УДК 539.3

В. Д. Бондарь

О КОНЕЧНЫХ ПЛОСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ НЕСЖИМАЕМОГО УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Многие резиноподобные материалы допускают конечные упругие деформации и при умеренных нагрузках могут считаться несжимаемыми. Плоское деформирование несжимаемого материала в рамках нелинейной теории упругости в различных аспектах изучалось рядом авторов. Например, в [1—4] рассмотрение производилось в различных координатах и при использовании разнообразных мер деформации и соответствующих им мер напряжений; наряду с точными решениями некоторых задач, полученными полуобратным методом, в качестве общего приема использовался метод последовательных приближений в сочетании с разложением по малому параметру.

Ниже плоская деформация несжимаемого материала исследуется в координатах деформированного состояния, мерами деформаций и напряжений служат тензоры Альманси и Коши. Устанавливаются уравнения в перемещениях (для начальных координат) и в напряжениях (в том числе и для функции Эри). Получены достаточные условия их эллиптичности. Для материала Муни рассмотрен вид и тип уравнения для функции Эри при нагрузках разной интенсивности и найдены два его точных решения, содержащие свободные параметры. В нелинейной постановке даны точные решения задач о нагружении криволинейного четырехугольника и эллиптического кольца специальными контурными нагрузками.

1. Известно [5], что равновесие однородного изотропного несжимаемого материала в нелинейной теории упругости в координатах деформированного состояния может быть описано уравнениями равновесия, условием несжимаемости, законом Мурнагана связи напряжений с деформациями, представлениями деформаций через перемещения и выражениями для инвариантов деформаций; к ним присоединяются краевые условия, которые можно считать заданными на границе деформированного тела:

$$\operatorname{div} P + \rho \mathbf{f} = 0,\ \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 = 0,\tag{1}$$

$$P = -qG + \rho(G - 2\varepsilon)\cdot\frac{\partial F_*}{\partial \varepsilon},\quad 2\varepsilon = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^* - \nabla\mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{u})^*,$$

$$\varepsilon_1 = \operatorname{tr}\varepsilon,\ 2\varepsilon_2 = (\operatorname{tr}\varepsilon)^2 - \operatorname{tr}\varepsilon^2,\ \varepsilon_3 = \det\varepsilon;$$

$$\mathbf{u}|_{\Sigma u} = \mathbf{h},\quad P\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma p} = \mathbf{p},$$

где ρ, q, F_* — плотность, гидростатическое давление и упругий потенциал; ε_1, ε_2, ε_3 — основные инварианты деформации; $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{p}$ — векторы перемещений, массовой силы, внешней нормали и граничных перемещений и напряжений; G, P, ε — метрический тензор и тензоры напряжений (Коши) и деформаций (Альманси); Σ_u, Σ_p — части поверхности тела, на которых заданы соответственно перемещения и напряжения.

Пусть материал подвержен действию потенциальных сил с энергией V и находится в условиях плоской деформации, тогда

$$\rho\mathbf{f} = -\nabla V,\ \varepsilon_3 = 0,\ F_* = F_*(\varepsilon_1)$$

и закон Мурнагана сводится к квазилинейной связи напряжений с деформациями

$$P = (F' - q)G - 2F'\varepsilon,\ F' = dF/d\varepsilon_1,\ F(\varepsilon_1) = \rho F_*(\varepsilon_1).$$

В этом случае основной является плоская задача упругости, соотношения которой выполняются в плоской деформированной области D, а краевые условия задаются на ее границе L. В декартовых координатах x, y деформированного состояния соотношения (1) для плоской задачи имеют вид

$$\frac{\partial(P_{xx} - V)}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(P_{yy} - V)}{\partial y} = 0,\tag{2}$$

$$\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy},\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xy}^2,$$

$$P_{xx} = -q + F'(1 - \varepsilon_{xx}),\ 1 - \varepsilon_{xx} = (1 - \partial u_x/\partial x)^2 + (\partial u_y/\partial x)^2,$$

$$P_{yy} = -q + F'(1 - \varepsilon_{yy}),\ 1 - \varepsilon_{yy} = (1 - \partial u_y/\partial y)^2 + (\partial u_x/\partial y)^2,$$

$$P_{xy} = -F'2\varepsilon_{xy},\ 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}\left(1 - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_y}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right),$$

$$u_x|_{L_u} = h_x(s),\ u_y|_{L_u} = h_y(s),$$

$$P_{xx}n_x + P_{xy}n_y|_{L_p} = p_x(s),\ P_{xy}n_x + P_{yy}n_y|_{L_p} = p_y(s)$$

(декартовы компоненты векторов и тензоров обозначены теми же символами, что и сами величины, но с индексами; L_u, L_p — части границы L, на которых заданы соответственно перемещения и напряжения, а s — дуга L).

