

13. Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А. Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход). М.: Наука, 1975.
 14. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
 15. Якушева О. Б., Якушев В. В., Дремин А. Н. Образование частиц серы в растворах тиосульфата натрия за фронтом ударных волн. — В кн.: Горение и взрыв. Материалы III Всесоюз. симп. по горению и взрыву. М.: Наука, 1972.
 16. Френкель Я. Н. Кинетическая теория жидкости. М.: Наука, 1975.

Поступила 17/VII 1983 г.

УДК 517.9 : 533.7

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В БИНАРНОЙ СМЕСИ ВЯЗКИХ ГАЗОВ

Г. А. Рувев, В. М. Фомин

(Новосибирск)

В [1] на основе модели В. В. Струмлинского [2] исследована структура ударной волны в предположении, что вязкость и теплопроводность присутствуют только в силах взаимодействия между компонентами. В данной работе получены асимптотические решения задачи о структуре ударной волны в навье-стоксовском приближении.

1. Система уравнений, описывающая течение бинарной газовой смеси в одномерном, нестационарном случае имеет вид [2]

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i u_i}{\partial x} = 0, \quad \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial p_i}{\partial x} = F_{ij} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right),$$

$$\rho_i \frac{\partial e_i}{\partial t} + \rho_i u_i \frac{\partial e_i}{\partial x} + p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = Q_{ij} + \mu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right),$$

$$p_i = R_i \rho_i T_i, \quad e_i = c_{iV} T_i, \quad \rho_i = \rho_{ii} m_i, \quad i = 1, 2, \quad i \neq j$$

где ρ_i , u_i , T_i , m_i , ρ_{ii} — средняя плотность, скорость, температура, объемная концентрация и истинная плотность i -го компонента. Величины F_{ij} и Q_{ij} учитывают взаимодействие между компонентами и берутся в виде

$$F_{ij} = K(u_j - u_i), \quad Q_{ij} = K\kappa_i(u_j - u_i)^2 + q(T_j - T_i),$$

$$\kappa_1 + \kappa_2 = 1.$$

Будем считать, что R_i , K , κ_i , q , μ_i , λ_i , c_{iV} — некоторые положительные постоянные. В дальнейшем рассматривается смесь одноатомных газов, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, где $\gamma_i = 1 + R_i/c_{iV}$.

Предполагая, что все искомые функции системы уравнений (1.1) зависят от $\xi = x - Dt$, где D — скорость ударной волны, получим

$$(1.2) \quad \rho_i V_i = c_i, \quad c_1 V_1 + c_2 V_2 + \frac{R_1 c_1 T_1}{V_1} + \frac{R_2 c_2 T_2}{V_2} = c_3 + \mu_1 \frac{dV_1}{d\xi} + \mu_2 \frac{dV_2}{d\xi},$$

$$c_1 \left(c_{1V} T_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) + c_2 \left(c_{2V} T_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) + R_1 c_1 T_1 + R_2 c_2 T_2 = \mu_1 V_1 \frac{dV_1}{d\xi} +$$

$$+ \mu_2 V_2 \frac{dV_2}{d\xi} + \lambda_1 \frac{dT_1}{d\xi} + \lambda_2 \frac{dT_2}{d\xi} + c_4,$$

$$c_1 \frac{dV_1}{d\xi} + R_1 c_1 \frac{dT_1/V_1}{d\xi} = K(V_2 - V_1) + \mu_1 \frac{d^2 V_1}{d\xi^2},$$

$$c_1 c_{1V} \frac{dT_1}{d\xi} + \frac{R_1 c_1 T_1}{V_1} \frac{dV_1}{d\xi} = \kappa \kappa_1 (V_2 - V_1)^2 + q(T_2 - T_1) + \mu_1 \left(\frac{dV_1}{d\xi} \right)^2 + \lambda_1 \frac{d^2 T_1}{d\xi^2},$$

где c_i — постоянные интегрирования; $V_i = u_i - D$.

