ЛИТЕРАТУРА

1. **Балабух Л. И., Яковенко М. Г.** Об учете деформационной анизотропии в задачах устойчивости изотропных упругих тел.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975.
2. **Дель Г. Д., Одинг С. С.** Устойчивость двуосного пластического растяжения изотропного листа.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.

УДК 539.374

УПРУГОИЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ ТРУБ

Г. И. Быковцев, В. П. Зебриков

(Куйбышев)

Кручение идеальных упругопластических стержней рассматривалось в [1—5]. Решение упругопластических задач методом возмущений рассматривалось в работах, обсуждение которых можно найти в [6]. При решении задач для двусвязных областей методы, разработанные в [6], применимы только тогда, когда один из контуров полностью охвачен пластической зоной. Ниже предлагается модификация метода возмущений, которая позволяет рассматривать развитие пластических зон с охватом только части контура пластической зоной, при этом используется идея [7] разложения решения по параметру нагружения.

1. При кручении упругопластических труб в упругой области напряжения выражаются через функцию напряжений по формулам

$$\tau_r = (1/r)\partial u/\partial\theta,\quad \tau_\theta = -\partial u/\partial r. \tag{1.1}$$

Функция напряжений u удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = -2G\omega, \tag{1.2}$$

где G — модуль сдвига; ω — угол закручивания. В пластической области выполняется условие текучести

$$(\partial u/\partial r)^2 + (1/r^2)(\partial u/\partial\theta)^2 = K^2. \tag{1.3}$$

На границе контуров имеем

$$du/ds = 0. \tag{1.4}$$

На упругопластической границе u и du/dn должны быть непрерывны. Для односвязной области условия (1.3), (1.4) однозначно определяют напряженное состояние по заданной закрутке. Для многосвязной области, интегрируя соотношение (1.4), получаем

$$u = c_p, \tag{1.5}$$

причем постоянная c_p на каждом контуре своя, только на одном из ее контуров ее можно положить равной нулю. Для определения значений c_p из (1.5) необходимо воспользоваться аналогом теоремы Бредта в упругопластических телах, который сформулирован в [8].

2. Рассмотрим кручение эксцентрической трубы. Контуры поперечного сечения трубы (фиг. 1) зададим уравнениями

$$L_1: r = \delta\cos\theta + \sqrt{r_1^2 - \delta^2\sin^2\theta} \approx r_1 + \delta\cos\theta - \frac{\delta^2}{2r_1}\sin^2\theta,\quad L_2: r = r_2. \tag{2.1}$$

Решение упругой задачи получено в [9, 10]. Функцию напряжения можно получить в упругой области, используя метод возмущений. Ограничиваясь степенями не выше δ^2, имеем

$$u_0 = G\omega\left(\frac{r_2^2 - r^2}{2} + \delta K_1\left(\frac{r_2^2}{r} - r\right)\cos\theta + \delta^2 K_2\left(\frac{r_2^4}{r^2} - r^2\right)\cos 2\theta\right), \tag{2.2}$$

где

$$K_1 = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2};\quad K_2 = \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)(r_2^4 - r_1^4)}.$$

Максимальное напряжение имеет место в точке A, из (2.2) получаем

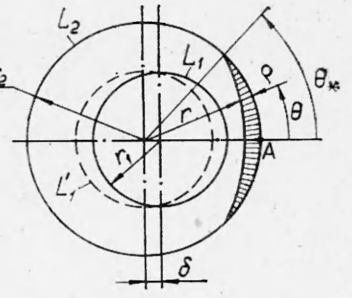
$$\tau_{max} = G\omega(r_2 + 2\delta K_1 + 4\delta^2 K_2 r_2). \tag{2.3}$$

В точке A напряжения достигают предела текучести при

$$\omega = \omega_0 = KG^{-1}(r_2 + 2\delta K_1 + 4\delta^2 K_2 r_2)^{-1}. \tag{2.4}$$