2. При задании на границе области одних перемещений плоскую задачу удобно формулировать в перемещениях. Последняя получается путем исключения из (2) напряжений, деформаций и гидростатического давления и записывается в форме

$$(3)\quad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{F'\left[\left(1 - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2\right]\right\} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{F'\left[\frac{\partial u_x}{\partial y}\left(1 - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_y}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right]\right\} =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{F'\left[\left(1 - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\right]\right\} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{F'\left[\frac{\partial u_x}{\partial y}\left(1 - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_y}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right]\right\},$$

$$\left(1 - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\left(1 - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) - \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial x} = 1,\ F' = F'(\varepsilon_1),$$

$$u_x|_L = h_x(s),\ u_y|_L = h_y(s),$$

где инвариант ε_1, преобразованный с помощью условия несжимаемости, представляется выражением

$$2\varepsilon_1 = -(\partial u_x/\partial x - \partial u_y/\partial y)^2 - (\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x)^2.$$

Данные соотношения не содержат потенциальной энергии сил, и в них $\varepsilon_1 \leqslant 0$. Гидростатическое давление определяется из (2) в виде

$$(4)\quad q + V = \int_{M_0}^{M}\left(\frac{\partial(q+V)}{\partial x}dx + \frac{\partial(q+V)}{\partial y}dy\right) + d,\ d = \text{const},$$

где

$$(5)\quad \frac{\partial(q+V)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{F'\left[\left(1 - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2\right]\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{F'\left[\frac{\partial u_x}{\partial y}\left(1 - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_y}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right]\right\},$$

$$\frac{\partial(q+V)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{F'\left[\left(1 - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\right]\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{F'\left[\frac{\partial u_x}{\partial y}\left(1 - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_y}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right]\right\},$$

M_0 и M — точки области D. В силу (3) и (5) интеграл в (4) не зависит от пути интегрирования. Поле напряжений определяется формулами (2), (4).

Задачу (3), представленную в развернутом виде, можно несколько упростить, если перейти от перемещений к начальным координатам по формулам $u_x = x - \xi(x, y)$, $u_y = y - \eta(x, y)$, тогда она примет вид [6]

$$(6)\quad \sum_{k+l=3}\left(A_{kl}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^k\partial y^l} + B_{kl}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^k\partial y^l}\right) + T = 0,\quad \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} = 1,$$

$$\xi|_L = x(s) - h_x(s),\ \eta|_L = y(s) - h_y(s).$$

Здесь через T обозначены члены, содержащие низшие производные, а коэффициенты имеют значения

$$(7)\qquad A_{30} = -F'\frac{\partial\xi}{\partial y} + F''C\frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad A_{21} = [F' + F''(B-A)]\frac{\partial\xi}{\partial x} + F''C\frac{\partial\xi}{\partial y},$$

$$A_{03} = F'\frac{\partial\xi}{\partial x} - F''C\frac{\partial\xi}{\partial y}, \quad A_{12} = [-F' + F''(B-A)]\frac{\partial\xi}{\partial y} - F''C\frac{\partial\xi}{\partial x},$$

$$B_{30} = -F'\frac{\partial\eta}{\partial y} + F''C\frac{\partial\eta}{\partial x}, \quad B_{21} = [F' + F''(B-A)]\frac{\partial\eta}{\partial x} + F''C\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

$$B_{03} = F'\frac{\partial\eta}{\partial x} - F''C\frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad B_{12} = [-F' + F''(B-A)]\frac{\partial\eta}{\partial y} - F''C\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

$$A = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2, \quad B = \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2, \quad C = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Согласно [7], характеристический определитель системы (6) является полиномом четвертого порядка

$$(8)\ \Delta = \left(\sum_{k+l=3} A_{kl}\alpha^k\beta^l\right)\left(-\frac{\partial\xi}{\partial y}\alpha + \frac{\partial\xi}{\partial x}\beta\right) - \left(\sum_{k+l=3} B_{kl}\alpha^k\beta^l\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\alpha - \frac{\partial\eta}{\partial x}\beta\right) =$$

$$= F'(\alpha^2 + \beta^2)(B\alpha^2 - 2C\alpha\beta + A\beta^2) - F''[C(\alpha^2 - \beta^2) + (B-A)\alpha\beta]^2.$$

Среди величин A, B, C первые две, как это следует из (7) и условия несжимаемости (6), существенно положительны и связаны между собою условием $A > 0$, $B > 0$, $AB - C^2 = 1$, в силу чего положительно определенна квадратичная форма

$$(9)\qquad B\alpha^2 - 2C\alpha\beta + A\beta^2 > 0.$$

На основании (8) и (9) можно заключить, что

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\Delta > 0 \text{ при } F' > 0,\ F'' \leqslant 0,\\ &\Delta < 0 \text{ при } F' < 0,\ F'' \geqslant 0. \end{aligned}$$

При условиях на упругий потенциал (10) характеристическое уравнение $\Delta = 0$ не имеет вещественных корней, тем самым нелинейная система уравнений (6) эллиптическая на любом своем решении. Таким образом, (10) являются достаточными условиями эллиптичности уравнений плоской деформации несжимаемого упругого материала.

3. При задании на границе области одних напряжений задачу о плоской деформации удобно формулировать в напряжениях. Соотношения (1) для этой задачи в комплексных координатах деформированного состояния $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ будут

$$(11)\qquad \partial P^{11}/\partial z + \partial(P^{12} - 2V)/\partial\bar{z} = 0,$$

$$P^{11} = \overline{P^{22}} = -2F'\varepsilon^{11}, \ P^{12} = 2F'(1 - \varepsilon^{12}) - 2q,$$

$$\varepsilon^{11} = \overline{\varepsilon^{22}} = 2\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\left(1 - \frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right), \quad 1 - \varepsilon^{12} = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(1 - \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}}\right) - \frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z},$$

$$\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 = 0, \ \varepsilon_1 = \varepsilon^{12}, \ 4\varepsilon_2 = (\varepsilon^{12})^2 - \varepsilon^{11}\varepsilon^{22},$$

$$P^{12}\frac{dz}{ds} - P^{11}\frac{d\bar{z}}{ds}\bigg|_L = 2ip(s).$$

В (11) фигурируют контравариантные комплексные компоненты векторов и тензоров, связанные с их декартовыми компонентами формулами

$$u^1 = \overline{u^2} = u = u_x + iu_y, \ p^1 = \overline{p^2} = p = p_x + ip_y,$$

$$P^{11} = \overline{P^{22}} = P_{xx} - P_{yy} + 2iP_{xy}, \ P^{12} = P_{xx} + P_{yy},$$

$$\varepsilon^{11} = \overline{\varepsilon^{22}} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} + 2i\varepsilon_{xy}, \ \varepsilon^{12} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}.$$