Введем безразмерные переменные по формулам:

$$(1.3) \quad \bar{V}_i = \frac{c_1 + c_2}{c_3} V_i, \quad \bar{T}_i = \frac{(R_1 c_1 + R_2 c_2)(c_1 + c_2)}{c_3^2} T_i, \quad \bar{\rho}_i = \frac{c_3}{(c_1 + c_2)^2} \rho_i,$$

$$\bar{\mu}_i = \frac{\mu_i}{\mu_*}, \quad \bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_*}, \quad \bar{\xi} = \frac{c_1 + c_2}{\mu_*} \xi, \quad \lambda_* = \frac{R_1 c_1 + R_2 c_2}{c_1 + c_2} \mu_{*2}$$

$$\bar{K} = \frac{K \mu_*}{(c_1 + c_2)^2}, \quad \bar{q} = \frac{\mu_*}{(c_1 + c_2)(R_1 c_1 + R_2 c_2)} q,$$

где μ_* — безразмеривающий множитель для вязкости, который, в частности, может совпадать с вязкостью смеси перед ударной волной.

Подставляя (1.3) в (1.2) и убирая черту над безразмерными переменными, находим

$$(1.4) \quad \rho_i V_i = \alpha_i^0, \quad \alpha_2^0 V_1 + \alpha_1^0 V_2 + m_1^0 \frac{T_1}{V_1} + m_2^0 \frac{T_2}{V_2} = 1 + \mu_1 \frac{dV_1}{d\xi} + \mu_2 \frac{dV_2}{d\xi},$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} m_1^0 T_1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} m_2^0 T_2 + \frac{\alpha_1^0}{2} V_1^2 + \frac{\alpha_2^0}{2} V_2^2 = A + \mu_1 V_1 \frac{dV_1}{d\xi} + \mu_2 V_2 \frac{dV_2}{d\xi} +$$

$$+ \lambda_1 \frac{dT_1}{d\xi} + \lambda_2 \frac{dT_2}{d\xi},$$

$$\alpha_1^0 \frac{dV_1}{d\xi} + m_1^0 \frac{d(T_1/V_1)}{d\xi} = K(V_2 - V_1) + \mu_1 \frac{d^2 V_1}{d\xi^2},$$

$$\frac{m_1^0}{\gamma-1} \frac{dT_1}{d\xi} + m_1^0 \frac{T_1}{V_1} \frac{dV_1}{d\xi} = K \kappa_1 (V_2 - V_1)^2 + q(T_2 - T_1) + \mu_1 \left(\frac{dV_1}{d\xi} \right)^2 + \lambda_1 \frac{d^2 T_1}{d\xi^2},$$

где $A = c_4(c_1 + c_2)/c_{3a}^2$, $\alpha_i^0 = c_i/(c_1 + c_2)$ ($i = 1, 2$) — массовая концентрация i -го компонента смеси перед ударной волной.

Для системы (1.4) поставим следующую краевую задачу: найти решение $V_i(\xi)$, $T_i(\xi)$ системы (1.4), которое на бесконечности стремится к постоянным значениям, т. е.

при $\xi \rightarrow -\infty$

$$(1.5) \quad V_i \rightarrow V_i^0, \quad T_i \rightarrow T_i^0, \quad dV_i/d\xi \rightarrow 0, \quad dT_i/d\xi \rightarrow 0,$$

при $\xi \rightarrow +\infty$

$$V_i \rightarrow V_i^1, \quad T_i \rightarrow T_i^1, \quad dV_i/d\xi \rightarrow 0, \quad dT_i/d\xi \rightarrow 0.$$

Необходимым условием существования такого решения является, очевидно, требование, чтобы $V_i = V_i^0$, $T_i = T_i^0$ и $V_i = V_i^1$, $T_i = T_i^1$ были положениями равновесия системы (1.4). Это будет иметь место, если $V_1^0 = V_2^0 = V^0$, $T_1^0 = T_2^0 = T^0 = V^0(1 - V^0)$, $V_1^1 = V_2^1 = V^1 = 2\gamma/(\gamma + 1) - V^0$, $T_1^1 = T_2^1 = T^1 = V^1(1 - V^1)$, $V^0 = \rho_0 D^2 / (\rho_0 D^2 + p_0)$, где ρ_0 , p_0 — плотность и давление смеси перед ударной волной. Доказательство того, что точки (V^0, T^0) , (V^1, T^1) существуют и единственны, легко получить, непосредственно решая систему (1.4), в которой все производные по ξ равны нулю. В дальнейшем будем считать, что коэффициентами теплопроводности можно пренебречь, т. е. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