При $\omega > \omega_0$ около точки A образуется пластическая область, в которой совместно с (1.3) выполняется

$$\tau_r = 0,\ \tau_\theta = K,\ u = K(r_2 - r). \tag{2.5}$$



Фиг. 1

Решение (2.5) будет иметь место при $r_2 - \rho(\theta, \omega) \leqslant r \leqslant r_2$, где $\rho(\theta, \omega)$ — толщина пластической зоны по нормали к контуру L_2. Введем малый параметр

$$\varepsilon^2 = (\omega - \omega_0)\,\omega_0^{-1} \tag{2.6}$$

и решение в упругой области будем искать в виде разложения по ε:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n. \tag{2.7}$$

На упругопластической границе

$$u(r_2 - \rho,\ \theta) = K\rho,\ \partial u/\partial r = -K. \tag{2.8}$$

С учетом (2.6) уравнение (1.2) будет выполнено, если

$$\Delta u_0 = -2G\omega_0,\ \Delta u_1 = 0,\ \Delta u_2 = -2G\omega_0,\ \Delta u_k = 0\ (k = 3, 4\ldots). \tag{2.9}$$

Краевые условия (2.8), используя (2.7), можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(r_2 - \rho,\ \theta)\,\varepsilon^n = K\rho,\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial u_n(r_2 - \rho,\ \theta)}{\partial r}\varepsilon^n = -K. \tag{2.10}$$

Раскладывая левые части равенства (2.10) в ряд по степеням ρ, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\frac{\partial^m u_n(r_2,\ \theta)}{\partial r^m}\varepsilon^n\rho^m = K\rho, \tag{2.11}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\frac{\partial^{m+1} u_n(r_2,\ \theta)}{\partial r^{m+1}}\varepsilon^n\rho^m = -K.$$

Функцию ρ будем искать в виде разложения в ряд по ε:

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \varepsilon^k. \tag{2.12}$$

Подставляя выражение (2.12) в (2.11), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\frac{\partial^m u_n(r_2,\ \theta)}{\partial r^m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k\varepsilon^k\right)^m \varepsilon^n = K\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k\varepsilon^k; \tag{2.13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\frac{\partial^{m+1} u_n(r_2,\ \theta)}{\partial r^{m+1}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k\varepsilon^k\right)^m \varepsilon^n = -K. \tag{2.14}$$

Будем принимать, что угол охвата θ_* пластической зоной внешнего контура L_2 связан с малым параметром ε соотношением

$$\theta_* \sim \varepsilon,\ \sin\theta_* \sim \varepsilon,\ \cos\theta_* \sim 1. \tag{2.15}$$

В выражения (2.13), (2.14) входит сумма $(K + \partial u_0/\partial r)$, которая с учетом (2.2), (2.4) и (2.15) имеет вид

$$\left(K + \frac{\partial u_0}{\partial r}\right) = G\omega_0\left(T_1\sin^2\frac{\theta}{2} + T_2\sin^2\theta\right) = \tag{2.16}$$

$$= G\omega_0\left(\left(\frac{1}{4}T_1 + T_2\right)\theta^2 - \left(\frac{T_1}{48} + \frac{T_2}{3}\right)\theta^4 + \ldots\right),$$

где
$$T_1 = 4\delta K_1,\ T_2 = 8\delta^2 K_2 r_2.$$

Приравнивая члены в (2.13), (2.14) при одинаковых степенях ε, с учетом (2.15), (2.16) получим

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = -\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\frac{\rho_1^2}{2} + \frac{\partial u_1}{\partial r}\rho_1, \tag{2.17}$$

$$u_3 = G\omega_0\rho_1\left(\frac{1}{4}T_1 + T_2\right)\frac{\theta^2}{\varepsilon^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\rho_1\rho_2 + \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3}\frac{\rho_1^3}{3!} + \frac{\partial u_1}{\partial r}\rho_2 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\frac{\rho_1^2}{2} + \frac{\partial u_2}{\partial r}\rho_1,\ u_4 =$$

$$= G\omega_0\rho_2\left(\frac{T_1}{4} + T_2\right)\frac{\theta^2}{\varepsilon^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\frac{\left(\rho_2^2 + 2\rho_1\rho_3\right)}{2} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3}\frac{\rho_1^2\rho_3}{2} - \frac{\partial^4 u_0}{\partial r^4}\frac{\rho_1^4}{4!} + \frac{\partial u_1}{\partial r}\rho_3 -$$