Если исключим перемещения из выражений самих деформаций, первых и вторых производных от них по координатам и условия несжимаемости, представленного в формах

$$(12)\qquad (1-\varepsilon^{12})^2-\varepsilon^{11}\varepsilon^{22}=1,\quad \left(1-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(1-\frac{\partial\bar u}{\partial\bar z}\right)-\frac{\partial u}{\partial\bar z}\frac{\partial\bar u}{\partial z}=1,$$

то получим условие совместности деформаций несжимаемого материала нелинейной упругости

$$(13)\qquad 4(1+|\varepsilon^{11}|^2)\,\mathrm{Re}\left(\bar\varepsilon^{11}\frac{\partial^2\varepsilon^{11}}{\partial z\,\partial\bar z}+\sqrt{1+|\varepsilon^{11}|^2}\,\frac{\partial^2\varepsilon^{11}}{\partial z^2}\right)=$$
$$=2\mathrm{Re}\left[(\bar\varepsilon^{11})^2\frac{\partial\varepsilon^{11}}{\partial z}\frac{\partial\varepsilon^{11}}{\partial\bar z}\right]-\left|\frac{\partial\varepsilon^{11}}{\partial\bar z}\right|^2-(3+2|\varepsilon^{11}|^2)\left|\frac{\partial\varepsilon^{11}}{\partial z}\right|^2.$$

Из выражений основных инвариантов двумерного тензора напряжений и их комбинации через комплексные компоненты напряжений

$$(14)\qquad P_1=P^{12},\ 4P_2=(P^{12})^2-P^{11}P^{22},\ I=P_1{}^2-4P_2=P^{11}P^{22}$$

следует, что I также будет инвариантом. С помощью (11), (12) можно установить его связи с линейным инвариантом деформаций и с гидростатическим давлением:

$$I=4[F'(\varepsilon_1)]^2[(1-\varepsilon_1)^2-1],\quad P^{12}+2q=\sqrt{4[F'(\varepsilon_1)]^2+I}.$$

Легко видеть, что

$$(15)\qquad \text{при } dI/d\varepsilon_1\neq 0\quad \varepsilon_1=\varepsilon_1(I),\ 2q=\sqrt{4[F'(I)]^2+I}-P_1.$$

Из (11), (15) вытекает, что деформации представляются через напряжения по формулам, не содержащим гидростатического давления:

$$(16)\qquad \varepsilon^{11}=\overline{\varepsilon^{22}}=-P^{11}/2F'(I),\quad 1-\varepsilon^{12}=\sqrt{1+I/[2F'(I)]^2}.$$

Подстановка (16) в (13) дает уравнение совместности напряжений несжимаемого материала нелинейной упругости. Присоединив к нему уравнение равновесия и краевое условие (11), получаем задачу о плоской деформации несжимаемого материала в напряжениях в комплексных координатах деформированного состояния

$$(17)\qquad 4\left(1+\frac{|P^{11}|^2}{(2F')^2}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{P^{11}}}{2F'}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar z}\frac{P^{11}}{2F'}-\sqrt{1+\frac{|P^{11}|^2}{(2F')^2}}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{P^{11}}{2F'}\right)=$$
$$=2\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\overline{P^{11}}}{2F'}\right)^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{P^{11}}{2F'}\,\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{P^{11}}{2F'}\right]-\left|\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{P^{11}}{2F'}\right|^2-\left(3+2\frac{|P^{11}|^2}{(2F')^2}\right)\left|\frac{\partial}{\partial z}\frac{P^{11}}{2F'}\right|^2,$$
$$\frac{\partial P^{11}}{\partial z}+\frac{\partial(P^{12}-2V)}{\partial\bar z}=0,\quad P^{12}\frac{dz}{ds}-P^{11}\frac{d\bar z}{ds}\bigg|_L=2ip(s),$$

где $F'(I)$, а I определяется через напряжения формулой (14).

Если ввести в рассмотрение функцию Эри U, полагая

$$(18)\qquad P^{11}=\overline{P^{22}}=-4\partial^2U/\partial\bar z^2,\quad P^{12}=2V+4\partial^2U/\partial z\partial\bar z,$$