2. Рассмотрим случай, когда существует сильное взаимодействие по скоростям, т. е. $1/K \ll 1$. Учитывая это предположение, систему уравнений (1.4) в нулевом приближении представим в виде

$$(2.1) \quad V_1 = V_2 = V, \quad V + \frac{1}{\gamma} (m_1^0 T_1 + m_2^0 T_2) = 1 + \mu \frac{dV}{d\xi},$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} (m_1^0 T_1 + m_2^0 T_2) + \frac{1}{2} V^2 = A + \mu V \frac{dV}{d\xi},$$

$$\frac{m_1^0}{\gamma-1} \frac{dT_1}{d\xi} + m_1^0 \frac{T_1}{V} \frac{dV}{d\xi} = q(T_2 - T_1) + \mu_1 \left(\frac{dV}{d\xi} \right)^2, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Интегрируя систему (2.1) при условии, что $V(0) = (V^0 + V^1)/2$, получим

$$(2.2) \quad \xi = \frac{2\mu V^0}{(V^0 - V^1)(\gamma + 1)} \ln(V^0 - V) - \frac{2\mu V^1}{(V^0 - V^1)(\gamma + 1)} \ln(V - V^1) -$$

$$(2.3) \quad T_2 - T_1 = \eta \left(\frac{V^2}{\gamma + 1} - \frac{2}{\gamma + 1} V + \frac{V^0 - V^1}{\gamma - 1} \right) - \eta \theta V^{-(\gamma-1)} e^{-\theta \xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\theta \tau} f(V) d\tau;$$

$$(2.4) \quad T_1 = V(1 - V) + \mu V \frac{dV}{d\xi} - m_2^0 (T_2 - T_1),$$

где $f(V) = V^{(\gamma-1)} \left[\frac{V^2}{\gamma + 1} - \frac{2}{\gamma + 1} V + \frac{V^0 - V^1}{\gamma - 1} \right]$, $\theta = \frac{q(\gamma - 1)}{m_1^0 m_2^0}$,
 $\eta = (m_1^0 \mu - \mu_1)(\gamma^2 - 1) / (2m_1^0 m_2^0 \mu)$.

Соотношение (2.3), используя (2.2), запишем в виде

$$(2.5) \quad T_2 - T_1 = \eta V^{-(\gamma-1)} \int_V^{V^0} u^{(\gamma-2)} \left(\frac{V^0 - u}{V^0 - V} \right)^\beta \left(\frac{V - V^1}{u - V^1} \right)^\alpha (V^0 - u)(u - V^1) du,$$

где $\alpha = 2\mu V^1 \theta / [(\gamma + 1)(V^0 - V^1)]$, $\beta = \alpha V^0 / V^1$.

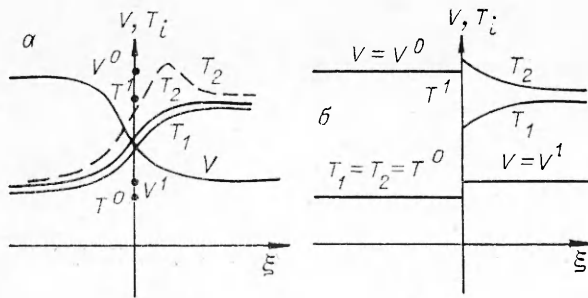
Формулы (2.2) — (2.4) определяют решение системы (2.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.5), что проверяется непосредственным переходом к пределу при $V \rightarrow V^0$ или $V \rightarrow V^1$. Интеграл в (2.5) в общем случае выражается через гипергеометрические функции двух переменных. Из (2.5) очевидно, что при $\eta = 0$ или $m_1^0 \mu_2 = m_2^0 \mu_1$ $T_2 = T_1$, а при $\eta \geq 0$ $T_2 \geq T_1$. Рассмотрим случай $\eta > 0$. Из последнего уравнения системы (2.1) следует, что $dT_1/d\xi > 0$, т. е. $T_1(\xi)$ — монотонно возрастающая функция при $-\infty < \xi < +\infty$. При малых $(V^0 - V)$ из (2.4) и (2.5) легко показать, что $T_2 - T^0 \sim -K_1(V^0 - V)$, а при малых $(V - V^1)$ $T_2 - T^1 \sim -K_2(V - V^1)$, если $\alpha > 1$, и $T_2 - T^1 \sim K_2(V - V^1)^\alpha$, если $\alpha < 1$, где K_1, K_2 — положительные постоянные. Следовательно, при $\alpha < 1$ $dT_2/d\xi$ меняет знак. На фиг. 1, а представлены возможные качественные поведения функций $T_2(\xi)$, $T_1(\xi)$ и $V(\xi)$. Рассмотрим предельные зависимости $T_i(\xi)$ и $V(\xi)$ при $\mu_i \rightarrow 0$. Положив $\mu_1/\mu_2 = k$, в пределе получим