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\rho_1\rho_2 + \frac{\partial^3 u_1}{\partial r^3}\frac{\rho_1^3}{3!} + \frac{\partial u_2}{\partial r}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}\frac{\rho_1^2}{2} - \frac{\partial u_3}{\partial r}\rho_1;$$

$$\rho_1 = \frac{\partial u_1}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\right)^{-1},\ \rho_2 = \left(G\omega_0\left(\frac{T_1}{4} + T_2\right)\frac{\theta^2}{\varepsilon^2} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3}\frac{\rho_1^2}{2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\rho_1 + \right. \tag{2.18}$$

$$\left. + \frac{\partial u_2}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\right)^{-1},\ \rho_3 = \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3}\rho_1\rho_2 - \frac{\partial^4 u_0}{\partial r^4}\frac{\rho_1^3}{3!} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\rho_2 + \frac{\partial^3 u_1}{\partial r^3}\frac{\rho_1^2}{2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}\rho_1 + \frac{\partial u_3}{\partial r}\right) \times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\right)^{-1},\ \rho_4 = \left(-G\omega_0\left(\frac{T_1}{48} + \frac{T_2}{3}\right)\frac{\theta^4}{\varepsilon^4} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3}\frac{\rho_2^2 + 2\rho_1\rho_3}{2} - \frac{\partial^4 u_0}{\partial r^4}\frac{\rho_1^2\rho_3}{2} + \frac{\partial^5 u_0}{\partial r^5}\frac{\rho_1^4}{4!} - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\rho_3 + \frac{\partial^3 u_1}{\partial r^3}\rho_1\rho_2 - \frac{\partial^4 u_1}{\partial r^4}\frac{\rho_1^3}{3!} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{\partial^3 u_2}{\partial r^3}\frac{\rho_1^2}{2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}\rho_1 + \frac{\partial u_4}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\right)^{-1}.$$

Из (2.17) определяются граничные условия для u_n на наружном контуре в пластической зоне, а (2.18) позволяет определить толщину пластической зоны ρ. При развитии пластической зоны на наружном контуре L_2 выражение теоремы Бредта для внутреннего контура L_1 с площадью отверстия F_1 имеет вид

$$\int\limits_{L_1}\left(-\frac{\partial u}{\partial r}r d\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}dr\right) = 2G\omega F_1. \tag{2.19}$$

Учитывая (2.6) и приравнивая члены в (2.19) при одинаковых степенях ε, получим

$$P(u_0) = 2G\omega_0 F_1,\ P(u_1) = 0,\ P(u_2) = 2G\omega_0 F_1,\ P(u_n) = 0,\ n = 3, 4 \ldots, \tag{2.20}$$

где
$$P(u_n) = \int\limits_{L_1}\left(-\frac{\partial u_n}{\partial r}r d\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial \theta}dr\right).$$

Решение u_n будем искать в виде ряда

$$u_n = \sum_{l=0}^{\infty} u_{nl}\delta^l,\quad n = 1, 2 \ldots \tag{2.21}$$

Проведем разложение u_n около контура L_1', концентрически расположенного относительно L_2:

$$u_n = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\partial^m u_{nl}}{\partial r^m}\frac{\left(\delta\cos\theta - \frac{\delta^2}{2r_1}\sin^2\theta\right)^m\delta^l}{m!},\ n = 1, 2 \ldots \tag{2.22}$$

Приравнивая члены в (2.20) при одинаковых степенях δ, с учетом (2.21), (2.22) получим

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial u_{n0}}{\partial r}r_1 d\theta = 0, \tag{2.23}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\left(\frac{\partial^2 u_{n0}}{\partial r^2}r_1 + \frac{\partial u_{n0}}{\partial r}\right)\cos\theta + \frac{\partial u_{n1}}{\partial r}r_1 + \frac{\partial u_{n0}}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r_1}\right)d\theta = 0,\ n = 1, 3, 4 \ldots$$