то (17) можно представить в виде краевой задачи для функции Эри: эта функция должна удовлетворять нелинейному уравнению четвертого порядка, а ее первые производные — принимать на границе области заданные значения

$$(19)\qquad 2S\,\mathrm{Re}\left[2\frac{1}{F'}\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar z}\left(\frac{1}{F'}\frac{\partial^2U}{\partial\bar z^2}\right)+\sqrt{S}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{F'}\frac{\partial^2U}{\partial\bar z^2}\right)\right]=$$
$$=8\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{F'}\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\right)^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{F'}\frac{\partial^2U}{\partial\bar z^2}\right)\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{1}{F'}\frac{\partial^2U}{\partial\bar z^2}\right)\right]-$$
$$-\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{F'}\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\right)\right|^2-(1+2S)\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{F'}\frac{\partial^2U}{\partial\bar z^2}\right)\right|^2,$$

$$2\frac{\partial U}{\partial \bar z}\bigg|_L = 2\left(\frac{\partial U}{\partial \bar z}\right)_0 + \int_0^s \left(ip - V\frac{dz}{ds}\right) ds,$$

$$S = 1 + \left(\frac{2}{F'}\right)^2 \left|\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right|^2, \quad F' = F'(I),\ I = 16\left|\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right|^2.$$

4. Рассмотрим материал Муни [3], в определенной мере отражающий поведение резиноподобных несжимаемых материалов при конечных деформациях и характеризуемый в случае плоской деформации упругим потенциалом с одной постоянной

$$F = -c\varepsilon_1,\ c = \mathrm{const} > 0,\ F' = -c,\ F'' = 0. \tag{20}$$

Для материала Муни задача (19) будет

$$2S_0 \operatorname{Re}\left(2\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\frac{\partial^4 U}{\partial z\, \partial \bar z^3} - \sqrt{S_0}\frac{\partial^4 U}{\partial z^2\, \partial \bar z^2}\right) = \tag{21}$$

$$= 8\operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)^2 \frac{\partial^3 U}{\partial z\, \partial \bar z^2}\frac{\partial^3 U}{\partial \bar z^3}\right] - c^2\left|\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}\right|^2 - (1 + 2S_0)\left|\frac{\partial^3 U}{\partial z\, \partial \bar z^2}\right|^2,$$

$$S_0 = c^2 + 4\left|\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right|^2, \quad 2\frac{\partial U}{\partial \bar z}\bigg|_L = 2\left(\frac{\partial U}{\partial \bar z}\right)_0 + \int_0^s \left(ip - V\frac{dz}{ds}\right) ds \equiv t(s).$$

Исследуем вид и тип уравнения для функции Эри при различных интенсивностях приложенных нагрузок. Обозначим через P_0 и $\sigma = P_0/c$ характерную нагрузку и безразмерное напряжение и положим $U_* = U/P_0$. Вводя эти величины в (21), имеем

$$2S_* \operatorname{Re}\left(2\sigma\frac{\partial^2 U_*}{\partial z^2}\frac{\partial^4 U_*}{\partial z\, \partial \bar z^3} - \sqrt{S_*}\frac{\partial^4 U_*}{\partial z^2\, \partial \bar z^2}\right) = -(1 + 2S_*)\left|\frac{\partial^3 U_*}{\partial z\, \partial \bar z^2}\right|^2 + \tag{22}$$

$$+ 8\sigma^3 \operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial^2 U_*}{\partial z^2}\right)^2 \frac{\partial^3 U_*}{\partial z\, \partial \bar z^2}\frac{\partial^3 U_*}{\partial \bar z^3}\right] - \sigma\left|\frac{\partial^3 U_*}{\partial z^3}\right|^2, \quad S_* = 1 + 4\sigma^2\left|\frac{\partial^2 U_*}{\partial z^2}\right|^2.$$

Будем различать следующие режимы нагруження: слабое при $P_0 \ll c$ ($\sigma \ll 1$), умеренное при $P_0 \sim c$ ($\sigma \sim 1$) и сильное при $P_0 \gg c$ ($\sigma \gg 1$).

При умеренном нагружении в (22) все члены примерно одного порядка, поэтому все их следует удерживать. Это уравнение определяет общую нелинейную модель. Уравнение (22) эллиптического типа, как и соответствующая ему система уравнений для начальных координат, для которой, ввиду (20), выполнены условия эллиптичности (10). Этот результат можно установить и непосредственно. В самом деле, представляя (22) в действительных переменных x, y

$$\Phi = 32\operatorname{Re}\left(\sqrt{1 + 4\sigma^2\left|\frac{\partial^2 U_*}{\partial z^2}\right|^2}\frac{\partial^4 U_*}{\partial z^2\, \partial \bar z^2} - 2\sigma\frac{\partial^2 U_*}{\partial z^2}\frac{\partial^4 U_*}{\partial z\, \partial \bar z^3}\right) + H =$$

$$= (E - M)\frac{\partial^4 U_*}{\partial x^4} - 2N\frac{\partial^4 U_*}{\partial x^3\, \partial y} + 2E\frac{\partial^4 U_*}{\partial x^2 \partial y^2} - 2N\frac{\partial^4 U_*}{\partial x\, \partial y^3} + (E + M)\frac{\partial^4 U_*}{\partial y^4} + H = 0,$$

$$E = \sqrt{1 + M^2 + N^2}, \quad M = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial^2 U_*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_*}{\partial y^2}\right), \quad N = \sigma\frac{\partial^2 U_*}{\partial x\, \partial y}$$

(через H обозначены члены с младшими производными), найдем, что его характеристическое уравнение на любом решении имеет только комплексные корни

$$\Delta_* = \sum_{m+n=4}\left(\partial\Phi/\partial\frac{\partial^4 U_*}{\partial x^m\, \partial y^n}\right)\alpha^m\beta^n = (1+k^2)[(E-M)k^2 + 2Nk + E + M] = 0, \tag{23}$$

$$k = -\alpha/\beta,\ k_{1,2} = \pm i,\ k_{3,4} = (-N \pm i)/(E - M).$$

При слабом иагружеиии в (22) будут малыми сравнительно с другими те члены, которые содержат безразмерное напряжение. Пренебрежение ими приводит к бигармоническому уравнению, определяющему линейную модель упругости

$$\Delta\Delta U_* = 16\partial^4 U_*/(\partial z^2 \partial \bar{z}^2). \tag{24}$$