$$V(\xi) = \begin{cases} V^0, & \xi < 0, \\ (V^0 + V^1)/2, & \xi = 0, \\ V^1, & \xi > 0, \end{cases} \quad T_1(\xi) = \begin{cases} T_0, & \xi < 0, \\ T^1, & \xi > 0, \end{cases} \quad T_2(\xi) = \begin{cases} T^0, & \xi < 0, \\ \varphi_1(\xi), & \xi > 0, \end{cases} \quad \varphi_2(\xi), \quad \xi > 0,$$

$$\varphi_1(\xi) = T^1 - \frac{m_1^0 - km_2^0}{m_1^0(k+1)} (V^1)^{-(\gamma-1)} e^{-\theta \xi} [(V^1)^\gamma (1 - V^1) - (V^0)^\gamma (1 - V^0)],$$

$$\varphi_2(\xi) = 2T^1 - \varphi_1(\xi).$$

Из полученных формул при $\eta > 0$ следует, что $T^0 < T_1^* = \varphi_1(0) < T^1$, $T_2^* = \varphi_2(0) > T^1 > T^0$. Предельное поведение $T_2(\xi)$, $T_1(\xi)$ и $V(\xi)$ изображено на фиг. 1, б.



Ф и г. 1

Когда $\eta < 0$, необходимо поменять местами T_2 с T_1 на фиг. 1. Таким образом, в пределе при $\mu_i \rightarrow 0$ решение имеет разрыв с последующей непрерывной зоной релаксации для температур, причем величина разрыва зависит от отношения $\mu_1/\mu_2 = k$.

3. Рассмотрим случай интенсивного теплообмена

между компонентами, т. е. $1/q \ll 1$. При этом предположении последнее уравнение системы (1.4) упрощается и будет иметь вид $T_1 = T_2 = T$. Кроме того, будем считать, что $m_1^0 \sim 0$, $\alpha_1^0 \sim m_1^0$, $\mu_1 \sim m_1^0$ или $\mu_1 \ll m_1^0$, $K \sim m_1^0$. Если $K \gg m_1^0$, то получим сильное взаимодействие по скоростям, рассмотренное в п. 2. Учитывая данные приближения, систему (1.4) после отбрасывания членов более высокого порядка малости преобразуем к виду

$$(3.1) \quad V_2 + \frac{T}{V_2} = 1 + \mu_2 \frac{dV_2}{d\xi}, \quad \frac{V_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} T = A + \mu_2 V_2 \frac{dV_2}{d\xi},$$

$$\sigma \frac{dV_1}{d\xi} + \frac{d(T_1/V_1)}{d\xi} = \tilde{K}(V_2 - V_1) + \tilde{\mu}_1 \frac{d^2 V_1}{d\xi^2}, \quad \sigma = \frac{\alpha_1^0}{m_1^0}, \quad \tilde{K} = \frac{K}{m_1^0}, \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{m_1^0}.$$

Интегрируя первые два уравнения системы (3.1), находим

$$T = V_2(1 - V_2) - [(\gamma + 1)/2](V^0 - V_2)(V_2 - V^1),$$

а $V_2(\xi)$ определяется, как и $V(\xi)$ в п. 2, формулой (2.2), где μ нужно заменить на μ_2 . Будем искать решение последнего уравнения в (3.1) относительно $V_1(\xi)$ в предположении малости, $\varepsilon = V^0 - V^1$, т. е. в приближении слабых ударных волн. Для этого введем новые безразмерные скорости v_i и температуры τ_i по формулам:

$$(3.2) \quad V_i = \frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{\varepsilon}{2} v_i, \quad T_i = \frac{\gamma}{(\gamma+1)^2} + \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)} \varepsilon \tau_i - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

