

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ВОЛНАХ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ
С УПРУГИМИ ГРАНИЦАМИ

A. K. Переверзев

(Бийск)

В работе [1] изложен метод, позволяющий находить асимптотическое решение задачи Дирихле в узкой полосе, близкой к прямолинейной. Этот метод может быть распространен на криволинейные области, близкие к заданной.

§ 1. Асимптотическое решение задачи о течении идеальной жидкости в криволинейной полосе. Рассмотрим задачу о потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости, занимающей некоторую область D , представляющую собой узкую криволинейную полосу, ограниченную двумя линиями тока $q_1 = 0$, $q_1 = f(q_2)$, где q_1 , q_2 — криволинейные координаты. Если предположить, что задача формулируется в безразмерной форме, причем за характерные размеры выбраны расход Q и линейный размер h , характеризующий ширину полосы D , то она сводится к определению функции тока ψ , гармонической в D и удовлетворяющей краевым условиям $\psi(0, q_2) = 0$, $\psi(f, q_2) = 1$.

Для определения ψ имеем уравнение и краевые условия

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{F} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(F \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) = 0, \quad \psi(0, q_2) = 0, \quad \psi(f, q_2) = 1$$

$$\left(F(q_1, q_2) = \frac{H_{11}(q_1, q_2)}{H_{22}(q_1, q_2)} \right)$$

Вводим замену переменных $\xi = q_1$, $\eta = \varepsilon q_2$, где ε — малый параметр, тогда краевая задача примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{F_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(F_1 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \psi(0, \eta / \varepsilon) = 0, \quad F_1 = F(\xi, \eta / \varepsilon)$$

$$\psi(f_1, \eta / \varepsilon) = 1, \quad f_1(\eta) = f(\eta / \varepsilon)$$

Положим

$$\psi = \psi_0'(\xi, \eta) + \varepsilon^2 \psi_1'(\xi, \eta) + \dots$$

Подставляя этот ряд в (1.1), получим систему уравнений для ψ_k'

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{F_1} \frac{\partial \psi_0'}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{F_1} \frac{\partial \psi_i'}{\partial \xi} \right) = - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(F_1 \frac{\partial \psi_{i-1}'}{\partial \eta} \right) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

Потребуем, чтобы функции ψ_k' удовлетворяли условиям

$$\psi_0'(0, \eta) = 0, \quad \psi_0'(f_1, \eta) = 1, \quad \psi_k'(0, \eta) = 0, \quad \psi_k'(f_1, \eta) = 0 \quad (1.3)$$

Определяя ψ_k' из (1.2), (1.3) и полагая затем $\varepsilon^{2k} \psi_k'(\xi, \eta) = \psi_k(q_1, q_2)$, получим в прежних координатах для ψ формальный ряд

$$\psi(q_1, q_2) = \psi_0(q_1, q_2) + \psi_1(q_1, q_2) + \dots \quad (1.4)$$

Здесь

$$\psi_0 = \int_0^{q_1} F d q_1 \quad \left| \int_0^f F d q_1 \right|, \quad \psi_1 = \int_0^{q_1} L F d q_1 - \left(\int_0^f L F d q_1 \right| \int_0^f F d q_1 \right) \int_0^{q_1} F d q_1$$

$$L = - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial q_2} \int_0^{q_1} F \frac{\partial K}{\partial q_2} dq_1 + \frac{J'}{J^2} \left[\int_0^{q_1} K F dq_1 + \int_0^{q_1} F \frac{\partial K}{\partial q_2} dq_1 \right] + \\ + \left(\frac{J''}{J^2} - \frac{2J'^2}{J^3} \right) \int_0^{q_1} FK dq_1, \quad J = J(q_2) = \int_0^f F dq_1, \quad K = K(q_1, q_2) = \int_0^{q_1} F dq_1$$

Очевидно, функции ψ_k выражаются определенным образом через функцию $f(q_2)$ и ее производные до порядка $2k$ включительно, а также через интегралы от функций, включающих в себя функцию $F(q_1, q_2)$ и ее частные производные по q_2 до порядка $2k$.