Уравнение (24), как и (22), эллиптического типа: соответствующее ему характеристическое уравнение (следующее из (23) при $E = 1$, $M = N = 0$) имеет чисто мнимые корни

$$\Delta_* = (1 + k^2)^2 = 0, \quad k_{1,2} = \pm i, \quad k_{3,4} = \pm i.$$

Таким образом, линейная теория упругости вытекает из нелинейной упругости для материала Муни при характерных нагрузках, малых сравнительно с упругой постоянной материала.

Наконец, при сильном нагружении те члены в (22), которые содержат безразмерное напряжение, будут теперь большими сравнительно с остальными. Оставляя в уравнении только наибольшие члены, получим новое нелинейное уравнение четвертого порядка, определяющее специальную нелинейную модель упругости:

$$2\left|\frac{\partial^2 U_*}{\partial z^2}\right|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 U_*}{\partial z^2}\frac{\partial^4 U_*}{\partial z\,\partial \bar{z}^3} - \left|\frac{\partial^2 U_*}{\partial z^2}\right|\frac{\partial^4 U_*}{\partial z^2\,\partial \bar{z}^2}\right) = \operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial^2 U_*}{\partial z^2}\right)^2 \frac{\partial^3 U_*}{\partial z\,\partial \bar{z}^2}\frac{\partial^3 U_*}{\partial \bar{z}^3}\right] - \left|\frac{\partial^2 U_*}{\partial z^2}\right|^2\left|\frac{\partial^3 U_*}{\partial z\,\partial \bar{z}^2}\right|^2. \tag{25}$$

В отличие от (22) и (24) уравнение (25) составного типа: у его характеристического уравнения (следующего из (23) после пренебрежения малыми членами) два мнимых и два совпадающих вещественных корня

$$\Delta_* = (1 + k^2)\left[(E_0 - M_0)k^2 + 2N_0 k + E_0 + M_0\right] = 0,$$

$$k_{1,2} = \pm i, \; k_{3,4} = -N_0/(E_0 - M_0),$$

$$E_0 = \sqrt{M_0^2 + N_0^2}, \quad 2M_0 = \partial^2 U_*/\partial x^2 - \partial^2 U_*/\partial y^2, \quad N_0 = \partial^2 U_*/(\partial x\,\partial y).$$

Изменение типа уравнения для функции Эри при нагрузках, значительно превышающих упругую постоянную, отражает изменение механических свойств материала в этих условиях.

Вернемся к общему случаю и перейдем в уравнении (21) от переменных z, $\bar{z}$ к другим комплексным переменным τ, $\bar{\tau}$ с помощью аналитической функции $\tau = \tau(z)$, что эквивалентно переходу от декартовых координат x, y $(z = x + iy)$ к ортогональным криволинейным координатам λ, μ $(\tau = \lambda + i\mu)$ на той же плоскости. Для детерминанта преобразования и производной от логарифма детерминанта справедливы представления

$$Q(\tau, \bar{\tau}) = \frac{\partial(\tau, \bar{\tau})}{\partial(z, \bar{z})} = \tau_z \bar{\tau}_{\bar{z}} = \left(z_\tau \bar{z}_{\bar{\tau}}\right)^{-1}, \quad A(\tau) = \frac{\partial \ln Q}{\partial \tau} = -\frac{z_{\tau\tau}}{z_\tau}. \tag{26}$$

Преобразованную задачу (21) для функции $U(\tau, \bar{\tau})$ запишем в форме

$$2S\left\{2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{\tau}^2} + \bar{A}\frac{\partial U}{\partial \bar{\tau}}\right)\left(\frac{\partial^4 U}{\partial \tau^3\,\partial \bar{\tau}} + 3A\frac{\partial^3 U}{\partial \tau^2\,\partial \bar{\tau}} + (A' + 2A^2)\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\,\partial \bar{\tau}}\right)\right] + \left|\frac{\partial^3 U}{\partial \tau^2\,\partial \bar{\tau}} + A\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\,\partial \bar{\tau}}\right|^2 - \sqrt{S}\left(\frac{\partial^4 U}{\partial \tau^2\,\partial \bar{\tau}^2} + A\frac{\partial^3 U}{\partial \tau\,\partial \bar{\tau}^2} + \bar{A}\frac{\partial^3 U}{\partial \tau^2\,\partial \bar{\tau}} + A\bar{A}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\,\partial \bar{\tau}}\right)\right\} =$$

$$= 8\operatorname{Re}\left\{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{\tau}^2} + \bar{A}\frac{\partial U}{\partial \bar{\tau}}\right)^2\left(\frac{\partial^3 U}{\partial \tau^2\,\partial \bar{\tau}} + A\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\,\partial \bar{\tau}}\right)\left(\frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} + 3A\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + (A' + 2A^2)\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)\right\} - \frac{c^2}{Q^2}\left\{\left|\frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} + 3A\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + (A' + 2A^2)\frac{\partial U}{\partial \tau}\right|^2 + \left|\frac{\partial^3 U}{\partial \tau^2\,\partial \bar{\tau}} + A\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\,\partial \bar{\tau}}\right|^2\right\}, \tag{27}$$

$$S=\frac{c^2}{Q^2}+4\left|\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}+A\frac{\partial U}{\partial\tau}\right|^2,\quad 2\left.\frac{\partial U}{\partial\bar\tau}\right|_{L'}=t\left.\frac{d\bar z}{d\bar\tau}\right|_{L'}$$

(L' — преобразованный контур L).