При этом $V_i = V^0$, $T_i = T^0$ соответствуют $v_i = 1$, $\tau_i = -1$, а $V_i = V^1$, $T_i = T^1 - \varepsilon v_i = -1$, $\tau_i = 1$. В результате в нулевом приближении по ε для v_1 , v_2 и $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ будем иметь

$$(3.3) \quad \frac{(\gamma+1)^2}{2\gamma\mu_2} \varepsilon \xi = \ln \frac{1-v_2}{1+v_2}, \quad \tau = -v_2,$$

$$\tilde{\mu}_1 \frac{d^2 v_1}{d\xi^2} - \frac{\gamma\sigma-1}{\gamma} \frac{dv_1}{d\xi} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dv_2}{d\xi} + \tilde{K}(v_2 - v_1) = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение в (3.3), находим

$$(3.4) \quad v_1 = \frac{1}{\tilde{\mu}_1(v_1 - v_2)} \left\{ \left(\tilde{K} + \frac{\gamma-1}{\gamma} v_1 \right) e^{v_1 \xi} \int_{\xi}^{+\infty} v_2 e^{-v_1 t} dt + \right.$$

$$\left. + \left(\tilde{K} + \frac{\gamma-1}{\gamma} v_2 \right) e^{v_2 \xi} \int_{-\infty}^{\xi} v_2 e^{-v_2 t} dt \right\},$$

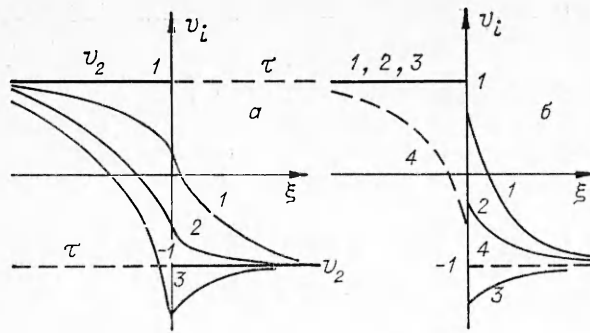
где v_i — корни квадратного уравнения $\tilde{\mu}_1 v^2 + [(1 - \gamma\sigma)/\gamma]v - \tilde{K} = 0$, причем $v_1 > 0$, $v_2 < 0$. Интегралы, входящие в (3.4), выражаются через гипергеометрические функции. Переходя в полученных формулах к пределу по $\mu_2 \rightarrow 0$ и конечному $\tilde{\mu}_1$, имеем

$$(3.5) \quad v_2 = \begin{cases} 1, & \xi < 0, \\ 0, & \xi = 0, \\ -1, & \xi > 0, \end{cases} \quad v_1 = \begin{cases} 1 - 2 \frac{\tilde{K}\gamma + (\gamma-1)v_1}{\gamma\tilde{\mu}_1 v_1(v_1 - v_2)} e^{v_1 \xi}, & \xi < 0, \\ -1 - 2 \frac{\tilde{K}\gamma + (\gamma-1)v_2}{\gamma\tilde{\mu}_1 v_2(v_1 - v_2)} e^{v_2 \xi}, & \xi > 0, \end{cases}$$

$$\tau = -v_2.$$

Кроме того, из (3.5) легко получить, что $\lim_{\xi \rightarrow -0} v_1 = v_1^* = \lim_{\xi \rightarrow +0} v_1$, а

$$\lim_{\xi \rightarrow -0} \frac{dv_1}{d\xi} \neq \lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{dv_1}{d\xi}, \quad \text{где } v_1^* = 1 - 2 \frac{\tilde{K}\gamma + (\gamma-1)v_1}{\gamma\tilde{\mu}_1 v_1(v_1 - v_2)}.$$



Ф и г. 2.

