УДК 532.511+517.95

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ Л. В. ОВСЯННИКОВА О ДВУМЕРНЫХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА

Ю. В. Шанько

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия
E-mail: shy70@mail.ru

Исследуется переопределенная система уравнений в частных производных, описывающая двумерные изотермические движения политропного газа. Система приведена к пассивному виду и полностью проинтегрирована. Полученные решения интерпретируются как течения идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью или движущейся твердой стенкой.

Ключевые слова: изотермические движения газа, тепловые движения газа, течения идеальной жидкости со свободной границей, переопределенные системы, точные решения.

DOI: 10.15372/PMTF20170601

Введение. Рассмотрим переопределенную систему уравнений

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + vu_y + p_x = 0, \qquad v_t + uv_x + vv_y + p_y = 0, \\ u_x + v_y = 0, \qquad p_t + up_x + vp_y = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где t — время; x, y — пространственные координаты; u, v — компоненты вектора скорости; p — отклонение давления от заданной величины p_0.

Система (1) является двумерным аналогом общей трехмерной системы, исследование на совместность которой проводилось в работе Л. В. Овсянникова [1]. Данная система описывает так называемые тепловые (с постоянной плотностью) движения политропного газа. К этой системе также сводятся изотермические (с постоянной скоростью звука) движения газа при показателе адиабаты, не равном единице.

Анализ системы (1) удобно выполнять в специальных лагранжевых координатах [2]. В качестве лагранжевой переменной η выбирается давление ($\eta = p$), вторая переменная ξ задается таким образом, чтобы якобиан перехода от x, y к ξ, η был равен единице. Следует отметить, что из этого условия переменная ξ определяется неоднозначно. Полученная система состоит из линейных уравнений

$$x_\xi = -y_{tt}, \qquad y_\xi = x_{tt} \tag{2}$$

и нелинейного уравнения

$$x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1. \tag{3}$$

Заметим, что данный переход к лагранжевым координатам осуществим только при условии $p \neq \mathrm{const}$. Движения газа при $p = \mathrm{const}$ рассматривались в работе [3].

Система, эквивалентная (1), изучалась в работе [4], согласно которой данная система имеет только два класса решений (исключая тривиальные). Однако, представив решение линейного уравнения в виде суммы (не указано, конечной или бесконечной) экспонент и полинома второй степени по t, автор [4] не показал, что эта формула задает общее решение данного уравнения. В работе [2] показано, что общее решение системы (2), (3) не может зависеть от произвольной функции двух переменных и содержит не более четырех произвольных функций одной переменной. О решении задачи Л. В. Овсянникова в двумерном случае независимо заявлено в [5, 6]. В работе С. В. Хабирова [7] строится общее решение аналога системы (2), (3). Следует отметить, что теорема 2 в работе [7] неверна, контрпример к ней построен в п. **4** настоящей работы. Поэтому утверждение автора [7], что полученные в его работе формулы задают общее решение (2), (3), осталось недоказанным. Кроме того, приведенный в работе [7] список точных решений не является полным.

1. Приведение системы к пассивному виду. Рассмотрим систему (1), все функции в которой считаются локально дифференцируемыми необходимое количество раз. Большой объем вычислений проводился с помощью пакета программ компьютерной алгебры REDUCE [8]. Под совместностью системы уравнений будем понимать наличие у нее непустого множества решений.

Введя комплекснозначную функцию $z = x + iy$, систему (2), (3) запишем следующим образом:

$$z_\xi = i z_{tt}; \tag{4}$$

$$(i/2)(z_\xi \bar z_\eta - \bar z_\xi z_\eta) = 1 \tag{5}$$

(черта обозначает комплексное сопряжение).

Приведем систему (4), (5) к пассивному виду [9].

Сначала для удобства вместо системы (4), (5) будем рассматривать векторную систему, являющуюся ее следствием. Введем в двумерном векторном пространстве билинейную кососимметричную форму. Для векторов $\boldsymbol a = (a^1, a^2)$, $\boldsymbol b = (b^1, b^2)$ положим $\boldsymbol a \vee \boldsymbol b = a^1 b^2 - a^2 b^1$. Из (4), (5) следует, что вектор $\boldsymbol z = (z^1, z^2) = (z_\xi, z_\eta)$ удовлетворяет уравнениям

$$\boldsymbol z_\xi = i \boldsymbol z_{tt}; \tag{6}$$

$$(i/2)\, \boldsymbol z \vee \bar{\boldsymbol z} = 1. \tag{7}$$

Положим

$$\alpha = (i/2)\, \boldsymbol z \vee \bar{\boldsymbol z}, \quad \beta = (1/2)\,(\boldsymbol z_t \vee \bar{\boldsymbol z} - \boldsymbol z \vee \bar{\boldsymbol z}_t), \quad \gamma = -(i/2)(\boldsymbol z_{tt} \vee \bar{\boldsymbol z} - 2\boldsymbol z_t \vee \bar{\boldsymbol z}_t + \boldsymbol z \vee \bar{\boldsymbol z}_{tt}),$$
$$\delta = -(1/2)(\boldsymbol z_{ttt} \vee \bar{\boldsymbol z} - 3\,\boldsymbol z_{tt} \vee \bar{\boldsymbol z}_t + 3\,\boldsymbol z_t \vee \bar{\boldsymbol z}_{tt} - \boldsymbol z \vee \bar{\boldsymbol z}_{ttt}),$$
$$\varepsilon = (i/2)(\boldsymbol z_{tttt} \vee \bar{\boldsymbol z} - 4\,\boldsymbol z_{ttt} \vee \bar{\boldsymbol z}_t + 6\,\boldsymbol z_{tt} \vee \bar{\boldsymbol z}_{tt} - 4\,\boldsymbol z_t \vee \bar{\boldsymbol z}_{ttt} + \boldsymbol z \vee \bar{\boldsymbol z}_{tttt}).$$

Функции α, β, γ, δ, ε выбраны таким образом, что они являются вещественными и в силу уравнения (6) справедливы соотношения

$$\alpha_\xi + \beta_t = \beta_\xi + \gamma_t = \gamma_\xi + \delta_t = \delta_\xi + \varepsilon_t = 0. \tag{8}$$