Физические компоненты напряжений в координатах λ, μ, ввиду (18), выражаются через решения уравнения (27) по формулам [8]

$$(28)\qquad P_{\lambda\lambda}-P_{\mu\mu}+2iP_{\lambda\mu}=\frac{\bar z_{\bar\tau}}{z_\tau}P^{11}=-4Q\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\bar\tau^2}+\bar A\frac{\partial U}{\partial\bar\tau}\right),$$

$$P_{\lambda\lambda}+P_{\mu\mu}=P^{12}=2V+4Q\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial\bar\tau}.$$

Уравнение для функции Эри в форме (27) удобно использовать для нахождения классов точных решений путем выбора преобразования координат и отыскания U как функции, например, одной вещественной переменной, скажем, λ или μ, или их комбинации. По найденной функции Эри определяется поле напряжений, которое можно использовать для решения некоторых краевых задач с граничными условиями специального вида. Рассмотрим примеры.

5. Примем, что величина A, фигурирующая в (27), постоянна и что соответствующее преобразование координат и его детерминант имеют выражения

$$z=\exp(-A\tau),\ A=\mathrm{const},\ Q=(A\bar A)^{-1}\exp(A\tau+\bar A\bar\tau).$$

Из соотношений

$$(29)\qquad z=r\exp(i\theta),\ \tau=\lambda+i\mu,\ A=a+ib,$$

$$\lambda=-\frac{b\theta+a\ln r}{a^2+b^2},\quad \mu=-\frac{a\theta-b\ln r}{a^2+b^2}$$

следует, что кривые $\lambda=\mathrm{const}$, $\mu=\mathrm{const}$ образуют ортогональные семейства логарифмических спиралей.

Полагая объемные силы отсутствующими ($V=0$), ищем решение уравнения (27) вида

$$U=U(\xi),\ \xi=A\tau+\bar A\bar\tau=2(a\lambda-b\mu),$$

тогда функция Эри удовлетворяет уравнению

$$(30)\qquad 2S\{2(U''+U')(U^{\mathrm{IV}}+3U'''+2U'')+(U'''+U'')^2-$$
$$-\sqrt{S}(U^{\mathrm{IV}}+2U'''+U'')\}=8(U''+U')^2(U'''+U'')(U'''+$$
$$+3U''+2U')-c^2\exp(-2\xi)\{(U'''+3U''+2U')^2+(U'''+$$
$$+U'')^2\},\ S=c^2\exp(-2\xi)+4(U''+U')^2,$$

а компоненты напряжений (28) определяются выражениями

$$(31)\qquad P_{\lambda\lambda}-P_{\mu\mu}+2iP_{\lambda\mu}=-4(\exp\xi)(U''+U')\bar A^2/|A|^2,$$

$$P_{\lambda\lambda}+P_{\mu\mu}=4(\exp\xi)U''.$$

Уравнение (30) допускает полное интегрирование. Действительно, путем замены функции

$$(32)\qquad 2(U''+U')=c\exp(-\xi)\operatorname{sh}w$$

оно сводится к уравнению

$$w''=w'(w'+1)$$

и после интегрирования дает $\exp(-w) = h + g \exp \xi$, $h = \text{const}$, $g = \text{const}$. Возвращаясь к (32) и интегрируя, получаем

$$(33) \qquad 4(\exp \xi)(U'' + U') = c[(h + g\exp\xi)^{-1} - (h + g\exp\xi)],$$

$$4(\exp\xi)U' = c\{(h^{-1} - h)\xi - h^{-1}\ln|h + g\exp\xi| - (h + g\exp\xi) - f\},\ f = \text{const}.$$

Выражения (31) и (33) определяют поле напряжений, зависящее от свободных параметров g, h и f:

$$(34) \qquad P_{\lambda\lambda} = \frac{c}{2}\left\{f + (h - h^{-1})\xi + h^{-1}\ln|h + g\exp\xi| + \frac{1-m}{h + g\exp\xi} + m(h + g\exp\xi)\right\},$$

$$P_{\mu\mu} = \frac{c}{2}\left\{f + (h - h^{-1})\xi + h^{-1}\ln|h + g\exp\xi| + \frac{1+m}{h + g\exp\xi} - m(h + g\exp\xi)\right\},$$

$$P_{\lambda\mu} = nc\{(h + g\exp\xi)^{-1} - (h + g\exp\xi)\},$$

$$m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},\quad n = \frac{ab}{a^2 + b^2},\quad \xi = 2(a\lambda - b\mu).$$

Найденное поле напряжений можно использовать для решения ряда краевых задач. Рассмотрим, например, криволинейный четырехугольник, стороны которого — отрезки спиралей (29):

$$(35) \qquad \lambda = \lambda_-,\ \lambda = \lambda_+,\ \mu = \mu_-,\ \mu = \mu_+.$$