В частности, если $f = \text{const}$ и F не зависит от q_2 , то $\psi_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), а ψ_0 будет представлять функцию тока потенциального течения в данной полосе. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть ε — некоторый малый параметр. Чтобы функция $\Psi_m = \psi_0(q_1, q_2) + \psi_1(q_1, q_2) + \dots + \psi_{m-1}(q_1, q_2)$ была асимптотическим решением поставленной задачи, необходимо и достаточно, чтобы производные $f^{(k)}$ и $\partial^k F / \partial q_2^k$ ($k = 1, 2, \dots, 2m$) имели порядок некоторых положительных степеней параметра ε .

В этом случае решение имеет вид $\psi(q_1, q_2) = \Psi_m(q_1, q_2) + O(\Psi_{m+1})$. Асимптотический характер решения понимается в том смысле, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max |\psi - \Psi_m| = 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Эта теорема по своей формулировке и доказательству аналогична соответствующей теореме работы [1].

Полученные формулы позволяют определить комплексный потенциал течения W . В частности, для квадрата растяжения $|dW/dz|^2$ на границе $q_1 = f(q_2)$ имеем выражение

$$\left| \frac{dW}{dz} \right|_{q_1=f}^2 = \frac{1}{(H_{11}^2 H_{22}^2 - H_{12}^4)_{q_1=f}} \left[H_{22}^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right)^2 - 2H_{12}^2 \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \right. \\ \left. + H_{11}^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right)^2 \right], \quad H_{ik}^2 = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_k} \quad (i, k = 1, 2) \quad (1.5)$$

Заменяя в (1.5) функцию ψ ее приближенным выражением из (1.4), получим

$$\left| \frac{dW}{dz} \right|_{q_1=f}^2 = \frac{1}{(H_{11}^2 H_{22}^2 - H_{12}^4)_{q_1=f}} \left\{ \frac{H_{11}^2}{J^2} \left[1 - 2 \int_0^f L F dq_1 + \left(\int_0^f \frac{\partial F}{\partial q_2} dq_1 \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2LJ - 2J' \int_0^f \frac{\partial F}{\partial q_2} dq_1 + J'^2 \right] - 2H_{12}^2 \frac{F}{J^2} \left(\int_0^f \frac{\partial F}{\partial q_2} dq_1 - J' \right) \right\}_{q_1=f} + \dots \quad (1.6)$$

Отсюда, J в частности, для случая узкой полосы $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, близкой к прямолинейной, имеем [1]

$$\left| \frac{dW}{dz} \right|_{y=f}^2 = \frac{1}{J^2} \left[1 + \frac{2}{3} f f'' - \frac{1}{3} (f')^2 \right] + \dots$$

Аналогично можно получить асимптотическое решение задачи более общего вида, когда функция тока ψ принимает переменные значения на границах области D . При этом как сами границы, так и граничные функции для ψ должны в некотором смысле изменяться медленно.

§ 2. Стационарные волны на внешней упругой оболочке кольца, вызываемые потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости.
1. Пусть невесомая жидкость занимает область D с границами $r_0 = \text{const}$, $r = r_1(\theta)$; первая граница абсолютно жесткая, вторая — упругая (фиг. 1). Выясним возможность существования форм равновесия упругой границы, отличных от тривиальной $r_1 = \text{const}$. В этом случае функция $r_1(\theta)$ должна

быть периодической с периодом $T = 2\pi / n$ (n — целое число). Такие устанавлившиеся режимы течения могут быть обнаружены только в рамках нелинейной теории волн. Задачу будем рассматривать в криволинейной системе координат $\xi = r - r_0$, $\eta = \theta r_0$. Пусть $\xi = f(\eta)$ — есть уравнение упругой границы в новой системе. Будем предполагать, что кривизна линии $\xi = f$ мала, что имеет место, если период функции f достаточно велик по сравнению с амплитудой волны.