Для u_2 используются уравнения (2.23), кроме первого, которое, согласно (2.20), будет иметь вид

$$\int_0^{2\pi} -\frac{\partial u_{20}}{\partial r} r_1 d\theta = 2G\omega_0 F_1. \tag{2.24}$$

На внутреннем контуре L_1 функция u имеет постоянное значение

$$u = c. \tag{2.25}$$

Постоянную c представим в виде

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n. \tag{2.26}$$

Приравняем в (2.25) с учетом (2.26) члены при одинаковых степенях ε и получим

$$u_n = c_n, \ n = 0, 1, 2 \ldots \tag{2.27}$$

Представим c_n в виде

$$c_n = \sum_{l=0}^{\infty} c_{nl} \delta^l. \tag{2.28}$$

Значение u_n на L_1 разложим около L_1', концентрически расположенной относительно L_2, и с учетом (2.22), (2.28), приравняв члены при одинаковых степенях δ, получим соотношения

$$u_{n0} = c_n, \ u_{n1} = c_{n1} - \frac{\partial u_{n0}}{\partial r} \cos\theta, \ n = 1, 2 \ldots \tag{2.29}$$

Граничные условия для u на наружном контуре в упругой области

$$u = 0. \tag{2.30}$$

Из (2.30) определяются граничные условия для u_n

$$u_n = 0, \ u_{nl} = 0, \ l, \ n = 0, 1, 2 \ldots \tag{2.31}$$

С учетом (2.21) уравнение (2.9) для u_n распадается на систему уравнений для u_{nl}:

$$\Delta u_{nl} = 0, \ n = 1, 3, 4 \ldots, \ l = 0, 1, 2 \ldots, \tag{2.32}$$
$$\Delta u_{20} = -2G\omega_0, \ \Delta u_{2l} = 0, \ l = 1, 2, 3 \ldots$$

Полученные дифференциальные уравнения и граничные условия позволяют задачу определения функции u разделить на ряд последовательных задач нахождения функций u_n, u_{nl} путем решения уравнений (2.9), (2.32) с граничными условиями для u_n (2.17), (2.31), (2.20), (2.27) и граничными условиями для u_{nl} (2.23), (2.24), (2.29).

3. Рассмотрим последовательно решение задачи по нахождению u_n, u_{nl}. Функция u_1 имеет следующую краевую задачу для определения:

$$\Delta u_1 = 0, \ u_1 = 0 \text{ на } L_2, \tag{3.1}$$
$$u_1 = c_1, \ \int_{L_1} -\frac{\partial u_1}{\partial r} r d\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} dr = 0 \text{ на } L_1.$$

Из (3.1) с учетом (2.18) получаем

$$u_1 = 0, \ \rho_1 = 0. \tag{3.2}$$

Определение u_1, ρ_1 позволяет найти граничные условия для u_2 на контуре L_2 при $-\theta_* \leqslant \theta \leqslant \theta_*$. Из (2.17) следует, что $u_2 = 0$ на контуре L_2 при $-\theta_* \leqslant \theta \leqslant \theta_*$. Тогда функция u_2 имеет следующую краевую задачу для ее определения:

$$\Delta u_2 = -2\omega_0 G, \ u_2 = 0 \text{ на } L_2, \tag{3.3}$$
$$u_2 = c_2, \ \int_{L_1} -\frac{\partial u_2}{\partial r} r d\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \theta} dr = 2\omega_0 G F_1 \text{ на } L_1.$$

Краевая задача (3.3) для u_2 совпадает с задачей об упругом кручении эксцентрического кольца, решением которой является (2.2). Следовательно,

$$u_2 = u_0. \tag{3.4}$$

С учетом (3.2), (3.4) ρ_2 определим из (2.18)

$$\rho_2 = \left(G\omega_0\left(\frac{T_1}{4}+T_2\right)\frac{\theta^2}{\varepsilon^2}+\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\right)^{-1},$$