Граничные напряжения на сторонах четырехугольника, соответствующие напряжениям (34), имеют переменные нормальные и тангенциальные составляющие, определяемые выражениями

$$(36) \qquad \lambda = \lambda_\pm,\ \xi_+ = 2(a\lambda_\pm - b\mu),$$

$$(p_\lambda)_\pm = \frac{c}{2}\left\{f + (h - h^{-1})\xi_\pm + h^{-1}\ln|h + g\exp\xi_\pm| + \frac{1-m}{h + g\exp\xi_\pm} + m(h + g\exp\xi_+)\right\},$$

$$(p_\mu)_\pm = nc\{(h + g\exp\xi_+)^{-1} - (h + g\exp\xi_\mp)\};$$

$$\mu = \mu_\pm,\ \xi'_\pm = 2(a\lambda - b\mu_\pm),$$

$$(p_\mu)_\pm = \frac{c}{2}\left\{f + (h - h^{-1})\xi'_\pm + h^{-1}\ln|h + g\exp\xi'_\pm| + \frac{1+m}{h + g\exp\xi'_\pm} - m(h + g\exp\xi'_\pm)\right\},$$

$$(p_\lambda)_\pm = nc\{(h + g\exp\xi'_\pm)^{-1} - (h + g\exp\xi'_\pm)\}.$$

Формулы (34) дают точное решение задачи о равновесии четырехугольника (35) с краевыми условиями (36).

В частности, при $b = 0$ формулы (29) будут $\lambda = -(\ln r)/a$, $\mu = -\theta/a$. При этом кривые $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ образуют семейства концентрических окружностей и лучей. В формулах (34) $m = 1$, $n = 0$ и напряжения зависят только от одной координаты:

$$(37) \qquad P_{\lambda\lambda} = (c/2)\{f + (h - h^{-1})\xi + h^{-1}\ln|h + g\exp\xi| + h + g\exp\xi\},$$

$$P_{\mu\mu} = (c/2)\{f + (h - h^{-1})\xi + h^{-1}\ln|h + g\exp\xi| + 2(h + g\exp\xi)^{-1} - h - g\exp\xi\},$$

$$P_{\lambda\mu} = 0,\ \xi = 2a\lambda.$$

Четырехугольник (35) в этом случае ограничен отрезками окружностей и лучей и нагружен только нормальными нагрузками, постоянными на криволинейных и переменными на прямолинейных участках:

$$\begin{gathered}\lambda = \lambda_\pm,\ \xi_\pm = 2a\lambda_\pm,\ (p_\mu)_\pm = 0,\\ (p_\lambda)_\pm = (c/2)\{f + (h - h^{-1})\xi_\pm + h^{-1}\ln|h + g\exp\xi_\pm| +\\ + h + g\exp\xi_+\};\\ \mu = \mu_\pm,\ \xi = 2a\lambda,\ (p_\lambda)_\pm = 0,\\ (p_\mu)_\pm = (c/2)\{f + (h - h^{-1})\xi + h^{-1}\ln|h + g\exp\xi| +\\ + 2(h + g\exp\xi)^{-1} - h - g\exp\xi\}.\end{gathered} \tag{38}$$

Формулы (37) решают задачу о равновесии части кругового кольца, ограниченного двумя радиусами, при граничных нагрузках (38).

6. Пусть преобразование координат имеет вид

$$\begin{gathered}z = a\,\mathrm{ch}\,\tau,\ a = \bar{a} = \mathrm{const},\ z = x + iy,\ \tau = \lambda + i\mu,\\ x = a\,\mathrm{ch}\,\lambda\cos\mu,\ y = a\,\mathrm{sh}\,\lambda\sin\mu,\\ x^2/(a\,\mathrm{ch}\,\lambda)^2 + y^2/(a\,\mathrm{sh}\,\lambda)^2 = 1,\ x^2/(a\cos\mu)^2 - y^2/(a\sin\mu)^2 = 1.\end{gathered}$$

Отсюда ясно, что кривые $\lambda = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$ образуют ортогональные семейства эллипсов и гипербол. Величины (26) равны

$$Q = 1/(a^2\,\mathrm{sh}\,\tau\,\mathrm{sh}\,\bar{\tau}),\ A = -\mathrm{ch}\,\tau/\mathrm{sh}\,\tau.$$

Ищем решение уравнения (27) типа

$$U = U(\eta),\ \eta = \mathrm{ch}\,\tau + \mathrm{ch}\,\bar{\tau} = 2\,\mathrm{ch}\,\lambda\cos\mu,$$

при этом само уравнение и напряжения (28) при отсутствии объемных сил соответственно будут

$$\begin{gathered}[c^2a^4 + 4(U'')^2]U^{\mathrm{IV}} = 2(U''')^2(2U'' + \sqrt{c^2a^4 + 4(U'')^2}),\\ P_{\lambda\lambda} - P_{\mu\mu} + 2iP_{\lambda\mu} = -\frac{4U''}{a^2}\frac{\mathrm{sh}^2\,\bar{\tau}}{\mathrm{sh}\,\tau\,\mathrm{sh}\,\bar{\tau}},\quad P_{\lambda\lambda} + P_{\mu\mu} = \frac{4U''}{a^2}.\end{gathered} \tag{39}$$

Двукратное интегрирование этого уравнения дает

$$\begin{gathered}4U'' = ca^2[g\eta + h - (g\eta + h)^{-1}],\\ g = \mathrm{const},\ h = \mathrm{const},\ \eta = 2\mathrm{ch}\,\lambda\cos\mu.\end{gathered} \tag{40}$$