Это предположение, которым будем руководствоваться в дальнейшем, может выполняться, вообще говоря, только в том случае, если ширина полосы D , близкой к кольцу, будет малой по сравнению с r_0 . Будем считать поэтому, что отношение $(r_1 - r_0) / r_0$ мало. Это дает возможность использовать формулы § 1 для вывода уравнения длинных волн, которое получим из интеграла Бернулли, взятого на границе $\xi = f$

$$\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right)_{\xi=f} = \text{const} \quad (2.1)$$

Давление P уравновешивается упругой силой F , которая действует по нормали к упругой границе и стремится восстановить ее первоначальную круговую форму. Положим $f = h + \zeta(\eta)$, где h — глубина в нижней точке впадины волны, тогда вследствие малости кривизны $\zeta = \zeta(\eta)$ для приближенной оценки силы F по величине можно воспользоваться известной гипотезой Винклера об упругих основаниях балок, согласно которой величина реакции основания пропорциональна прогибу. Можно поэтому принять $F_{\xi=f} = -(P_0 + k_1 \zeta) = -P_{\xi=f}$, где постоянная $k_1 > 0$, называемая иногда коэффициентом постели, представляет упругую характеристику, которую считаем известной; P_0 — давление в нижней точке впадины волны, которую впредь будем называть просто «впадиной», в отличие от «гребня» — верхней точки гребня волны. Используя обозначения § 1, равенство (2.1) можно записать теперь в безразмерном виде

$$\left| \frac{dW}{dz} \right|_{\xi=f}^2 + 2vf = C \quad \left(v = \frac{kh^3}{Q^2}, \quad k = \frac{k_1}{\rho} \right) \quad (2.2)$$

Здесь C — постоянная энергии; обозначения переменных величин для простоты оставлены прежними. Учитывая (1.6), после вычислений вместо (2.2) получим искомое уравнение длинных волн (a — малый параметр)

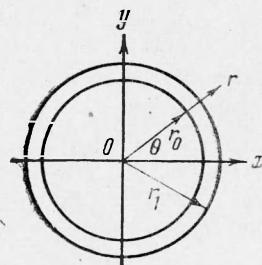
$$f'' - \frac{\alpha(4 + 2 \ln \beta - 3)}{2\beta \ln \beta} f'^2 + \frac{3}{2} \frac{\alpha \beta}{\ln \beta} + \frac{3}{2} \frac{\beta^3 \ln \beta}{\alpha} (2vf - C) = 0 \quad (\beta = \beta(\eta) = 1 + \alpha f, \quad \alpha = h/r_0) \quad (2.3)$$

2. Проведем качественное исследование уравнения (2.3). В этом уравнении удобно перейти к новым переменным $v = f'$ и f , тогда, обозначая $v^2 = u$, получим для $u = u(f)$ линейное уравнение

$$\frac{du}{df} - \frac{\alpha(4 + 2 \ln \beta - 3)}{\beta \ln \beta} u + \frac{3\alpha\beta}{\ln \beta} + \frac{3\beta^3 \ln \beta}{\alpha} (2vf - c) = 0 \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.4) не выражается в элементарных функциях, хотя легко сводится к квадратурам. Анализ его значительно упростится, если воспользоваться малостью параметра α .

Действительно, коэффициенты уравнения (2.4) будут регулярными функциями от α в окрестности $\alpha = 0$, следовательно, можно искать решение для u в виде ряда $u = u_0 + \alpha u_1 + \dots$



Фиг. 1

Для первых двух функций u_0 и u_1 получим выражения

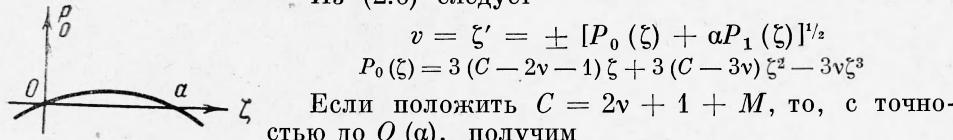
$$u_0 = 3 + D_0 f + 3Cf^2 - 3vf^3, \quad u_1 = D_1 f + \frac{3}{2} D_0 f^2 + 6Cf^3 - \frac{13}{2} vf^4 \quad (2.5)$$

где D_0, D_1 — постоянные интегрирования дифференциальных уравнений для u_0 и u_1 . Так как за характерный линейный размер выбрана глубина во впадине волны h , то в этой точке должно выполняться условие $u = f'^2 = \zeta'^2 = 0$ при $\zeta = 0$. Отсюда, полагая в (2.5) $f = 1 + \zeta$, находим $D_0 = -3C + 3v - 3$, $D_1 = (-3C + 4v + 9)/2$. Таким образом, с точностью до $O(\alpha^2)$ решение для u имеет вид

$$u = [3(C - 2v - 1) + \frac{1}{2}\alpha(15C - 30v - 9)]\zeta + [3(C - 3v) + \frac{1}{2}\alpha(27C - 69v - 9)]\zeta^2 + [-3v + \alpha(6C - 26v)]\zeta^3 - \frac{13}{2}\alpha v \zeta^4 \quad (2.6)$$

