

ЭВОЛЮЦИЯ СИЛЬНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

В. А. Павлов

(Ленинград)

После опубликования [1] было уделено значительное внимание задаче о распространении сферических [2—6] и плоских [3, 7, 8] сильных ударных волн (УВ) в неоднородной атмосфере. Развита «геометрическая динамика» сильной УВ [9, 10] и предложено [10, 11] «правило характеристик» для таких волн. Методика [9—11] успешно применялась для задачи о плоских волнах [10].

В настоящей работе на основе представлений [9—11] исследуется эволюция сильной сферической УВ в неоднородной атмосфере. Точность приближенных аналитических формул оказывается выше, чем аналогичные результаты в [1—5].

Невозмущенное состояние плотности и давления атмосферы характеризуется соотношением $\rho_0(z)/\rho_0(0) = p_0(z)/p_0(0) = \exp(-z/H)$ (H — высота «однородной» атмосферы). Среду опишем системой уравнений газовой динамики

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= Q_1, \quad dv/dt = -(1/\rho) \nabla p + \mathbf{g} = Q_2, \\ dp/dt - a^2 d\rho/dt &= Q_3, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}$, $\mathbf{g}$, a — скорость газа, ускорение силы тяжести и скорость звука; $Q_1(t, \mathbf{r}) = Q_{01}(t)\delta(\mathbf{r})$; $Q_2(t, \mathbf{r}) = Q_{02}(t)\delta(\mathbf{r})/|\mathbf{z}|$; $Q_3(t, \mathbf{r}) = Q_{03}(t)\delta(\mathbf{r})$ — функции, описывающие точечный источник. Этот источник расположен в точке $R = 0$ (R, θ — сферические координаты, $z = R \cos \theta$) и возбуждает сильную УВ, уходящую на бесконечность. Так как свойства среды зависят только от одной координаты z , источник точечный и импульс его ориентирован вдоль оси $\mathbf{z}$, то решение системы (1) обладает осевой симметрией. Известно [5, 6], что у волны, идущей вверх ($0 \leq \theta \leq \pi/2$), скорость перемещения фронта изменяется немонотонно. Она имеет минимум при $R = 1,5H/\cos \theta$ [6] (аналитические расчеты [5] дают грубый результат: $R = 4H/\cos \theta$). В настоящей работе анализируется эволюция сильной УВ (число Маха $M > 1$) на той стадии, когда скорость ударного фронта u монотонно возрастает: $R \geq R_0 > 1,5H/\cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Для сильных УВ допустимо исследовать поля на фронте, не рассматривая деталей волновой структуры за фронтом [9—11]. При этом удается получить приближенные аналитические представления полей на фронте.

Пусть $Q_{01}(t)$, $Q_{02}(t)$, $Q_{03}(t)$ — такие функции, что источник в (1) на расстоянии $R = R_0$ создает УВ с профилем в виде «скачка». Считаем, что скорость ударного фронта $u(R_0, \theta)$ известна. Потребуем, чтобы на фронте выполнялись известные соотношения для «скачка»:

$$(2) \quad \begin{aligned} v &= \frac{2a_0}{\gamma+1} \left(\tilde{M} - \frac{1}{\tilde{M}} \right), \quad p = \rho_0(t) a_0^2 \left[\frac{2}{\gamma+1} M^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right], \\ \rho &= \rho_0(z) \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{M^2} \right)^{-1}, \quad a\rho = a_0 \rho_0(z) M \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} E_1(M), \end{aligned}$$

где $M = \frac{u(R, \theta)}{a_0} > 1$; $E_1(M) = \left[1 + \frac{4\gamma - (\gamma-1)^2}{2\gamma(\gamma-1)M^2} - \frac{1}{\gamma M^4} \right]^{1/2} \left[1 + \frac{2}{(\gamma-1)M^2} \right]^{-1}$; a , a_0 — скорость звука и невозмущенное значение ее; γ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме.