Лемма 1. *Положим*

$$\Delta_1 = -4(\alpha\alpha_{tt} - \alpha_t^2 + \alpha\gamma - \beta^2), \qquad \Delta_2 = 2(\alpha\alpha_{ttt} - \alpha_t\alpha_{tt} + \alpha\gamma_t + \gamma\alpha_t - 2\beta\beta_t),$$
$$\Delta_3 = 2(\beta\alpha_{tt} - 2\alpha_t\beta_t + \alpha\beta_{tt} + \alpha\delta - \beta\gamma), \qquad \Delta_4 = -\alpha_t\alpha_{ttt} + \alpha_{tt}^2 - \alpha_t\gamma_t + \beta\beta_{tt} + \beta\delta - \gamma^2,$$

$$\Delta_5 = -\beta\alpha_{ttt} + 2\beta_t\alpha_{tt} - \alpha_t\beta_{tt} - \alpha_t\delta + 2\gamma\beta_t - \beta\gamma_t.$$

Тогда справедливо тождество

$$\Delta_1 \boldsymbol{z}_{tt} + (\Delta_2 + i\Delta_3)\boldsymbol{z}_t + (\Delta_4 + i\Delta_5)\boldsymbol{z} = 0. \tag{9}$$

Кроме того, неравенство $\Delta_1 \neq 0$ *эквивалентно условию*

$$\boldsymbol{z}_t \vee \boldsymbol{z} \neq 0. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ z^1_{tt} & z^1_t & iz^1_t & z^1 & iz^1 \\ z^2_{tt} & z^2_t & iz^2_t & z^2 & iz^2 \\ \bar z^1_{tt} & \bar z^1_t & -i\bar z^1_t & \bar z^1 & -i\bar z^1 \\ \bar z^2_{tt} & \bar z^2_t & -i\bar z^2_t & \bar z^2 & -i\bar z^2 \end{vmatrix}.$$

Раскроем Δ по первой строке. Функции Δ_j выбраны таким образом, что они равны соответствующим алгебраическим дополнениям (это можно проверить путем непосредственного вычисления). Получаем тождество

$$\Delta = \Delta_1 m_1 + \Delta_2 m_2 + \Delta_3 m_3 + \Delta_4 m_4 + \Delta_5 m_5.$$

Если в определитель Δ вместо первой строки подставить вторую или третью, то он, очевидно, станет равным нулю. Получаем соотношения

$$\Delta_1 z^j_{tt} + (\Delta_2 + i\Delta_3) z^j_t + (\Delta_4 + i\Delta_5) z^j = 0,$$

из которых следует первое утверждение леммы 1. Второе утверждение леммы 1 следует из равенств

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} z^1_t & iz^1_t & z^1 & iz^1 \\ z^2_t & iz^2_t & z^2 & iz^2 \\ \bar z^1_t & -i\bar z^1_t & \bar z^1 & -i\bar z^1 \\ \bar z^2_t & -i\bar z^2_t & \bar z^2 & -i\bar z^2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} z^1_t & z^1 \\ z^2_t & z^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar z^1_t & \bar z^1 \\ \bar z^2_t & \bar z^2 \end{vmatrix} = 4(\boldsymbol{z}_t \vee \boldsymbol{z})(\,\overline{\boldsymbol{z}_t \vee \boldsymbol{z}}\,).$$

Из леммы 1 следует, что при выполнении условия (10) и заданных функциях Δ_j вектор-функция $\boldsymbol{z}$ удовлетворяет линейному уравнению второго порядка

$$\boldsymbol{z}_{tt} = 2iK\boldsymbol{z} + T\boldsymbol{z} \tag{11}$$

с коэффициентами $K = (i\Delta_2 - \Delta_3)/(2\Delta_1)$, $T = (-\Delta_4 - i\Delta_5)/\Delta_1$.

Рассмотрим случай, когда условие (10) не выполняется, т. е. $\boldsymbol{z}_t \vee \boldsymbol{z} = 0$. Это означает, что векторы $\boldsymbol{z}_t$, $\boldsymbol{z}$ линейно зависимы:

$$\boldsymbol{z}_t = S\boldsymbol{z} \tag{12}$$

($S = S(t, \xi, \eta)$ — некоторая комплекснозначная функция).

Лемма 2. *Для совместности системы уравнений* (6), (7), (12) *необходимо выполнение условий* $S + \bar S = S_t = S_\xi = 0$.

Доказательство. Продифференцируем (7) по t с учетом уравнения (12):

$$-(1/4)(S + \bar S)\,\boldsymbol{z} \vee \bar{\boldsymbol{z}} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\bar S = -S. \tag{13}$$

Подставляя $\boldsymbol{z}_t$ из (12) в уравнение (6), получаем

$$\boldsymbol{z}_\xi = i(S_t + S^2)\boldsymbol{z}. \tag{14}$$

Из условия совместности уравнений (12), (14) следует

$$S_\xi = i(S_t + S^2)_t. \tag{15}$$

Продифференцируем (7) по ξ с учетом уравнения (14):

$$(1/2)(\bar{S}_t + \bar{S}^2 - S_t - S^2)\,\boldsymbol{z} \vee \bar{\boldsymbol{z}} = 0.$$

Отсюда с учетом (13) получаем $S_t = 0$, тогда из уравнения (15) следует, что $S_\xi = 0$.

Из леммы 2 следует, что $S = iN$, где $N(\eta)$ — некоторая вещественная функция. С учетом (4) уравнение (12) представим в координатах:

$$z_{ttt} = iNz_{tt}; \tag{16}$$

$$z_{t\eta} = iNz_\eta. \tag{17}$$

Записывая условие совместности данной системы, получаем $N_\eta = 0$, т. е. $N = \mathrm{const}$. Далее показано, что (16), (17) можно рассматривать как частный случай некоторых более общих уравнений.

Рассмотрим случай $\boldsymbol{z}_t \vee \boldsymbol{z} \neq 0$.