Заметим, что нулевому приближению u_0 соответствует предельный случай узкой полосы, близкой к прямолинейной, так как $\alpha = h/r_0 \rightarrow 0$ при $r_0 \rightarrow \infty$, поэтому, с точностью до $O(\alpha)$, качественный и количественный анализ уравнения (2.3) можно полностью заимствовать из работы [1].

Из (2.6) следует



$$v = \pm [3M\zeta + 3(M + 1 - v)\zeta^2 - 3v\zeta^3]^{1/2} \quad (2.7)$$

Равенство (2.7) позволяет получить картину длинных волн в фазовой плоскости $v\zeta$. Физический смысл представляют только такие действительные корни полинома P_0 , при которых на участке положительной полуоси ($\zeta > 0$), от точки $\zeta = 0$ до ближайшего корня $\zeta = a$, кривая $P_0 = P_0(\zeta)$ имеет вид, указанный на фиг. 2.

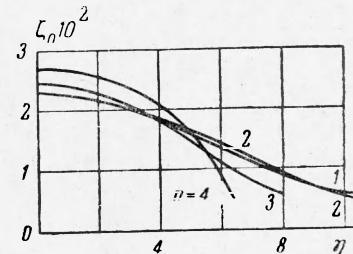
Из (2.7) следует, что для этого необходимо выполнение условий $P_0'(0) \geq 0$, $v > 0$, или иначе, $M \geq 0$, $v > 0$. В рассматриваемом случае $v = kh^3/Q^2 > 0$, следовательно, второе неравенство всегда выполняется. Каждому значению $v < 1$ соответствует однопараметрическое семейство волн, определяемое параметром $M \geq 0$; оно вырождается в уединенную волну с периодом $\lambda = \infty$, когда $M \rightarrow 0$ (см. [1]).

Таким образом, уравнение (2.3) имеет периодические решения с большим периодом по η . Физически могут быть реализованы лишь волны конечной длины с периодом $\lambda_n = 2\pi/n\alpha$ (n — целое число), фиксируемым заранее. Неравенство $v < 1$ является определяющим в возможности построения волн с большим периодом (α мало). В случае $v \geq 1$ можно также построить длинные волны, однако амплитуда их исчезающе мала и стремится к нулю при $M \rightarrow 0$. Эта возможность объясняется специальным выбором [1] характерного линейного размера h .

Безразмерная амплитуда волны a определяется формулой

$$a = \frac{1}{2v} [M + 1 - v + \sqrt{(M + 1 - v^2) + 4vM}]$$

На фиг. 3 и 4 дана зависимость $\zeta_0 = \zeta_0(\eta)$ в окрестности гребней волны, что позволяет проследить изменение амплитуды a , когда n меняется, v фиксировано и когда n фиксировано, v меняется. Вычисления проделаны для значений: (1) $\alpha = 0.1$, $v = 0.977$, $n = 1, 2, 3, 4$ (фиг. 3); (2) $\alpha = 0.1$, $\lambda_n = 31.4$ ($n = 2$), $v_1 = 0.977$, $v_2 = 0.95$,



Фиг. 3

$v_3 = 0.9$ (фиг. 4). Учет членов порядка α в решении для u не вносит существенных изменений в качественную картину длинных волн в фазовой плоскости. В частности, вместо $M \geq 0$ следует брать теперь параметр

$$M_1 = P_0'(0) + \alpha P_1'(0) = C - 2v - 1 + \alpha \geq 0$$

При $M_1 \rightarrow 0$ снова получаем уединенные волны, если только $v < 1 - 1/2\alpha$.