откуда после подстановки $\partial u_0/\partial r$, $\partial^2 u_0/\partial r^2$ с учетом (2.15) имеем

$$\rho_2 = G\omega_0\left(\frac{T_1}{4}+T_2\right)\left(\theta_*^2-\theta^2\right)\varepsilon^{-2}L_2^{-1}; \tag{3.5}$$

$$\theta_* = \varepsilon\sqrt{\frac{L_1}{G\omega_0\left(\frac{T_1}{4}+T_2\right)}}, \tag{3.6}$$

где $$L_1 = G\omega_0(r_2+2\delta K_1+4\delta^2 K_2 r_2);$$

$$L_2 = G\omega_0\left(1-\frac{2\delta K_1}{r_2}-4\delta^2 K\right).$$

Угол охвата θ_* контура L_2 пластической зоной определен из условия $\rho_2 = 0$ при $\theta = \theta_*$. Согласно (3.2), краевая задача определения u_3 совпадает с условиями нахождения u_1, откуда получаем

$$u_3 = \theta,\ \rho_3 = \theta. \tag{3.7}$$

Перейдем к определению функции $u_4(r, \theta)$ и ρ_4. Из (2.17) с учетом (3.2), (3.4), (3.5), (3.7) получим значение функции u_4 на контуре L_2 в пластической области:

$$u_4 = G\omega_0\left(\frac{T_1}{4}+T_2\right)\frac{\theta^2}{\varepsilon^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\frac{\rho_2^2}{2}+\frac{\partial u_0}{\partial r}\rho_2,$$

откуда после преобразований имеем

$$u_4 = -L_3\left(\theta_*^2-\theta^2\right)^2, \tag{3.8}$$

где $L_3 = \dfrac{\left(G\omega_0\left(\frac{T_1}{4}+T_2\right)\right)^2}{2\varepsilon^4 L_2}$. Функция u_4 определена на контуре L_2 в пластической области при угле охвата (3.6) и находится из решения следующей краевой задачи:

$$\Delta u_4 = 0,\ u_4 = \begin{cases} -L_3\left(\theta_*^2-\theta^2\right)^2 & \text{на } L_2,\ -\theta_* \leqslant \theta \leqslant \theta_*, \\ 0 & \text{на } L_2,\ \theta_* < \theta < 2\pi-\theta_*, \\ c_4 & \text{на } L_1, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\int_{L_1} -\frac{\partial u_4}{\partial r} r d\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u_4}{\partial \theta} dr = 0.$$

В соответствии с (2.21) — (2.23), (2.28), (2.29), (2.31) задачу о нахождении u_4 в области, ограниченной контурами L_1' и L_2 (эксцентрическое кольцо), можно свести к последовательному решению краевых задач в области, ограниченной контурами L_1' и L_2 (концентрическое кольцо), представив

$$u_4 = u_{40} + \delta u_{41} + \ldots \tag{3.10}$$

Ограничимся определением u_{40}, u_{41}. Для непрерывного задания функции на всем контуре L_2 разложим функции u_{40}, u_{41}, заданные на $-\theta_* \leqslant \theta \leqslant \theta_*$, в ряд Фурье. Краевые условия для u_{40}, u_{41} на L_2 при $-\theta_* \leqslant \theta \leqslant \theta_*$ назначаем, используя (3.8), таким образом, чтобы в результате решения краевой задачи полученные функции u_{40}, u_{41} и их производные по r и θ имели сходящиеся ряды во всей упругой области и на ее границах:

$$u_{40} = -L_3\left(\theta_*^2-\theta^2\right)^2,\ u_{41} = 0. \tag{3.11}$$

Нахождение u_{40} сведем, следуя (3.9) — (3.11), к решению краевой задачи

$$\Delta u_{40} = 0,\ u_{40} = \begin{cases} E + \sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k \cos k\theta & \text{на } L_2, \\ c_{40} & \text{на } L_1', \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u_{40}}{\partial r} r_1 d\theta = 0,$$