Лемма 3. *Справедливо тождество*

$$\begin{aligned}\Omega = (\alpha_{tttt} + 2\gamma_{tt} + \varepsilon)(\beta^2 - \alpha(\gamma + \alpha_{tt}) + \alpha_t^2) + (\alpha_{tt} + \gamma)(4\beta_t^2 + (\alpha_{tt} - \gamma)^2) +\\ + \alpha(\beta_{tt} + \delta)^2 + \alpha(\alpha_{ttt} + \gamma_t)^2 + 2(\beta_{tt} + \delta)(\alpha_{tt}\beta - 2\alpha_t\beta_t - \beta\gamma) +\\ + 2(\alpha_{ttt} + \gamma_t)(\alpha_t\gamma - \alpha_{tt}\alpha_t - 2\beta_t\beta) = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство. Путем непосредственного вычисления можно проверить справедливость равенств

$$\Omega = 8i\begin{vmatrix} -2i\alpha & -\beta - i\alpha_t & i(\gamma - \alpha_{tt})/2 - \beta_t \\ \beta - i\alpha_t & -i(\gamma + \alpha_{tt})/2 & -i(\gamma + \alpha_{tt})_t/4 - (\delta + \beta_{tt})/4 \\ i(\gamma - \alpha_{tt})/2 + \beta_t & -i(\gamma + \alpha_{tt})_t/4 + (\delta + \beta_{tt})/4 & -i(\alpha_{tttt} + 2\gamma_{tt} + \varepsilon)/8 \end{vmatrix} =$$

$$= 8i\begin{vmatrix} \boldsymbol{z} \vee \bar{\boldsymbol{z}} & \boldsymbol{z} \vee \bar{\boldsymbol{z}}_t & \boldsymbol{z} \vee \bar{\boldsymbol{z}}_{tt} \\ \boldsymbol{z}_t \vee \bar{\boldsymbol{z}} & \boldsymbol{z}_t \vee \bar{\boldsymbol{z}}_t & \boldsymbol{z}_t \vee \bar{\boldsymbol{z}}_{tt} \\ \boldsymbol{z}_{tt} \vee \bar{\boldsymbol{z}} & \boldsymbol{z}_{tt} \vee \bar{\boldsymbol{z}}_t & \boldsymbol{z}_{tt} \vee \bar{\boldsymbol{z}}_{tt} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель равен нулю, поскольку каждый его столбец является линейной комбинацией двух столбцов (z^1, z_t^1, z_{tt}^1) и (z^2, z_t^2, z_{tt}^2).

Из уравнения (7) следует $\alpha = 1$. Тогда, дифференцируя уравнения (8) необходимое количество раз по t, получаем

$$\beta_t = \gamma_{tt} = \delta_{ttt} = \varepsilon_{tttt} = 0. \tag{19}$$

Подставляя соотношения (19) в (18), находим

$$(\beta^2 - \gamma)\varepsilon + \delta^2 + \gamma_t^2 - 2\beta\gamma\delta + \gamma^3 = 0. \tag{20}$$

Лемма 4. *Если выполнены уравнения* (19), (20), *то* $\gamma_t = 0$.

Доказательство. Обозначим $\gamma_t = \mu$. Функция γ линейна по t, поэтому μ не зависит от t. Предположим, что $\gamma_t = \mu \neq 0$, тогда существуют такие ξ_0, η_0, что $\mu(\xi_0, \eta_0) \neq 0$. Выберем t_0, такое что $\gamma(t_0, \xi_0, \eta_0) = \beta^2(\xi_0, \eta_0)$. Рассмотрим уравнение (20) в точке (t_0, ξ_0, η_0):

$$\mu^2(\xi_0, \eta_0) + (\beta^3(\xi_0, \eta_0) - \delta(t_0, \xi_0, \eta_0))^2 = 0.$$

Функции μ, β, δ являются вещественными, поэтому $\mu(\xi_0, \eta_0) = 0$. Имеет место противоречие.

Из леммы 4 и одного из уравнений (8), а именно $\gamma_\xi + \delta_t = 0$, следует, что $\delta_{tt} = 0$. Значит, вместо (19) можно записать следующие соотношения:

$$\beta_t = \gamma_t = \delta_{tt} = 0. \tag{21}$$

Используя (21), для коэффициентов K, T из уравнения (11) запишем формулы в виде

$$K = \frac{\delta - \beta\gamma}{4(\gamma - \beta^2)}, \qquad T = \frac{\beta\delta - \gamma^2}{4(\gamma - \beta^2)}.$$

Согласно предположению $\boldsymbol{z}_t \vee \boldsymbol{z} \neq 0$, тогда из леммы 1 следует, что $\Delta_1 \neq 0$, а значит,

$$\gamma - \beta^2 \neq 0. \tag{22}$$

Из леммы 1 также следует, что $\boldsymbol{z}$ удовлетворяет уравнению второго порядка (11). Перейдем от векторной записи уравнений к скалярной. Положим $\boldsymbol{z} = (z_\xi, z_\eta)$ и с учетом (4) заменим в полученных уравнениях производные z_ξ. Уравнения (9), (5) и условие (10) принимают вид

$$z_{tttt} = 2iKz_{ttt} + Tz_{tt}; \tag{23}$$

$$z_{tt\eta} = 2iKz_{t\eta} + Tz_\eta; \tag{24}$$

$$-(z_{tt}\bar{z}_\eta + \bar{z}_{tt}z_\eta)/2 = 1; \tag{25}$$

$$z_{ttt}z_\eta - z_{tt}z_{t\eta} \neq 0. \tag{26}$$

Лемма 5. *При выполнении условия* (22) *система, состоящая из уравнений* (23)–(25), *может быть совместна только при* $\delta_t = 0$.

Доказательство. Введем следующие обозначения: $c = \gamma - \beta^2$, $d = (\delta - 2\beta\gamma + \beta^3)/c^2$, $f = \beta\beta_\eta d_t - cd_{t\eta}$, $g = dd_{t\eta} - d_t d_\eta$, $h = 2\beta cd - \beta^2 - 3c$, $w = ic^2 d_t z_\eta - c_\eta z_{tt}$.