3. Решение уравнения длинных волн. Предельное решение при $M_1 = 0$ будет хорошо описывать длинные волны, близкие к уединенной, в окрестности гребней. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \zeta'^2 = & [3(C - 3v) + 1/2\alpha(27C - 69v - 9)] \zeta^2 + \\ & + [-3v + \alpha(6C - 26v)] \zeta^3 - 13/2\alpha v \zeta^4 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$\zeta(\eta) = b \left(\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} + \frac{b}{a} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \right)^{-1}, \quad x = \sqrt{13/2\alpha abv} (\eta - \eta_0) \quad (2.9)$$

и представляет уединенную волну с гребнем в точке η_0 . Амплитуда a и величина b — корни правой части равенства (2.8).

$$\zeta_0 \zeta^2 \quad a = \frac{1-v}{v}, \quad b = \frac{1}{13\alpha v} [6v + \alpha(1 + 15v)]$$

Из (2.9) следует

$$\lim \zeta(\eta) = (1-v) [v \operatorname{ch}^2 (\sqrt{3/4}(1-v)(\eta - \eta_0))]^{-1}$$

т. е. выражение, по виду совпадающее с уединенной волной, полученной в работе [1]. Для построения формы упругой границы $\xi = f(\eta)$ необходимо решить уравнение (2.6). Это решение может быть получено точно в эллиптических функциях, но окажется сложным для вычислений. Ниже строится приближенное решение. Будем искать решение для $\zeta(\eta)$ в виде

ряда $\zeta = \zeta_0 + a\zeta_1 + \dots$. При таком подходе сначала определяются периодические решения ζ_0 в нулевом приближении, фиксируя период волны λ_n . Последующие функции ζ_k тогда будут давать периодические поправки к волне $\zeta_0 = \zeta_0(\eta)$, сохраняя период прежним. В связи с этим будут вноситься определенные поправки к расходу Q_0 (или v_0), задаваемому произвольно, и постоянной энергии C_0 , определяемой однозначно заданием двух величин λ_n и v_0 , выбираемых в качестве независимых параметров.

Таким образом, следует положить

$$v = v_0 + \alpha v_1 + \dots, \quad C = C_0 + \alpha C_1 + \dots$$

Из (2.6), учитывая, что $u = \zeta'^2 = (\zeta_0' + a\zeta_1' + \dots)^2$, сравнением коэффициентов при одинаковых степенях α получим уравнения для последовательного определения $\zeta_k(\eta)$. Первые два имеют вид

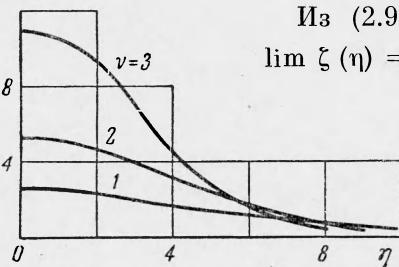
$$\zeta_0'^2 = 3(C_0 - 2v_0 - 1) \zeta_0 + 3(C_0 - 3v_0) \zeta_0^2 - 3v_0 \zeta_0^3 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} 2\zeta_0' \zeta_1' = & 3[C_0 - 2v_0 - 1 + 2(C_0 - 3v_0) \zeta_0 - 3v_0 \zeta_0^2] \zeta_1 + \\ & + 1/2 \{ [15C_0 - 30v_0 - 9 + 6(C_1 - 2v_1)] \zeta_0 + [27C_0 - 69v_0 - 9 + \\ & + 6C_1 - 18v_1] \zeta_0^2 + (12C_0 - 52v_0 - 6v_1) \zeta_0^3 - 13v_0 \zeta_0^4 \} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Решения уравнения (2.10) приведены в работе [1]

$$\zeta_0(\eta) = a \operatorname{cn}^2 (\sqrt{1/2} \eta \sqrt{3v_0(a+b)}) \quad (2.12)$$

Приведем еще ряд формул из работы [1], необходимых для построе-



Фиг. 4

ния волны $\zeta_0 = \zeta_0(\eta)$ по заданным величинам λ_n и v_0 ; а именно

$$k^2 = (1 + b/a)^{-1}, \quad C_0 = 1 + 2v_0 + M_0, \quad b = [a - (1 - v_0)/v_0] (1 + a)^{-1}$$

$$\lambda_n = 2K(k) [3v_0(a+b)]^{-1/2}, \quad M_0 = [v_0a^2 - a(1-v_0)] (1 + a)^{-1}$$