Как и в [9], введем нелинейные лучевые координаты α, β , связанные с фронтом УВ (рис. 1). Считаем, что орт $\mathbf{e}_\alpha$ перпендикулярен ударному фронту ($\mathbf{e}_\alpha \perp \mathbf{e}_\beta$) и, кроме того, имеет место соотношение $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\alpha) = \cos \Delta$. За элементы расстояний вдоль осей α и β возьмем соответственно $M d\alpha$ и $A d\beta$ (A — безразмерная функция, описывающая поперечное сечение лучевой трубки [9]). Таким образом, здесь используются координаты с неоднородными нелинейными масштабами длины. УВ может быть описана тремя функциями: $\Delta(\alpha, \beta)$, $M(\alpha, \beta)$ и $A(\alpha, \beta)$, удовлетворяющими двум

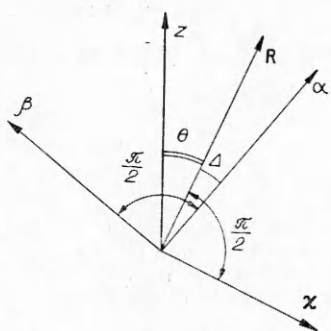


Рис. 1

уравнениям нелинейной «геометрической» динамики» [9]:

$$(3) \quad \partial \Delta / \partial \beta = (1/M) \partial A / \partial \alpha;$$

$$(4) \quad \partial \Delta / \partial \alpha = (-1/A) \partial M / \partial \beta.$$

По существу, (3), (4) представляют собой условие инвариантности квадрата элемента длины $M^2 d^2 \alpha + A^2 d^2 \beta$ при переходе к исходной системе координат R, θ . Недостающее третье уравнение получим, основываясь на приближенном «правиле характеристик» [10, 11], считая, что профиль УВ имеет вид «скачка» (2) и скачок отождествлен с поверхностью характеристики C_+ уравнений газовой динамики (1). Используем приближение одномерного поля, распространяющегося в тонкой лучевой трубке вдоль координаты α . В такой лучевой трубке с непроницаемыми для газа стенками при выполнении условий слабой зависимости полей от координаты β

$$\left| \frac{\partial}{M \partial \alpha} (A \rho v_\alpha) \right| \gg \left| \frac{\partial}{A \partial \beta} (A \rho v_\beta) \right|, \quad \left| V_\alpha \frac{\partial}{M \partial \alpha} \left(\frac{v_\alpha}{\rho} \right) \right| \gg \left| v_\beta \frac{\partial}{A \partial \beta} \left(\frac{v_\beta}{\rho} \right) \right|$$

имеют место приближенные соотношения

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) \approx \frac{\partial}{A M \partial \alpha} (A \rho v), \quad v \approx v_\alpha, \quad \frac{d}{dt} \approx \frac{d}{dt} + v \frac{\partial}{M \partial \alpha}$$

и система (1) упрощается:

$$(5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{M \partial \alpha} (A \rho v) \approx Q_1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{M \partial \alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{M \partial \alpha} + (g, \mathbf{e}_\alpha) \approx (Q_2, \mathbf{e}_\alpha), \quad \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial \alpha} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{M \partial \alpha} \right) \approx Q_3.$$

Из системы (5) для характеристики C_+ при $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $R > R_0$ получаем

$$(6) \quad \frac{dp}{M d\alpha} + \rho a \frac{dv}{M d\alpha} - \frac{a^2 \rho v}{A(v+a)} \frac{dA}{M d\alpha} - \frac{\rho a g \cos \theta}{v+a}, \quad M \frac{d\alpha}{dt} = v + a.$$

Система уравнений (2), (6) дает искомое третье уравнение для отыскания Δ, M, A :

$$(7) \quad \frac{1}{E_2} (M) \frac{dM^2}{d\alpha} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{d\alpha} \left(2M^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \right) = \\ = \frac{(\gamma+1)}{\rho_0 a_0} \left\{ \frac{a^2 \rho v}{v+a} \right\} \frac{1}{A} \frac{dA}{d\alpha} - \frac{(\gamma+1)g}{\rho_0 a^2} \left\{ \frac{\rho a M}{v+a} \right\} \cos \theta, \quad E_2(M) = \\ = \left[2 \left(1 + \frac{1}{M^2} \right) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} E_1(M) \right]^{-1}.$$

На стадии $R > R_0$ имеем дело с однородной системой (3), (4), (7) и решение задачи с источниками Q_1, Q_2, Q_3 заменяем граничной задачей. Функции,

Сферическая волна									
γ	[6]	Расчет по формуле (10)		Автомодельное решение при $A = A(R)$ [4]		Параболическое приближение при $A = A(R)$ [4]		[5]	
	$b_*(\gamma)$	$b(\gamma)$	$\delta(\gamma) \%$	$b(\gamma)$	$\delta(\gamma) \%$	$b(\gamma)$	$\delta(\gamma) \%$	$b(\gamma)$	$\delta(\gamma) \%$
1,1	0,117	0,1319	+12,7	0,1269	-27,1	0,1294	-25,6	0,04167	-64,4
1,2	0,146	0,1530	+4,79					0,07143	-51,1
1,4	0,174	0,1798	+3,33					0,1111	-36,1
1,5	0,184	0,1859	+1,03					0,1250	-32,1
5/3	0,195	0,1926	-1,23					0,1429	-26,7
2,0	0,211	0,2000	-5,21					0,1667	-21,0