Из уравнений (21) следует, что $c_t = d_{tt} = f_t = g_t = 0$. Из условия (22) получаем $c \neq 0$. Положим $d_t = \delta_t/c^2 \neq 0$ и покажем, что в данном случае рассматриваемая система уравнений не имеет решений. Записав уравнения (23), (24) в новых обозначениях:

$$z_{tttt} = \frac{i}{2}\,(d + \beta)z_{ttt} + \frac{c}{4}\,(\beta d - 1)z_{tt}; \tag{27}$$

$$z_{tt\eta} = \frac{i}{2}\,(d + \beta)z_{t\eta} + \frac{c}{4}\,(\beta d - 1)z_\eta, \tag{28}$$

приведем условие их совместности:

$$2idw_t + (\beta d - 1)w - 2i(\beta_\eta + d_\eta c)z_{ttt} - c(\beta d)_\eta z_{tt} = 0. \tag{29}$$

В силу (27), (28) функция w удовлетворяет уравнению

$$w_{tt} = \frac{i}{2}\,(d + \beta)w_t + \frac{c}{4}\,(\beta d - 1)w. \tag{30}$$

Продифференцировав (29) по t с учетом (27), (30), получаем

$$2(2id_t - cd^2 - 1)w_t + (2\beta d_t + icd(\beta d - 1))w + \\ + 2(\beta\beta_\eta + c^2 dd_\eta - 2icd_{t\eta})z_{ttt} - c(2(\beta d_t)_\eta + i(\beta_\eta + cd_\eta)(\beta d - 1))z_{tt} = 0. \tag{31}$$

Выполнив дифференцирование еще два раза, получаем два линейных дифференциальных уравнения относительно функций z и w, которые вместе с (29), (31) образуют систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно z_{ttt}, z_{tt}, w_t, w. Данная система должна иметь нетривиальное решение, так как равенство $z_{tt} = 0$ противоречит (25). Следовательно, определитель системы должен быть равен нулю. Приравнивая к нулю вещественную и мнимую части определителя, получаем

$$\beta_\eta^2 d_t^2(36d_t^2c^2 + h^2) + c\beta_\eta g d_t(c^2d^2h - ch - h^2 - 12d_t^2c^2) -$$
$$- 2cdfh\beta_\eta d_t + c^4g^2 + f(f + \beta cg)(h - c) + c^3fgd(2 - \beta d) = 0; \qquad (32)$$

$$3c^3d_t\beta_\eta gd^2 - 2c(3\beta_\eta fd_t + 2\beta_\eta gd_t\beta c + fgc)d +$$
$$+ 4f^2 - 2\beta_\eta fd_t\beta + 3\beta_\eta gd_tc^2 + 3fg\beta c - g^2c^3 = 0. \qquad (33)$$

Левая часть уравнения (33) представляет собой многочлен второй степени относительно d. Несложно проверить, что коэффициенты многочлена не зависят от t, а d существенно зависит от t, поскольку согласно предположению $d_t \ne 0$. Приравнивая эти коэффициенты к нулю, получаем

$$\beta_\eta g = 0; \qquad (34)$$

$$3\beta_\eta fd_t + 2\beta_\eta gd_t\beta c + fgc = 0; \qquad (35)$$

$$4f^2 - 2\beta_\eta fd_t\beta + 3\beta_\eta gd_tc^2 + 3fg\beta c - g^2c^3 = 0. \qquad (36)$$

Покажем, что $\beta_\eta = 0$. Если $\beta_\eta \ne 0$, то из (34) следует, что $g = 0$, из (35) — что $f = 0$. Подставляя $f = g = 0$ в (32), получаем $\beta_\eta^2 d_t^2(36d_t^2c^2 + h^2) = 0$. Очевидно, что с учетом сделанных предположений левая часть этого уравнения не может обратиться в нуль.

Таким образом, $\beta_\eta = 0$. Уравнения (35), (36) запишем в виде

$$fg = 0, \qquad 4f^2 + 3fg\beta c - g^2c^3 = 0.$$

Поскольку $c \ne 0$, отсюда получаем $f = g = 0$. По определению $f = \beta\beta_\eta d_t - cd_{t\eta}$, $g = dd_{t\eta} - d_td_\eta$, а также $\beta_\eta = 0$, поэтому $d_\eta = 0$. Подставляя данные соотношения в (29), (31), получаем линейную алгебраическую систему относительно w_t, w:

$$2idw_t + (\beta d - 1)w = 0,$$

$$2(2id_t - cd^2 - 1)w_t + (2\beta d_t + icd(\beta d - 1))w = 0.$$

В предположении, что $d_t \ne 0$, определитель системы равен $4id_t + 2(\beta d - 1)$ и не равен нулю. Следовательно, $w = 0$, откуда получаем $z_\eta = -(ic_\eta/(c^2d_t))z_{tt}$. При подстановке z_η в уравнение (25) его левая часть становится равной нулю, а правая часть равна единице. Имеет место противоречие.

Поскольку $\beta_t = \gamma_t = \delta_t = 0$, из формул для K, T следует, что $K_t = T_t = 0$. Условия совместности (6), (11) запишем в виде

$$2iK_\xi \boldsymbol{z}_t + T_\xi \boldsymbol{z} = 0.$$

Отсюда следует, что $K_\xi = T_\xi = 0$, так как в противном случае $\boldsymbol{z}_t \vee \boldsymbol{z} = 0$.

Рассмотрим линейные уравнения (23), (24).

Лемма 6. *Пусть $z_{tt} \ne 0$, выполнено условие* (26), *функции K, T не зависят от t, ξ и система уравнений* (23), (24) *является совместной. Тогда при $K_\eta \ne 0$ каждое решение этой системы удовлетворяет уравнениям*

$$z_{ttt} = iNz_{tt}; \qquad (37)$$

$$z_{t\eta} = iNz_\eta - iN^{-2}N_\eta z_{tt}, \qquad (38)$$

где N — некоторая вещественная функция η. Если функция K является константой, то функция T также должна быть константой.