Здесь a — амплитуда волны, k — модуль эллиптической функции сп, K — полный эллиптический интеграл первого рода. Для больших значений K (период λ_n велик) модуль k весьма близок к единице, и, пользуясь известным разложением $K(k)$ в окрестности $k = 1$, можно с большой точностью принять $K(k) = \ln [4(1 - k^2)^{-1/2}]$. Таким образом,

$$\lambda_n \approx \frac{2}{\sqrt{3v_0(a+b)}} \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}$$

При решении уравнения (2.11) удобно перейти к новой независимой переменной ζ_0 вместо η , тогда решение можно представить в виде

$$\zeta_1(\zeta_0) = H(\zeta_0)L(\zeta_0), \quad L(\zeta_0) = [\zeta_0(a - \zeta_0)(b + \zeta_0)v_0]^{1/2}$$

Функция H находится из уравнения

$$dH/d\zeta_0 = R(\zeta_0)/L(\zeta_0) \quad (2.13)$$

где R — известная рациональная функция. Чтобы упростить вычисления, вместо точного решения $H(\zeta_0)$, которое может быть выражено в эллиптических функциях, получим приближенное решение следующим образом. В уравнении (2.13) заменим радикал $L(\zeta_0) = \zeta_0'(\eta)/\sqrt{3}$ выражением $p\sqrt{\zeta_0(a - \zeta_0)}$. Параметр p выберем с расчетом, чтобы максимальные значения обоих выражений на участке аппроксимации $\zeta_0 \in [0, a]$ были одинаковыми. Это упрощение вполне оправдано для малых интервалов $[0, a]$ (амплитуды малы) и при достаточной плавности функции L на этих интервалах (кривизна $\zeta_0(\eta)$ мала). Определяя H из нового уравнения, окончательно получим

$$\begin{aligned} \zeta_1(\zeta_0) = & -\sqrt{v_0\zeta_0(a - \zeta_0)(\zeta_0 + b)} \left\{ \frac{13}{12} \frac{a}{p} \frac{t}{1+t^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6pM_0} \left[\left(A + \frac{13}{2}aM_0 \right) \arctg t - \frac{B}{t} + \frac{D}{\sqrt{1+b_0}} \arctg \frac{t}{\sqrt{1+b_0}} \right] + E \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь

$$t = \sqrt{(a - \zeta_0)/\zeta_0}, \quad b_0 = a^2v_0/M_0, \quad A = -a^2a_3/b_0$$

$$B = (a_1 + aa_2 + a^2a_3)(1 + b_0)^{-1}, \quad a_2 = 18 + 14M_0 - 15v_0 + 6C_1 - 18v_1$$

$$D = (b_0^2a_1 + a^2a_3 - ab_0a_2)[b_0(1 + b_0)]^{-1}, \quad a_1 = 6 + 15M_0 + 6C_1 - 12v_1$$

$$p = \sqrt{4v_0\zeta_{01}(a - \zeta_{01})(\zeta_{01} + b)/a^2}, \quad a_3 = -(15v_0 + 1 + M_0 + 6v_1)$$

$$\zeta_{01} = 1/3v_0^{-1} [1 + M_0 - v_0 + \sqrt{(1 + M_0 - v_0)^2 + 3M_0v_0}]$$

Во впадине волны, где $\zeta_0 = \zeta_1 = \dots = 0$, должно выполняться условие $\zeta_0' = \zeta_1'(\eta) = \dots = 0$. Отсюда постоянная интегрирования

$$E = -\frac{\pi}{12pM_0} \left[A + \frac{13}{2}aM_0 + \frac{D}{\sqrt{1+b_0}} \right]$$

Указанными условиями во впадине волны определяется с точностью до положения фазы относительного начала координат. В формуле (2.12) значению $\eta = 0$ соответствует гребень волны. Остается найти неизвестные пока величины v_1 и C_1 . Условия для определения v_1 и C_1 должны следовать автоматически из решения (2.14). Действительно, чтобы обеспечить конечность производной $\zeta_1'(\eta)$ в точке $\eta = 0$, где $\zeta_0 = a$, необ-