стоящие в фигурных скобках в (7), зависят только от M . Роль источников Q_1, Q_2, Q_3 проявляется в создании профиля в виде скачка и в задании скорости ударного фронта $u(R_0, \theta)$ на сфере радиуса R_0 . Решим систему (3), (4), (7) приближенно, считая, что локально форма ударного фронта слабо отличается от сферической. При этом функции M и A будут медленно зависеть от угловой координаты θ по сравнению с изменением этих функций в зависимости от R . Перейдем к системе локальных ортогональных координат R, χ (см. рис. 1), связанных с точкой на фронте УВ: $\chi = x \cos \theta - z \sin \theta$, $R = x \sin \theta + z \cos \theta$, $M d\alpha = dR \cos \Delta + d\chi \sin \Delta$, $A d\beta = -d\chi \cos \Delta + dR \sin \Delta$ (векторы x, z, α, β лежат в одной плоскости). Систему (3), (4) приближенно заменим уравнениями

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\sin \Delta}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\cos \Delta}{A} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\cos \Delta}{M} \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\sin \Delta}{M} \right) = 0,$$

которые имеют решение $\Delta = \Delta(\chi)$, $A/M = \text{const}$, $A = A(R)$, $M = M(R)$.

При переходе от (3), (4) к (8) угол θ приобретает роль параметра, лучевыми координатами становятся R, χ , и, как следствие, получается условие синхронного изменения функций A и M : $A/M \approx \text{const}$. В рассматриваемом далее случае $M \gg 1$ возможно упрощение (7) к виду

$$\frac{\lambda_1(\gamma)}{M} \frac{dM}{d\alpha} + \frac{1}{A} \frac{dA}{d\alpha} + (1 + \lambda_2(\gamma)) \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{d\alpha} \approx 0 \quad \text{или}$$

$$(9) \quad A/A_0 = (M/M_0)^{-\lambda_1} \left[\frac{\rho_0(R \cos \theta)}{\rho_0(R_0 \cos \theta)} \right]^{-(1+\lambda_2)}.$$

Здесь $\lambda_1(\gamma) = 1 + 2/\gamma + \sqrt{2\gamma/(\gamma-1)}$; $\lambda_1(1,4) = 5,0743227$; $\lambda_2(\gamma) = \sqrt{(\gamma-1)/2\gamma} - (\gamma-1)/\gamma$; $\lambda_2(1,4) = 0,0922502$; A_0, M_0 — значения функций A, M при $R = R_0$. Система уравнений (8), (9) имеет решение

$$(10) \quad M(R)/M_0 = A(R)/A_0 = \exp[(b(\gamma)/H)(R - R_0) \cos \theta],$$

$$\Delta(\chi) = -(\chi/H)b(\gamma) \cos \theta, \quad b(\gamma) = (1 + \lambda_2(\gamma))/(1 + \lambda_1(\gamma)).$$

Согласно (10), площадь поперечного сечения лучевой трубки $A(R)$ изменяется по экспоненциальному закону. Гипотеза об экспоненциальной зависимости $A(R)$ использовалась в [3, 4] при построении автомодельного решения второго рода, но при этом синхронность изменения $A(R)$ и $M(R)$ отсутствовала. В [5] авторы исходили из допущения $A(R) \sim R^2$. Сопоставление (10) для параметра $b(\gamma)$ с данными других работ сделано в таблице, где $b = b_*(\gamma)$ — результат численного интегрирования уравнений газовой динамики [6]. Параметр $\delta(\gamma) = (b(\gamma) - b_*(\gamma))/b_*(\gamma) \cdot 100\%$ — относительная погрешность приближенных аналитических результатов. В таблице приведены также данные [3, 7, 8, 10] о плоской УВ в неоднородной атмосфере, так как их иногда используют для описания сферической волны. Наибольшая точность формулы (10) осуществляется при $\gamma \approx 1,5$, при $\gamma = 1,2-2,0$ погрешность составляет единицы процентов, при $\gamma = 1,1$ $\delta = 12,7\%$. Для любых значений γ результаты (10) оказываются точнее, чем [4, 5] для сферической волны. Для плоской волны при