Доказательство. Запишем условия совместности уравнений (23), (24):

$$2K_\eta z_{ttt} - iT_\eta z_{tt} = 0. \tag{39}$$

В предположении, что $z_{tt} \neq 0$, при $K_\eta = 0$ $T_\eta = 0$, иными словами, K, T являются константами. Если $K_\eta \neq 0$, уравнение (39) можно записать в виде (37), причем

$$T_\eta = 2NK_\eta. \tag{40}$$

Условие совместности (37), (23) при $z_{tt} \neq 0$ запишем в виде

$$T = 2KN - N^2. \tag{41}$$

С учетом (41) условие совместности (37), (24) принимает вид

$$(2K - N)^2(z_{t\eta} - iNz_\eta) + iN_\eta z_{tt} = 0. \tag{42}$$

Из уравнения (37) и условия (26) следует

$$z_{t\eta} \neq iNz_\eta. \tag{43}$$

Подставляя T из (41) в уравнение (40), получаем $2(K - N)N_\eta = 0$. Покажем, что $K = N$. Если $K \neq N$, то $N_\eta = 0$ и из уравнения (42) и условия (43) следует, что $K = N/2$. Тогда K является константой, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, $K = N$. Подставляя K в (42) и разрешая его относительно $z_{t\eta}$, получаем уравнение (38).

Рассмотрим случай, когда K и T являются константами. Положим $K = k$, $T = k^2+m$, где $k \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$. Уравнения (23), (24) запишем в виде

$$z_{tttt} = 2ikz_{ttt} + (k^2 + m)z_{tt}; \tag{44}$$

$$z_{tt\eta} = 2ikz_{t\eta} + (k^2 + m)z_\eta. \tag{45}$$

Продифференцировав (25) два раза по t с учетом уравнений (44), (45), получаем

$$ik(z_{tt}\bar z_{t\eta} - \bar z_{tt}z_{t\eta} + \bar z_{ttt}z_\eta - z_{ttt}\bar z_\eta) - (z_{ttt}\bar z_{t\eta} + \bar z_{ttt}z_{t\eta}) - (k^2 + m)(z_{tt}\bar z_\eta + \bar z_{tt}z_\eta) = 0. \tag{46}$$

Из уравнения (25) выразим $\bar z_\eta$:

$$\bar z_\eta = -(z_\eta\bar z_{tt} + 2)/z_{tt} \tag{47}$$

и подставим в (46):

$$i(iz_{tt}\bar z_{ttt} - i\bar z_{tt}z_{ttt} - 2kz_{tt}\bar z_{tt})(z_{tt}z_{t\eta} - z_\eta z_{ttt}) - 2(z_{ttt}^2 - 2ikz_{tt}z_{ttt} - (k^2 + m)z_{tt}^2) = 0. \tag{48}$$

Полагая

$$iz_{tt}\bar z_{ttt} - i\bar z_{tt}z_{ttt} - 2kz_{tt}\bar z_{tt} \neq 0, \tag{49}$$

из уравнения (48) находим $z_{t\eta}$:

$$z_{t\eta} = \frac{z_\eta z_{ttt}}{z_{tt}} - 2i\,\frac{z_{ttt}^2 - 2ikz_{tt}z_{ttt} - (k^2 + m)z_{tt}^2}{z_{tt}(iz_{tt}\bar z_{ttt} - i\bar z_{tt}z_{ttt} - 2kz_{tt}\bar z_{tt})}. \tag{50}$$

Если условие (49) не выполняется, из (48) получаем уравнения

$$\bar z_{tt}z_{ttt} - z_{tt}\bar z_{ttt} - 2ikz_{tt}\bar z_{tt} = 0; \tag{51}$$

$$-z_{ttt}^2 + 2ikz_{tt}z_{ttt} + (k^2 + m)z_{tt}^2 = 0. \tag{52}$$

Лемма 7. *Пусть* $z_{tt} \neq 0$ *и выполнено условие* (26), *тогда система уравнений* (45), (51), (52) *совместна только при* $k = m = 0$.

Доказательство. Из (52) следует, что

$$z_{ttt} = l z_{tt}, \tag{53}$$

где l — корень квадратного уравнения

$$l^2 - 2ikl - k^2 - m = 0. \tag{54}$$

Подставляя (53) в (51), получаем соотношение

$$2ik = l - \bar{l}, \tag{55}$$

подставляя $2ik$ из (55) в (54), получаем $k^2 + m = l\bar{l}$. Используя полученные соотношения для констант, уравнение (45) представим в виде

$$z_{tt\eta} = (l - \bar{l}) z_{t\eta} + l\bar{l} z_\eta. \tag{56}$$

Записав условие совместности (53), (56), находим $\bar{l}^2 (z_{t\eta} - l z_\eta) = 0$. Из (53) и условия (26) следует, что $z_{t\eta} \neq l z_\eta$, поэтому $l = 0$. Тогда из (55), (54) получаем утверждение леммы 7.

Подставляя $k = m = 0$ в (45), (52), имеем уравнения

$$z_{tt\eta} = 0; \tag{57}$$

$$z_{ttt} = 0. \tag{58}$$

Заметим, что при $N \neq 0$ уравнения (16), (17) являются частным случаем уравнений (37), (38), при $N = 0$ любое решение (16), (17) является решением уравнений (57), (58).

С помощью непосредственных вычислений можно показать, что в каждом рассмотренном случае условия совместности являются следствиями записанных уравнений. Это позволяет сделать вывод о пассивности полученных систем. Сформулируем результат в виде теоремы. Поскольку под следствиями уравнений понимались уравнения, полученные не только с помощью дифференцирования исходных уравнений, но и с помощью комплексного сопряжения, в соответствии с классическим определением пассивной системы [9] при формулировке теоремы к некоторым уравнениям необходимо добавить комплексно-сопряженные с ними.