Качественный вид функций (3.5) представлен на фиг. 2, а, где кривые 1—3 соответствуют возможным поведениям функции $v_i(\xi)$: 1 — $\gamma\sigma > 2\gamma - 1$, 2 — $\gamma\sigma < 2\gamma - 1$, 3 — $\tilde{\mu}_1 \tilde{K} \gamma^2 + \gamma(\sigma - 1)(\gamma - 1) < 0$. Если устремить $\mu_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$), то для v_1 получим

$$v_1 = \begin{cases} 1, & \xi < 0, \\ -1 + \frac{2\gamma(1-\sigma)}{1-\gamma\sigma} e^{\gamma\xi}, & \xi > 0 \text{ при } \gamma\sigma > 1, \end{cases}$$

$$v_1 = v_2 \text{ при } \gamma\sigma = 1, \quad v_1 = \begin{cases} 1 - 2 \frac{\gamma(1-\sigma)}{1-\gamma\sigma} e^{\gamma\xi}, & \xi < 0, \\ -1, & \xi > 0 \end{cases}$$

при $\gamma\sigma < 1$. На фиг. 2, б кривыми 1—4 показана функция $v_1(\xi)$ при $\mu_i \rightarrow 0$ соответственно для $\gamma\sigma > 2\gamma - 1$, $\gamma < \gamma\sigma < 2\gamma - 1$, $1 < \gamma\sigma < \gamma$ и $\gamma\sigma < 1$. Таким образом, ударная волна представляет собой разрыв с последующей непрерывной зоной релаксации при $\gamma\sigma > 1$, а при $\gamma\sigma < 1$ непрерывное решение заканчивается скачком.

Рассмотрим случай, когда $\tilde{\mu}_1 \sim 0$, $\mu_2 \gg \tilde{\mu}_1$. Представляя v_1 как функцию от v_2 и выражая ξ через v_2 из (3.3), после несложных преобразований при малых $\tilde{\mu}_1$ получим

$$(3.6) \quad v_1 = v_2 + 2(1 - v_2^2) \frac{\gamma(\sigma - 1)}{\gamma\sigma - 1} \int_0^1 \frac{y^{\alpha\beta} dy}{[y(1 - v_2) + 1 + v_2]^2} \text{ при } \gamma\sigma > 1,$$

$$v_1 = v_2 - 2(1 - v_2^2) \frac{\gamma(\sigma - 1)}{\gamma\sigma - 1} \int_0^1 \frac{y^{-\alpha\beta} dy}{[y(1 + v_2) + 1 - v_2]^2} \text{ при } \gamma\sigma < 1,$$

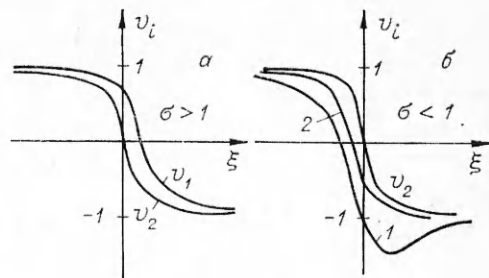
где $\alpha = 2\gamma\mu_2/((\gamma + 1)^2\epsilon)$, $\beta = \tilde{\gamma K}/(\gamma\sigma - 1)$. При этом функции v_1 и v_2 связаны уравнением

$$(3.7) \quad \frac{dv_1}{dv_2} = \frac{(\gamma - 1)(v_2^2 - 1) + 2\alpha\beta(\gamma\sigma - 1)(v_2 - v_1)}{(\gamma\sigma - 1)(v_2^2 - 1)}.$$

Результаты качественного исследования интегральных кривых уравнения (3.7) в плоскости (v_1, v_2) с учетом (3.6), (3.3) представлены на фиг. 3, причем кривые 1, 2 соответствуют функции $v_1(\xi)$: 1 при $\alpha\tilde{K}\gamma < \gamma - 1$, $\gamma\sigma < 1$ или $\alpha\tilde{K}\gamma < \gamma\sigma - 1$, $1 < \gamma\sigma < 2\gamma$, а 2 при нарушении предыдущих неравенств.

Таким образом, при малой концентрации легкого компонента ($\sigma < 1$) возможно немонотонное поведение величины скорости легкого компонента.