Плоская волна							
Автомодельное решение [8]		Автомодельное решение [7]		Автомодельное решение [3]		$b(\gamma) = \left(2 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right)^{-1}$ [10]	
$b(\gamma)$	$\delta(\gamma) \%$	$b(\gamma)$	$\delta(\gamma) \%$	$b(\gamma)$	$\delta(\gamma) \%$	$b(\gamma)$	$\delta(\gamma) \%$
0,126	+16,2					0,149	+27,3
0,155	+6,16	0,154	+6,16	0,1545	+5,82	0,183	+25,3
				0,1835	+5,46	0,215	+23,6
0,176	-3,26			0,193	+4,89	0,225	+22,0
0,204	+4,62	0,204	+4,62	0,204	+4,61	0,236	+21,0
0,219	+3,79			0,219	+4,10	0,250	+28,2

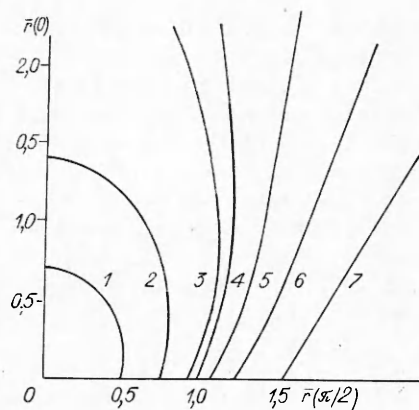


Рис. 2

нения УВ. Это обеспечивало при $R > R_0$ возрастание скорости УВ при увеличении R . Метод [9—11] не следует применять при $\pi/2 < \theta \leq \pi$ и $H = \infty$ (в однородной среде), так как происходит уменьшение скорости УВ с увеличением R . Волна в такой ситуации из сильной ($M > 1$) переходит в слабую ($M \rightarrow 1$).

Рассмотрим эволюцию сильной УВ ($M \gg 1$) (2), (10). В нашем приближении $M = M(R)$ и не зависит от χ ($\chi \perp \mathbf{R}$). Это означает, что имеет место локальное свойство $\mathbf{u} \parallel \mathbf{R} \parallel \alpha$ и из (10) при учете $u = dR/dt$ получим соотношение для описания эволюции ударного фронта

$$(11) \quad \frac{b(\gamma)}{H} [R(t, \theta) - R_0] = -\frac{1}{\cos \theta} \ln \left[1 - \frac{t \cos \theta}{t_\infty(0)} \right] \quad (t_\infty(\theta) \equiv H(b(\gamma) a_0 M_0 \cos \theta)^{-1}).$$

При $t = t_\infty(\theta)$ осуществляется «прорыв» ударного фронта на бесконечность за конечное время, т. е. реализуется «взрывная» неустойчивость. Первоначально «прорыв» происходит в направлении $\theta = 0$ в момент времени $t = t_\infty(0)$. С увеличением времени расширяется сектор углов θ , охваченный таким «прорывом». На рис. 2 изображена форма УВ как функция безразмерного времени $\bar{t} = t/t_\infty(0)$ (линии 1—7 отвечают $\bar{t} = 0,5; 0,75; 0,95; 1,0; 1,1; 1,25; 1,5$), радиус-вектор $\bar{r}(\theta)$ взят в виде безразмерной величины $b(\gamma) [R(t, \theta) - R_0] H^{-1}$. Максимальное горизонтальное расстояние, пройденное УВ к моменту $t = t_\infty(0)$, оценивается соотношением $\max r = R_0 + 1,23H/b(\gamma)$ ($R > 1,5 H$, $b^{-1}(\gamma) \approx 5,7$). Значит, $\max r > 8,5 H$.

Горизонтальное расстояние в плоскости $\theta = \pi/2$, пройденное УВ к моменту $t = t_\infty(0)$ $r(\theta = \pi/2) = R_0 + Hb^{-1} > 7,2 H$. Для сравнения приведем оценку по данным [1]: $\max r \approx 2,04 H$. Если взять $a_0 \approx 400$ м/с, $H \approx 10^4$ м, $b^{-1} \approx 5,7$, то находим оценку параметра $t_\infty(0) \approx 2,4/M$ мин ($M_0 > 1$).

В области ухода ударного фронта на бесконечность нарушаются предположения о слабой зависимости полей от угла θ и условия применимости формул (10), (11). Из соотношений (10), (11) получается представление для эволюции скорости УВ

$$(12) \quad u(t, \theta) = (H/b(\gamma)) [t_\infty(0) - t \cos \theta]^{-1}, \quad M(t, \theta) = M_0 t_\infty(0) / (t_\infty(0) - t \cos \theta).$$

Учитывая (2), (10) и (12) при $M \gg 1$, имеем представления для полей v , p , ρ , a в УВ.