где $$E = -\frac{8}{15}\frac{\theta_*^5}{\pi}L_3;\ E_k = \frac{16}{\pi}L_3\left(\frac{3\theta_*}{k^4}\cos k\theta_* + \left(\frac{\theta_*^2}{k^2} - \frac{3}{k^5}\right)\sin k\theta_*\right).$$

Решение (3.12) будем искать в виде

$$u_{40} = R + R_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty}\left(R_k r^k + R_k' r^{-k}\right)\cos k\theta. \tag{3.13}$$

Из (3.12), (3.13) получаем значение функции u_{40}

$$u_{40} = E + \sum_{k=1}^{\infty} R_k r^k\left(1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{2k}\right)\cos k\theta, \tag{3.14}$$

где $$R_k = \frac{E_k r_2^k}{r_2^{2k} - r_1^{2k}}.$$

Для определения u_{41} необходимо решить краевую задачу

$$\Delta u_{41} = 0,\ u_{41} = \begin{cases} 0 & \text{на } L_2, \\ c_{41} - \dfrac{\partial u_{40}}{\partial r}\cos\theta & \text{на } L_1', \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{\partial^2 u_{40}}{\partial r^2} r_1 + \frac{\partial u_{40}}{\partial r}\right)\cos\theta + \frac{\partial u_{41}}{\partial r} r_1 + \frac{\partial u_{40}}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r_1}\right)d\theta = 0.$$

Решение ищем в виде (3.13). Из (3.13), (3.15) находим

$$u_{41} = \sum_{k=1}^{\infty} W_k r^k\left(1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^{2k}\right)\cos k\theta, \tag{3.16}$$

где $$W_k = \frac{R_{k-1}(k-1)r_1^{2k-2} + R_{k+1}(k+1)r_1^{2k}}{r_2^{2k} - r_1^{2k}}.$$

Получив значение функции u_4 и ее производной $\partial u_4/\partial r$ из (3.10), (3.14), (3.16), определим ρ_4 из (2.18) в виде

$$\rho_4 = \frac{1}{2}\left(-G\omega_0\left(\frac{T_1}{48} + \frac{T_2}{3}\right)\frac{\rho^4}{\varepsilon^4} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^2}\frac{\rho_2^2}{2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\rho_2 + \frac{\partial u_4}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3}\right)^{-1}. \tag{3.17}$$

Согласно (2.12), используя (3.5), (3.17), получим толщину пластической зоны по нормали к контуру L_2 после второго приближения $\rho = \varepsilon^2\rho_2 + \varepsilon^4\rho_4$ и тем самым положение упругопластической границы (см. фиг. 1). Из (2.7), (3.2), (3.4), (3.7), (3.14), (3.16) получим функцию напряжения в упругой области

$$u = (1 + \varepsilon^2)u_0 + \varepsilon^4(u_{40} + \delta u_{41}),$$

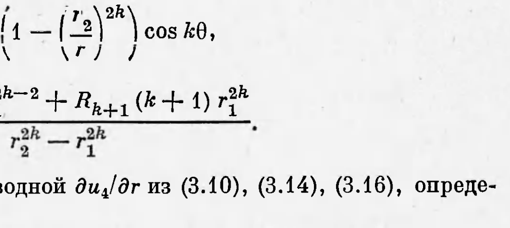
что позволит, согласно (1.1), определить напряженное состояние в упругой области.

Построенное решение удовлетворяет точным уравнениям теории идеальной пластичности в пластической области и точным уравнениям теории упругости в упругой области. Метод возмущений при ограниченном числе приближений сводится поэтому к приближенному выполнению краевых условий и условий сопряжения на упругопластической границе.

Условия на внешнем контуре L_2 выполняются точно, а на внутреннем контуре L_1 и упругопластической границе приближенно.

Поэтому о точности полученного решения можно судить по величинам относительной невязки $(\tau_\theta - K)/K$, τ_r/K на упругопластической границе, а также по величине относительной невязки краевых условий на внутреннем контуре τ_n/K, где τ_n — напряжение, нормальное к внутреннему контуру L_1.