4. Рассмотрим структуру ударной волны при малой концентрации одного из компонентов смеси, не предполагая сильного взаимодействия по скоростям или температурам. Пусть, как и в п. 3, $m_1^0 \sim 0$, $\alpha_1^0 \sim m_1^0$, $\mu_1 \sim m_1^0$ или $\mu_1 \ll m_1^0$, $K \sim m_1^0$, $q \sim m_1^0$. Учитывая эти предположения,



Ф и г. 3

систему (4.4) в нулевом приближении по m_1^0 приведем к виду

$$(4.1) \quad V_2 + \frac{T_2^2}{V_2} = 1 + \mu_2 \frac{dV_2}{d\xi}, \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} T_2 + \frac{V_2^2}{2} = A + \mu_2 V_2 \frac{dV_2}{d\xi},$$

$$\sigma \frac{dV_1}{d\xi} + \frac{d(T_1/V_1)}{d\xi} = \tilde{K} (V_2 - V_1) + \tilde{\mu}_1 \frac{d^2 V_1}{d\xi^2},$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{dT_1}{d\xi} + \frac{T_1}{V_1} \frac{dV_1}{d\xi} = \tilde{K} (V_2 - V_1)^2 \kappa_1 + \tilde{q} (T_2 - T_1) + \tilde{\mu}_1 \left(\frac{dV_1}{d\xi} \right)^2,$$

где $\tilde{q} = q/m_1^0$, $\tilde{K} = K/m_1^0$, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1/m_1^0$.

Первые два уравнения системы (4.1) имеют тот же вид, что и в (3.1), и поэтому могут быть проинтегрированы в явном виде. Найдем решение двух последних уравнений из (4.1) в случае слабых ударных волн. Перейдем к новым безразмерным скоростям и температурам по формулам (3.2). Подставляя (3.2) в (4.1) и отбрасывая члены более высокого порядка по ε , получим в нулевом приближении

$$(4.2) \quad v_2 = \frac{1 - e^{\alpha \xi}}{1 + e^{\alpha \xi}}, \quad \tau_2 = -v_2, \quad \alpha = \frac{(\gamma+1)^2 \varepsilon}{2\gamma\mu_2},$$

$$\sigma \frac{dv_1}{d\xi} + \frac{1}{\gamma} \left((\gamma-1) \frac{d\tau_1}{d\xi} - \frac{dv_1}{d\xi} \right) = \tilde{K} (v_2 - v_1) + \tilde{\mu}_1 \frac{d^2 v_1}{d\xi^2},$$

$$\frac{d\tau_1}{d\xi} + \frac{dv_1}{d\xi} = -\tilde{q} (\gamma-1) (v_2 + \tau_1).$$

Интегрируя два последних уравнения (4.2), с учетом граничных условий (1.5) имеем

$$(4.3) \quad v_1 = \frac{v_3 (\gamma \tilde{K} + \tilde{q} (\gamma-1)^2) + \gamma \tilde{K} \tilde{q} (\gamma-1)}{\gamma \tilde{\mu}_1 (v_3 - v_1) (v_3 - v_2)} e^{v_3 \xi} \int_{\xi}^{+\infty} e^{-v_3 t} v_2 dt -$$

$$- \frac{v_2 (\gamma \tilde{K} + \tilde{q} (\gamma-1)^2) + \gamma \tilde{K} \tilde{q} (\gamma-1)}{\gamma \tilde{\mu}_1 (v_2 - v_1) (v_2 - v_3)} e^{v_2 \xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-v_2 t} v_2 dt -$$

$$- \frac{v_1 (\gamma \tilde{K} + \tilde{q} (\gamma-1)^2) + \gamma \tilde{K} \tilde{q} (\gamma-1)}{\gamma \tilde{\mu}_1 (v_1 - v_2) (v_1 - v_3)} e^{v_1 \xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-v_1 t} v_2 dt,$$

$$\tau_1 = -v_1 + \tilde{q} (\gamma-1) e^{-\tilde{q} (\gamma-1) \xi} \int_{-\infty}^{\xi} (v_1 - v_2) e^{\tilde{q} (\gamma-1) t} dt,$$