Формулы (39) и (40) определяют поле напряжений, содержащее свободные параметры g и h:

$$\begin{gathered}P_{\lambda\lambda} = \frac{c}{2}\left[g\eta + h - (g\eta + h)^{-1}\right]\frac{(1 + \mathrm{ch}\,2\lambda)(1 - \cos 2\mu)}{\mathrm{ch}\,2\lambda - \cos 2\mu},\\ P_{\mu\mu} = -\frac{c}{2}\left[g\eta + h - (g\eta + h)^{-1}\right]\frac{(1 - \mathrm{ch}\,2\lambda)(1 + \cos 2\mu)}{\mathrm{ch}\,2\lambda - \cos 2\mu},\\ P_{\lambda\mu} = \frac{c}{2}\left[g\eta + h - (g\eta + h)^{-1}\right]\frac{\mathrm{sh}\,2\lambda\sin 2\mu}{\mathrm{ch}\,2\lambda - \cos 2\mu}.\end{gathered} \tag{41}$$

В частности, на границах эллиптического кольца $\lambda_- \leqslant \lambda \leqslant \lambda_+$ напряжения имеют значения

$$\begin{gathered}\text{при } \lambda = \lambda_\pm\ \ \eta_\pm = 2\,\mathrm{ch}\,\lambda_\pm\cos\mu,\\ (p_\lambda)_\pm = \frac{c}{2}\left[g\eta_\pm + h - (g\eta_\pm + h)^{-1}\right]\frac{(1 + \mathrm{ch}\,2\lambda_\pm)(1 - \cos 2\mu)}{\mathrm{ch}\,2\lambda_\pm - \cos 2\mu},\\ (p_\mu)_\pm = \frac{c}{2}\left[g\eta_\pm + h - (g\eta_\pm + h)^{-1}\right]\frac{\mathrm{sh}\,2\lambda_\pm\sin 2\mu}{\mathrm{ch}\,2\lambda_\pm - \cos 2\mu},\end{gathered} \tag{42}$$

при этом разрывающее усилие на граничных контурах определяется выражениями

$$(43)\qquad (P_{\mu\mu})_\pm = -\frac{c}{2}\left[g\eta_\pm + h - (g\eta_\pm + h)^{-1}\right]\frac{(1-\operatorname{ch}2\lambda_\pm)(1+\cos 2\mu)}{\operatorname{ch}2\lambda_\pm - \cos 2\mu}.$$

Формулы (41), (42) дают решение задачи о равновесии эллиптического кольца под действием периодических контурных нагрузок. В частности, при $\lambda_- = 0$ внутренний контур становится отрезком оси абсцисс $-a \leqslant x \leqslant a$, а рассматриваемая задача — задачей о нагружении эллиптической области с прямолинейным разрезом. Краевые условия на разрезе упрощаются:

$$\lambda_- = 0,\ (p_\lambda)_-^0 = c[2g\cos\mu + h - (2g\cos\mu + h)^{-1}],\ (p_\mu)_-^0 = 0,$$

т. е. разрез нагружен только нормальной нагрузкой. Разрывающее усилие (43) на разрезе принимает значения

$$(44)\qquad \begin{aligned} &\text{при } \mu \neq 0;\ \pi \quad \lambda_- = 0,\ (P_{\mu\mu})_-^0 = 0,\\ &\text{при } \mu = 0 \quad \lambda_- = 0,\ (P_{\mu\mu})_-^0 = c[h + 2g - (h+2g)^{-1}],\\ &\text{при } \mu = \pi \quad \lambda_- = 0,\ (P_{\mu\mu})_-^0 = c[h - 2g - (h-2g)^{-1}], \end{aligned}$$

т. е. оно равно нулю на всем разрезе, кроме его концов, в концах же разреза (при $h \pm 2g \neq 0$) оно ограничено и различно. Легко видеть, что при $g = 0$ контурная нагрузка (42) симметрична (на разрезе — постоянна), соответственно равны и конечны разрывающие усилия (44) в концах разреза.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Толоконников Л. А.** Плоская деформация несжимаемого материала // ДАН СССР.— 1958.— Т. 119, № 6.
2. **Громов В. Г., Толоконников Л. А.** К вычислению приближений в задаче о конечных плоских деформациях несжимаемого материала // Изв. АН СССР. ОТН.— 1963.— № 2.
3. **Грин А. Е., Адкинс Дж. Е.** Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды.— М.: Мир, 1965.
4. **Черных К. Ф.** Обобщенная плоская деформация в нелинейной теории упругости // Прикл. механика.— 1977.— Т. 13, № 1.
5. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды.— М.: Физматгиз, 1962.
6. **Бондарь В. Д.** Статическая задача нелинейной упругости при плоской деформации несжимаемого материала // Динамика сплошной среды/ИГ СО АН СССР.— 1983.— Вып. 61.
7. **Петровский И. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными.— М.: Физматгиз, 1961.
8. **Снеддон И. Н., Берри П. С.** Классическая теория упругости.— М.: ГИФМЛ, 1961.

г. Новосибирск *Поступила 15/VI 1989 г.*

УДК 535.417

С. Л. Золотухин, В. К. Косенюк

РАСШИФРОВКА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННО-ОПТИЧЕСКИХ КАРТИН МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

При экспериментальном исследовании плоских задач механики деформируемого твердого тела методами муара [1—3] или голографической интерферометрии с использованием накладных интерферометров [4] получаемая информация представляется в виде картин интерференционно-оптических полос. Путем расшифровки этих экспериментальных картин определяются поля напряжений и деформаций в исследуемой области.