panels with large thermoelastic deflections // Composite Structures. 2009. V. 90. P. 208–216.
13. Xia W., Ni Q. Parametric study on supersonic flutter of angle-ply laminated plates using shear deformable finite element method // Acta Mech. Sinica. 2011. V. 27. P. 749–756.
14. Isaulova T. N., Lavit I. M. Stability of a cantilevered skew inhomogeneous plate in supersonic gas flow // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2011. V. 52, N 4. P. 664–675.
15. Shiao L. C., Kuo S. Y., Liu Y. P. Aerothermoelastic analysis of composite laminated plates // Composite Structures. 2012. V. 94. P. 1982–1990.
16. Li J., Narita Y. Analysis and optimal design for supersonic composite laminated plate // Composite Structures. 2013. V. 101. P. 35–46.
17. Song Z. G., Li F. M. Aerothermoelastic analysis of nonlinear composite laminated panel with aerodynamic heating in hypersonic flow // Composites. Pt B. Engineering. 2014. V. 56. P. 830–839.
18. Librescu L., Marzocca P., Silva W. A. Supersonic/hypersonic flutter and postflutter of geometrically imperfect circular cylindrical panels // J. Spacecraft Rockets. 2002. V. 39. P. 802–812.
19. Celep Z. Free flexural vibration of initially imperfect thin plates with large elastic amplitudes // Z. angew. Math. Mech. 1976. Bd 56. S. 423–428.
20. Celep Z. Shear and rotatory inertia effects on the nonlinear vibration of the initially imperfect plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1980. V. 47. P. 662–666.
21. Hui D. Soft-spring nonlinear vibrations of antisymmetrically laminated rectangular plates // Intern. J. Mech. Sci. 1985. V. 27. P. 397–408.
22. Featherston C. A. Imperfection sensitivity of flat plates under combined compression and shear // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36. P. 249–259.

23. **Girish J., Ramachandra L. S.** Thermal postbuckled vibrations of symmetrically laminated composite plates with initial geometric imperfections // *J. Sound Vibrat.* 2005. V. 282. P. 1137–1153.
24. **Yang J., Huang X. L.** Nonlinear transient response of functionally graded plates with general imperfections in thermal environments // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2007. V. 196. P. 2619–2630.
25. **Abbas L. K., Rui X., Marzocca P., et al.** A parametric study on supersonic/hypersonic flutter behavior of aero-thermo-elastic geometrically imperfect curved skin panel // *Acta Mech.* 2011. V. 222, N 1. P. 41–57.
26. **Yin S., Yu T., Bui T. Q., et al.** Buckling and vibration extended isogeometric analysis of imperfect graded Reissner — Mindlin plates with internal defects using NURBS and level sets // *Comput. Structures.* 2016. V. 177. P. 23–38.
27. **Fazilati J.** Panel flutter of curvilinear composite laminated plates in the presence of delamination // *J. Composite Materials.* 2018. V. 52, N 20. P. 2789–2801.
28. **Tleulinov M. K.** On one type of self-oscillations of multi-member structures // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2019. V. 60, N 5. P. 956–958.
29. **Moosazadeh H., Mohammadi M. M.** Nonlinear flutter analysis of curved panel under mechanical and thermal loads using semi-analytical and finite volume methods // *SAE Intern. J. Aerospace.* 2020. V. 13, N 2. 171.
30. **Moosazadeh H., Mohammadi M. M.** Two-dimensional curved panel vibration and flutter analysis in the frequency and time domain under thermal and in-plane load // *Adv. Aircraft Spacecraft Sci.* 2021. V. 8, N 4. P. 345–372.
31. **Yazdi A.** Flutter of geometrical imperfect functionally graded carbon nanotubes doubly curved shells // *Thin-Walled Structures.* 2021. V. 164. 107798.
32. **Epureanu B. I., Tang L. S., Paidoussis M. P.** Coherent structures and their influence on the dynamics of aeroelastic panels // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2004. V. 39. P. 977–991.
33. **Kitipornchai S., Yang J., Liew K. M.** Semi-analytical solution for nonlinear vibration of laminated FGM plates with geometric imperfections // *Intern. J. Solids Structures.* 2004. V. 41. P. 2235–2257.
34. **Singh P. N., Sundararajan V., Das Y. C.** Large amplitude vibration of some moderately thick structural elements // *J. Sound Vibrat.* 1974. V. 36, N 3. P. 375–387.
35. **Lin C. C., Chen L. W.** Large-amplitude vibration of an initially imperfect moderately thick plate // *J. Sound Vibrat.* 1989. V. 135. P. 213–224.

Поступила в редакцию 14/II 2023 г.,

после доработки — 14/II 2023 г.

Принята к публикации 29/V 2023 г.