Теорема. *Множество решений системы уравнений* (4), (5) *является объединением множеств решений следующих пассивных систем:*

— *система* A, *состоящая из уравнения* (4) *и сопряженного с ним, уравнений* (47), (57), (58) *и сопряженного с* (58);

— *система* B, *состоящая из уравнения* (4) *и сопряженного с ним, уравнения* (37) *и сопряженного с ним, уравнений* (38), (47) *с произвольной функцией* $N(\eta)$, *тождественно не равной нулю;*

— *система* C, *состоящая из уравнения* (4) *и сопряженного с ним, уравнения* (44) *и сопряженного с ним, уравнений* (47), (50) *с произвольными константами* k, m.

Системы A–C можно преобразовать в эквивалентные пассивные ортономные системы [9], однако это существенно усложняет формулы.

2. Свойства решений. Рассматриваются свойства решений системы (1) с точки зрения теории движения идеальной несжимаемой жидкости.

В гидродинамике система (1) задает двумерные движения идеальной жидкости с дополнительным условием постоянства давления в частице. Это условие позволяет интерпретировать каждое решение (1) как движение жидкости со свободной границей, определяемой соотношением $p = \eta = \mathrm{const}$.

Несложно проверить, что завихренность

$$\omega = x_t \vee x + y_t \vee y = \beta.$$

Из (8), (19) и леммы 4 следует, что $\beta_t = \beta_\xi = 0$, т. е. β может зависеть только от η. Иными словами, завихренность $\omega = \beta$ и давление $p = \eta$ связаны функциональным соотношением $\omega = \omega(p)$.

Получим условия, при которых жидкость ограничена движущейся твердой стенкой. Рассмотрим двумерное движение жидкости, при котором она ограничена некоторой движущейся (в общем случае) кривой. Будем полагать, что в лагранжевых координатах кривая задается уравнением $\eta = \mathrm{const}$.

Согласно [10] форма плоской кривой полностью, с точностью до выбора начальной точки отсчета дуги, определяется по кривизне этой кривой как функции натурального параметра s. Следовательно, выражение для кривизны кривой $\varkappa$ как функции s и времени t должно иметь вид

$$\varkappa = \nu(s - s_0(t)). \tag{59}$$

Здесь $s_0(t)$ задает начальную точку отсчета в зависимости от момента времени, а функция ν определяет форму кривой. Нетрудно проверить, что все такие $\varkappa$ удовлетворяют уравнению

$$\varkappa_t \varkappa_{ss} - \varkappa_s \varkappa_{ts} = 0. \tag{60}$$

В общее решение (60) кроме функций вида (59) входят функции $\varkappa = \varkappa(t)$. Поэтому условие, что $\varkappa$ можно представить в виде (59), эквивалентно условию (60) и одному из следующих условий: $\varkappa_s \neq 0$ либо $\varkappa_s = \varkappa_t = 0$.

В силу уравнения (4) кривизна кривой для рассматриваемой системы задается формулой

$$\varkappa = \frac{x_\xi y_{\xi\xi} - y_\xi x_{\xi\xi}}{(x_\xi^2 + y_\xi^2)^{3/2}} = \frac{i(z_\xi \bar{z}_{\xi\xi} - \bar{z}_\xi z_{\xi\xi})}{2(z_\xi \bar{z}_\xi)^{3/2}} = \frac{z_{tt}\bar{z}_{tttt} + \bar{z}_{tt} z_{tttt}}{2(z_{tt}\bar{z}_{tt})^{3/2}}.$$

Переход от производных по натуральному параметру s к производным по ξ осуществляется по формуле $\varkappa_s = \varkappa_\xi / s_\xi$, где

$$s_\xi = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} = \sqrt{z_\xi \bar{z}_\xi} = |z_\xi|.$$

Поэтому условие (60) эквивалентно условию

$$\varkappa_t \Big(\frac{\varkappa_\xi}{|z_\xi|}\Big)_\xi - \varkappa_\xi \Big(\frac{\varkappa_\xi}{|z_\xi|}\Big)_t = 0. \tag{61}$$

Определим, в каких случаях кривые $\eta = \mathrm{const}$ для решений системы (4), (5) можно рассматривать в качестве движущихся твердых стенок.

Кривизна $\varkappa$ для системы A равна нулю, а для системы B задается формулой $\varkappa = -N^2(\eta)|z_{tt}|^{-1}$. В обоих случаях $\varkappa_s = \varkappa_t = 0$.

Для системы C кривизна равна

$$\varkappa = \frac{ik(\bar{z}_{tt} z_{ttt} - z_{tt}\bar{z}_{ttt}) + (k^2 + m) z_{tt}\bar{z}_{tt}}{(z_{tt}\bar{z}_{tt})^{3/2}}.$$

С помощью непосредственного вычисления можно показать, что $\varkappa$ удовлетворяет уравнению (61), а также получить соотношение

$$\varkappa_s = -\frac{2k}{|z_{tt}|}\, \varkappa_t.$$

Поэтому при $k \neq 0$ производная $\varkappa_s$ обращается в нуль одновременно с $\varkappa_t$, при $k = 0$ $\varkappa_s = 0$. Находим

$$\varkappa_t = -\frac{m(z_{tt}\bar{z}_{ttt} + \bar{z}_{tt}z_{ttt})}{2(z_{tt}\bar{z}_{tt})^{3/2}} = -m\,\frac{|z_{tt}|_t}{|z_{tt}|^2}.$$

Таким образом, форма кривой сохраняется во всех случаях, кроме случая $k = 0$, $m \neq 0$.

Таким образом, для всех решений (4), (5) (кроме решений системы C при $k = 0$, $m \neq 0$) форма кривой $\eta = \mathrm{const}$ не меняется со временем. Это означает, что любую из этих кривых можно рассматривать в качестве движущейся твердой стенки.

Для того чтобы жидкость была ограничена только кривыми $\eta = p = \mathrm{const}$, эти кривые не должны иметь самопересечений. Данное условие выполняется не всегда.