В качестве примера приведем выражения, описывающие давление:

$$p(R, \theta) = D_1(\theta) \exp \left[- (1 - 2b) \frac{R \cos \theta}{H} \right], \quad p(t, \theta) = D_2(\theta) \left[1 - \frac{t \cos \theta}{t_\infty(0)} \right]^{\frac{1-2b}{b}},$$

$$D_1(\theta) = \frac{1}{\gamma+1} 2M_0^2 a_0^2 \rho_0(0) \exp\left(-\frac{2bR_0}{H} \cos \theta\right),$$

$$D_2(\theta) = \frac{1}{\gamma+1} 2M_0^2 a_0^2 \rho_0(0) \exp\left(-\frac{R_0}{H} \cos \theta\right).$$

При $R \rightarrow \infty$ $p \rightarrow 0$ ($t \rightarrow t_\infty(\theta)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Компанеец А. С. Точечный взрыв в неоднородной атмосфере // ДАН СССР.— 1960.— Т. 130, вып. 5.
2. Андрианкин Э. П., Коган А. М. и др. Распространение сильного взрыва в неоднородной атмосфере // ПМТФ.— 1962.— № 6.
3. Hayes W. D. Self-similar strong shocks in an exponential medium // J. Fluid Mech.— 1968.— V. 32, pt 2. Рус. пер. Автомодельные сильные ударные волны в экспоненциальной среде // Сб. пер. Механика.— М., 1968.— № 6 (112).
4. Hayes W. D. The propagation upward of the shock wave from a strong explosion in the atmosphere // J. Fluid Mech.— 1968.— V. 32, pt. 2. Рус. пер. Распространение вверх ударной волны от сильного взрыва в атмосфере // Сб. пер. Механика.— М., 1968.— № 6 (112).
5. Laumbach D. D., Probst R. F. A point explosion in a cold exponential atmosphere // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 35, pt 1. Рус. пер. Точечный взрыв в холодной экспоненциальной атмосфере // Сб. пер. Механика.— М., 1969.— № 3 (115).
6. Броуд Г. Расчеты взрывов на ЭВМ.— М.: Мир, 1976.
7. Райзер Ю. П. Распространение ударной волны в неоднородной атмосфере в сторону уменьшения плотности // ПМТФ.— 1964.— № 4.
8. Grover R., Hardy J. W. The propagation of shocks in exponentially decreasing atmospheres // Astrophys. J.— 1966.— V. 143.— P. 48.
9. Whitham G. B. A new approach to problems of shock dynamics // J. Fluid Mech.— 1957.— V. 2.— P. 146.
10. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
11. Whitham G. B. On the propagation of shock waves through regions of nonuniform area of flow // J. Fluid Mech.— 1958.— V. 4.— P. 337.

Поступила 22/XII 1986 г.

УДК 532.529

СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН В ДВУХФАЗНЫХ СМЕСЯХ ГАЗА С КАПЛЯМИ ЖИДКОСТИ

Т. Р. Аманбаев, А. И. Ивандаев

(Чимкент, Тюмень)

При распространении ударной волны (УВ) в газовзвеси (смеси газа с большим количеством мелких частиц или капель) сильные скоростная и температурная неравновесности фаз приводят к формированию релаксационной зоны волны, где происходит обмен массой, импульсом и энергией между газовой и дисперсной фазами, который постепенно выравнивает скорости и температуры фаз. Релаксационная зона УВ в газовзвесах твердых инертных частиц рассчитывалась в [1]. Отмечалось, что основное влияние на зону релаксации обычно оказывает процесс межфазного трения, а процесс теплообмена влияет на нее в значительно меньшей степени. Влияние фазовых превращений (при отсутствии дробления капель) на структуру УВ в газокapельных смесях изучалось в [2].

В данной работе исследована структура УВ в парогaзoкапельных смесях при наличии процессов дробления (по механизму обдирки поверхностного слоя) капель и взаимопревращений фаз. Предложена математическая модель, описывающая течение газoкапельной смеси с учетом влияния сорванных (с поверхности крупных капель) мелких капель.

1. Основные допущения и уравнения. Для математического описания течений газoкапельных смесей используем основное допущение механики гетерогенных сред: расстояния, на которых параметры течения меняются существенно, много больше характерного размера капель. Дополнительно будем полагать, что капли несжимаемые и не сталкиваются; эффекты вязкости и теплопроводности существенны лишь в процессах взаимодействия фаз; дробление крупных капель имеет место при определенных условиях и происходит по механизму обдирки, при этом с поверхности круп-