ходимо положить $B = 0$. Чтобы, кроме того, обеспечить выполнение равенства $\zeta_1'(\eta) = 0$ в точке $\eta = 0$, которое необходимо для непрерывности производной $\zeta_1'(\eta)$ при переходе через гребень волны $\zeta_0 = a$, необходимо положить $E = 0$. Условия $B = 0$, $E = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} & -6(2+3a+a^2)v_1 + 6(1+a)c_1 + 6 + 15M_0 + \\ & + a(18+14M_0-15v_0) - a^2(1+M_0+15v_0) = 0 \\ & 6[a^2(1+b_0)^{3/2}-2b_0^2-a^2+3ab_0]v_1 + 6b_0(b_0-a)C_1 + \\ & + [13/2ab_0M_0+a^2(15v_0+1+M_0)](1+b_0)^{3/2} + b_0^2(6+15M_0) - \\ & - a^2(1+M_0+15v_0) - ab_0(18+14M_0-15v_0) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда можно вычислить v_1 и C_1 . Все последующие производные от функции $\zeta_1(\eta)$ будут всюду непрерывны в силу уравнений (2.10), (2.11), а сама функция ζ_1 находится из формулы (2.14), в которой следует положить $B = E = 0$. Чтобы перейти к размерным величинам, нужно определить глубину волны h , которая, подобно λ_n , не может задаваться произвольно, а определяется однозначно заданием безразмерной формы волны с длиной λ_n из условия постоянства площади области D , занимаемой несжимаемой жидкостью. Если недеформированная упругая граница есть $r = r_1 = \text{const}$, то указанное условие

$$\int_0^{2\pi/\alpha} \left[\int_0^{1+\xi} (1+\alpha\xi) d\xi \right] d\eta = \pi \left(\frac{r_1^2}{h^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)$$

Отсюда

$$h = \sqrt{\pi} r_1 \left\{ \int_0^{2\pi/\alpha} \left[1 + \zeta_0 + \frac{\alpha}{2}(1 + 2\zeta_0 + 2\zeta_1 + \zeta_0^2) \right] d\eta + \frac{\pi}{\alpha^2} \right\}^{-1/2} \quad (2.15)$$

Следует отметить, что правая часть в (2.15) зависит от $\alpha = h / r_0$ и, строго говоря, заранее не известна, однако в случае малых амплитуд величина h будет близка к исходной ширине кольца $r_1 - r_0 = \text{const}$, и можно принять $\alpha = (r_1 - r_0) / r_0$. Более точно h можно определить из (2.15) способом подбора по параметру α .

4. Если в формулировке предыдущей задачи поменять ролями границы области D , то получим задачу о стационарных волнах на внутренней упругой оболочке кольца. Пусть теперь r_0 — радиус внешней абсолютно жесткой границы. Эту задачу удобно рассматривать в системе координат ξ_1 , η_1 , связанной формально с прежней системой ξ , η по формулам $\xi_1 = -\xi$, $\eta_1 = \eta$. Тогда, сохранив для простоты все прочие обозначения неизменными, снова можно записать интеграл Бернулли для свободной поверхности жидкости в виде

$$\left| \frac{dW}{dz} \right|^2 \Big|_{\xi_1=f} + 2vf = C$$

где выражение $|dW/dz|_{\xi_1=f}^2$ теперь несколько изменится. Приведем окончательный вид уравнения длинных волн, аналогичный (2.4),

$$\frac{du}{df} + \frac{\alpha(4+2\ln\beta_1-3)}{\beta_1\ln\beta_1} u - \frac{3\alpha\beta_1}{\ln\beta_1} - \frac{3\alpha_1^3\ln\beta_1}{\alpha} (2vf - C) = 0$$

$$\beta_1 = \beta_1(\eta_1) = 1 - \alpha f(\eta_1)$$

В результате последующих вычислений, как и в предыдущей задаче, получим

$$\zeta(\eta_1) = \zeta_0(\eta_1) - \alpha\zeta_1(\eta_1) + O(\alpha^2)$$

причем ζ_0 , ζ_1 формально определяются по-прежнему. Весь качественный анализ длинных волн с точностью до нулевого приближения сохраняется прежним.

Поступила 1 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

- Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М. Исследование движения тяжелой жидкости при скоростях, близких к критической. Тр. МФТИ, 1959, вып. 3.