3. Точные решения. Перейдем к построению точных решений. Система (2), (3) допускает следующие операторы [2]:

$$\begin{gathered}
X_1 = \varphi(\eta)\,\partial_\xi, \quad X_2 = \partial_\eta, \quad X_3 = t\,\partial_x, \quad X_4 = t\,\partial_y, \\
X_5 = \partial_x, \quad X_6 = \partial_y, \quad X_7 = \partial_t, \quad X_8 = -y\,\partial_x + x\,\partial_y, \\
X_9 = t\,\partial_t + 2\xi\,\partial_\xi - 2\eta\,\partial_\eta, \qquad X_{10} = x\,\partial_x + y\,\partial_y + 2\eta\,\partial_\eta.
\end{gathered} \tag{62}$$

Решения приводятся с точностью до действия группы G, порождаемой операторами (62) и дискретными преобразованиями обращения времени $t \to -t$ и отражения $\xi \to -\xi$, $y \to -y$.

Решение системы A задается формулой

$$z = \xi + S(\eta)t + i(\eta - t^2/2),$$

где S — произвольная гладкая функция. Изобарами являются параллельные прямые.

Решение системы B имеет вид

$$z = S(\eta)\,\mathrm{e}^{i(N(\eta)t - N^2(\eta)\xi)}, \qquad S(\eta)S'(\eta)N^2(\eta) = 1.$$

Изобарами являются концентрические окружности.

Систему C можно значительно упростить с помощью соответствующего преобразования из группы G и введения новой независимой переменной. Положим

$$J = (z_{ttt} - ikz_{tt})\bar{z}_\eta + (\bar{z}_{ttt} + ik\bar{z}_{tt})z_\eta$$

и обозначим левую часть неравенства (49) следующим образом:

$$I = i(z_{tt}\bar{z}_{ttt} - \bar{z}_{tt}z_{ttt}) - 2kz_{tt}\bar{z}_{tt}.$$

Можно показать, что в силу уравнений рассматриваемой системы $J_t = J_\xi = I_t = I_\xi = 0$. Продолжим оператор X_1 на J: $X_1 = \varphi\,\partial_\xi - I\varphi'\,\partial_J$. В силу условия (49) $I \neq 0$. Следовательно, при выборе соответствующей функции φ после действия оператора X_1 J становится равным нулю. Из уравнений (47) и $J = 0$ следует, что $z_\eta = 2(iz_{ttt} + kz_{tt})I^{-1}$. Введя независимую переменную (новую лагранжеву координату) σ, связанную с η соотношением

$$\eta_\sigma = I = i(z_{tt}\bar{z}_{ttt} - \bar{z}_{tt}z_{ttt}) - 2kz_{tt}\bar{z}_{tt}, \tag{63}$$

получаем систему

$$z_{tttt} = 2ikz_{ttt} + (k^2 + m)z_{tt}, \qquad z_\xi = iz_{tt}, \qquad z_\sigma = 2(iz_{ttt} + kz_{tt}). \tag{64}$$

Таким образом, нелинейная система C сведена к линейной системе (64) и нелинейному уравнению для определения η (63). Однородная линейная система (64) имеет конечномерное пространство решений, поэтому для нее можно записать фундаментальную систему решений (ФСР), состоящую из четырех комплекснозначных функций. Две из этих функций, а именно $z_1 = 1$, $z_2 = t$, не зависят от выбора значений констант k, m. Вид функций z_3, z_4 определяется корнями характеристического уравнения $\lambda^4 - 2ik\lambda^3 - (k^2 + m)\lambda^2 = 0$, которое строится по первому уравнению (64).

Далее рассматриваются только те решения системы C, которые удовлетворяют условиям (10), (49), т. е. не являются решениями двух предыдущих систем.

В случае $m = k = 0$ в ФСР входят функции $z_3 = t^3/6 + it\xi + 2i\sigma$, $z_4 = t^2/2 + i\xi$. С помощью преобразований из группы G решения (63), (64) можно привести к виду

$$z = t^3/6 - \xi + i(t^2/2 + t\xi + 2\sigma), \qquad \eta = -2\sigma.$$

Изобарами являются параллельные прямые.

При $m = -k^2$ в ФСР входят функции $z_3 = \exp(2ikt - 4ik^2\xi + 8k^3\sigma)$, $z_4 = t^2/2 + i\xi + 2k\sigma$. С помощью преобразований из G решения системы (63), (64) можно привести к виду

$$z = \exp(it - i\xi + \sigma) - \xi + i(t^2/2 + \sigma), \qquad \eta = \exp(2\sigma)/2 - \sigma \qquad (k = 1/2).$$

Изобары являются трохоидами. Эти кривые не имеют самопересечений при $\sigma \leqslant 0$. Данное решение отличается от решения, задающего трохоидальные волны Герстнера, только слагаемым $t^2/2$. Это слагаемое возникает вследствие того, что волны Герстнера описывают движение жидкости в постоянном поле силы тяжести, а в рассматриваемом случае внешние силы равны нулю.

Рассмотрим случай $m < 0$, $m + k^2 \neq 0$. Положим $k = (a + b)/2$, $m = -(a - b)^2/4$. В ФСР входят функции $z_3 = \exp(iat - ia^2\xi + a^2(a - b)\sigma)$, $z_4 = \exp(ibt - ib^2\xi + b^2(b - a)\sigma)$. С помощью преобразований из группы G решения (63), (64) можно привести к виду

$$z = \exp(i(k+1)t - (k+1)^2(i\xi - 2\sigma)) + \exp(i(k-1)t - (k-1)^2(i\xi + 2\sigma)),$$
$$\eta = ((k+1)^2 \exp(4(k+1)^2\sigma) + (k-1)^2 \exp(-4(k-1)^2\sigma))/2$$
$$(m = -1, \quad k \geqslant 0, \quad k \neq 1).$$

Изобары (при $k \neq 0$) являются эпитрохоидами, замкнутыми при условии, что число $((k+1)/(k-1))^2$ целое и

$$\sigma \leqslant \frac{1}{2(k^2+1)} \ln\left|\frac{k-1}{k+1}\right|.$$

В работе [11] течения такого типа названы птолемеевскими. При $k = 0$ получаем одно из решений задачи о движении вращающегося кольца [12]. В этом случае кольцо пульсирует, периодически сжимаясь и расширяясь.