На фиг. 2 представлена область параметров δ/r_2, r_1/r_2, которые определяют геометрию поперечного сечения трубы. Для каждой точки области $(\delta/r_1$,



Фиг. 2

r_1/r_2) указаны наибольшие параметры ε, когда невязки не превышают 1%.

На фиг. 2 приведена кривая PS, которая является геометрическим местом точек пересечения кривых $\varepsilon = \text{const}$. Выше PS расположены кривые $\varepsilon = \text{const}$, когда пластическое течение достигает контура L_1. Для больших ε применяемый метод решения не может быть использован. Ниже PS расположены кривые $\varepsilon = \text{const}$, когда пластическое течение не достигает внутреннего контура L_1.

Параметр ε вдоль PS изменяется от $\varepsilon = 0$ в точке P до $\varepsilon = 0{,}38$ в точке S, где ε является наибольшим для всей выделенной области. На фиг. 2 приведены штриховые кривые *1—3*, вдоль которых угол охвата пластической зоной внешнего контура L_2 постоянен и составляет 15; 30; 45° соответственно.

Поступила 14 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соколовский В. В.** Об одной задаче упругопластического кручения.— ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.
2. **Галин Л. А.** Упругопластическое кручение призматических стержней полигонального сечения.— ПММ, 1944, т. 8, вып. 4.
3. **Галин Л. А.** Упругопластическое кручение призматических стержней.— ПММ, 1949, т. 13, вып. 3.
4. **Mises R.** Three remarks on the theory of the ideal plastic body.— In: Reissner Anniversary Volume. Ann Arbor, Michigan, 1949.
5. **Hodge P.** On the soap-film sandhill analogy for elastic-plastic torsion.— In: The Prager Anniversary Volume. N. Y., 1963.
6. **Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.** Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978.
7. **Клюшников В. Д.** Метод упругих решений в теории течения.— ПМТФ, 1965, № 1.
8. **Клюшников В. Д.** Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979.
9. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. М.: Наука, 1966.
10. **Macdonald H. M.** On the torsional strength of a hollow schaft.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1893, vol. 8.

УДК 534.222

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦУГА УДАРНЫХ ИМПУЛЬСОВ В ПЛОТНЫХ СРЕДАХ

Э. И. Андрианкин, А. И. Малкин, Н. Н. Мягков

(Москва)

Исследование нестационарных ударных волн в плотных средах представляет интерес для многих задач физики удара, которые возникают, например, при анализе ударов метеоритов, взаимодействии мощного лазерного излучения с веществом, ударно-волновых способах получения новых материалов, при взрывах в плотных средах и т. д. [1—5]. В ряде таких задач приходится исследовать распространение ударных волн с амплитудами давления, значительно превосходящими модули сдвига вещества, но меньшими модуля всестороннего сжатия. Поэтому для описания состояния среды в этом случае справедливо гидродинамическое приближение [1], а для анализа распространения цуга ударных импульсов с учетом диссипации можно использовать уравнение Бюргерса [6]. В данной работе рассмотрены плоские задачи. В этом случае уравнение Бюргерса (УБ) для физически интересных граничных условий решается точно и задача сводится к извлечению информации из полученного решения.

Если приложенный на границе импульс давления можно аппроксимировать простой функцией времени, например δ-функцией или ступенчатой функцией, анализ решения УБ не сложен [6]. Интерес представляет рассмотрение задач с более сложными граничными условиями. В частности, для практических приложений нужно исследование эволюции цуга импульсов сжатия, возникающего при последовательных ударах по поверхности образца. Постановка такой задачи вызвана тем, что в экспериментах по ударно-волновому сжатию конденсированных веществ часто возникает потребность варьировать форму приложенного на границе импульса давления. Импульсы давления, которые получаются при использовании ударников, коротких лазерных импульсов, электронных ударов и детонации слоев конденсированных ВВ, имеют качественно подобную форму — резкий фронт и пологую область спадания. Поэтому практически изменение формы волны сжатия удобно осуществлять с помощью цугов импульсов давления, генерируемых, например, импульсным лазером. Выбор времени запаздывания между лазерными импульсами может дать возможность сформировать в среде волну с заданными параметрами. Кроме того, использование цуга лазерных