При $m = 0$ в ФСР входят функции $z_3 = \exp(ikt - ik^2\xi)$, $z_4 = (t - 2k\xi - 2ik^2\sigma)\exp(ikt - ik^2\xi)$. С помощью преобразований из G решения системы (63), (64) можно привести к виду

$$z = (t - 2\xi - 2i\sigma)\exp(it - i\xi), \qquad \eta = 2(\sigma^2 + 2\sigma) \qquad (k = 1).$$

В случае $m > 0$, $m \neq k^2$ в ФСР входят функции $z_{3;4} = \exp(i(k \pm i\sqrt{m})t - i(k \pm i\sqrt{m}\,)^2(\xi \mp 2\sigma\sqrt{m}\,))$. С помощью преобразований из группы G решения (63), (64) можно привести к виду

$$z = \exp(i\,e^{\theta i}\,t - i\,e^{2\theta i}(\xi - 2\sigma\sin\theta)) + \exp(i\,e^{-\theta i}\,t - i\,e^{-2\theta i}(\xi + 2\sigma\sin\theta)),$$
$$\eta = \exp(-4\sigma\sin\theta\sin 2\theta)\cos(2\theta + 4\sigma\sin\theta\cos 2\theta)$$

(θ — некоторая константа, такая что $\sin\theta\cos 2\theta \neq 0$; $k = \cos\theta$; $m = \sin^2\theta$). При $k = 0$ получаем одно из решений задачи о движении вращающегося кольца [12]. В этом случае кольцо сжимается до некоторого минимального радиуса, затем начинает расширяться. При этом частицы жидкости движутся по гиперболам.

При $m = k^2 \neq 0$ в ФСР входят функции $z_{3;4} = \exp\left(k(i \pm 1)t - 2k^2(\pm\xi + 2k\sigma)\right)$. С помощью преобразований из G решения системы (63), (64) можно привести к виду

$$z = \exp\left(i(t-\theta) - 4\sigma - t + 2\xi\right) + \exp\left(i(t+\theta) - 4\sigma + t - 2\xi\right),$$
$$\eta = 2\exp(-8\sigma)\sin 2\theta \qquad (m = k = 1),$$

где θ — произвольная константа, такая что $\sin 2\theta \neq 0$. Изобары являются гиперболами, угол между асимптотами которых равен 2θ.

4. Замечания к работе [7]. В работе С. В. Хабирова [7] рассматривается система, аналогичная (2), (3). При исследовании данной системы на совместность вводятся два бесконечных набора функций p_k, q_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$), зависящих от времени t и лагранжевых переменных i, j. В [7] показано, что эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$p_0 = -1, \qquad 4p'_{k+1} = p'''_k + (q_k)_j, \qquad q'_k = (p_k)_j,$$
$$p_{k+1}(4p_kp_{k-1} - (p'_{k-1})^2 - q^2_{k-1}) - p_{k-1}({p'_k}^2 + q_k^2) + (p'_kp'_{k-1} - q_kq_{k-1})(p''_{k-1} - 2p_k) - \tag{65}$$
$$- p_k(p''_{k-1} - 2p_k)^2 + q'_{k-1}(p'_kq_{k-1} + q_kp'_{k-1} - p_kq'_{k-1}) = 0$$

(штрих означает производную по t, нижний индекс j — по соответствующей переменной (в последнем уравнении (65) исправлены допущенные в [7] опечатки)).

Согласно теореме 2 работы [7] все решения (65) зависят только от i, т. е. не зависят от t и j. Приведем контрпример к теореме. Зададим функции p_k, q_k с помощью рекуррентных соотношений

$$p_0 = -1, \qquad q_0 = 0,$$
$$p_{k+1} = \frac{{p'_k}^2 + q_k^2 + h_ksj^{-2k-1}}{4p_k}, \qquad q_{k+1} = \frac{-2p''_kq_k + 2p'_kq'_k + 4p_{k+1}q_k - h_ktsj^{-2k-2}}{4p_k},$$

где s — произвольная функция лагранжевой переменной i,

$$h_k = 2^{-4k}\prod_{n=0}^{k-1}(s^2 + n^2).$$

Можно показать, что функции p_k, q_k удовлетворяют (65) [13].

Заметим также, что список решений в [7] содержит неточности. В частности, в работе [7] отсутствует решение C.5 [13].

Автор выражает благодарность О. В. Капцову за советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** О “простых” решениях уравнений динамики политропного газа // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 5–12.
2. **Нещадим М. В., Чупахин А. П.** О некоторых решениях уравнений движения сплошной среды со специальной термодинамикой // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 317–332.
3. **Овсянников Л. В.** Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.
4. **Иногамов Н. А.** Цилиндрический аналог трохоидальных волн Герстнера // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1985. Т. 20, № 5. С. 145–150.

5. **Шанько Ю. В.** Об одной переопределенной системе уравнений движения сплошной среды // Материалы 17-й Междунар. науч. конф. “Решетневские чтения”, Красноярск, 12–14 нояб. 2013 г. Красноярск: Сиб. гос. аэрокосм. ун-т, 2013. Ч. 2. С. 122–123.
6. **Хабиров С. В.** Общее решение плоской гидродинамической модели движений с однопараметрической термодинамической системой и переменной энтропией // Тез. докл. Всерос. конф. “Новые математические модели сплошных сред: построение и изучение”, Новосибирск, 18–22 апр. 2014 г. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 2014. С. 140–141.
7. **Хабиров С. В.** Плоские изотермические движения идеального газа без расширений // Прикл. математика и механика. 2014. Т. 78, № 3. С. 411–424.
8. **Hearn A. C., Schopf R.** REDUCE user’s manual. Free version. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: http://reduce-algebra.sourceforge.net/manual/manual.html.
9. **Фиников С. П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
10. **Рашевский П. К.** Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
11. **Абрашкин А. А.** Вихревая динамика в лагранжевом описании / А. А. Абрашкин, Е. И. Якубович. М.: Физматлит, 2006.
12. **Налимов В. И.** Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей / В. И. Налимов, В. В. Пухначев. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1975.
13. **Shan’ko Yu. V.** Analysis of overdetermined system that describes the special class of two-dimensional motion of an ideal fluid. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1608.08186.

Поступила в редакцию 3/X 2016 г.