где $v_1 < v_2 < 0 < v_3$ — корни уравнения

$$y(v) = v^3 + \left[(\gamma-1) \tilde{q} - \frac{\sigma-1}{\tilde{\mu}_1} \right] v^2 - \left[\frac{\tilde{K}}{\tilde{\mu}_1} + \tilde{q} \frac{(\gamma\sigma-1)(\gamma-1)}{\gamma \tilde{\mu}_1} \right] v - \frac{(\gamma-1) \tilde{K} \tilde{q}}{\tilde{\mu}_1} = 0.$$

Порядок расположения корней этого уравнения следует из неравенств: $y(-\infty) < 0$, $y(v = -(\gamma-1)\tilde{q}) > 0$, $y(0) < 0$, $y(+\infty) > 0$. Выражения для v_2 и τ_1 имеют сложный вид и в общем случае могут быть найдены численно или выражены через гипергеометрические функции. Устремляя $\mu_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$) в (4.2), получим

$$v_2(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 0, \\ 0, & \xi = 0, \\ -1, & \xi > 0, \end{cases} \quad \tau_2 = -v_2.$$

Если $\sigma > 1$, то

$$v_1(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 0, \\ -1 + \frac{2}{(1-\sigma)(v_1-v_2)} \left[\left(\frac{\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_1} + \tilde{K} + \frac{\tilde{q}(\gamma-1)^2}{\gamma} \right) e^{v_1\xi} - \left(\frac{\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_2} + \tilde{K} + \frac{\tilde{q}(\gamma-1)^2}{\gamma} \right) e^{v_2\xi} \right], & \xi > 0, \end{cases}$$

где $v_1 < v_2 < 0$ — корни уравнения

$$(4.4) \quad (\sigma - 1)v^2 + \left[\tilde{K} + \tilde{q}(\gamma\sigma - 1) \frac{\gamma-1}{\gamma} \right] v + (\gamma - 1)\tilde{K}\tilde{q} = 0.$$

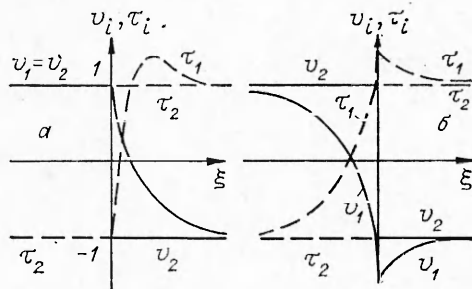
Если $\sigma < 1$, то

$$v_1(\xi) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{(v_3-v_2)(1-\sigma)} \left[\frac{\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_3} + \tilde{K} + \frac{\tilde{q}(\gamma-1)^2}{\gamma} \right] e^{v_3\xi}, & \xi < 0, \\ -1 + \frac{2}{(v_2-v_3)(1-\sigma)} \left[\frac{\tilde{K}\tilde{q}(\gamma-1)}{v_2} + \tilde{K} + \frac{\tilde{q}(\gamma-1)^2}{\gamma} \right] e^{v_2\xi}, & \xi > 0, \end{cases}$$

$$\tau_1(\xi) = \begin{cases} -1 + \frac{v_3}{v_2 + \tilde{q}(\gamma-1)} (1 - v_1), & \xi < 0, \\ 1 - \frac{v_2}{v_2 + \tilde{q}(\gamma-1)} (1 + v_1), & \xi > 0, \end{cases}$$

где $v_2 < 0$ и $v_3 > 0$ — корни уравнения (4.4) при $\sigma < 1$.

Качественное поведение функций $v_i(\xi)$, $\tau_i(\xi)$ при $\mu_i \rightarrow 0$ представлено на фиг. 4, а, б соответственно при $\sigma > 1$ и $\sigma < 1$. Таким образом, в случае



Фиг. 4

малой концентрации тяжелого компонента (фиг. 4, а) смесь вплоть до фронта ударной волны находится в равновесии, а затем скорость и температура тяжелого компонента, не претерпевая скачка, релаксируют к равновесным значениям. При этом существует немонотонность распределения температуры тяжелого компонента в ударной волне. В случае же малой концентрации легкого компонента смесь по обе стороны удар-

ного перехода находится в неравновесном состоянии, асимптотически стремясь к равновесию при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Профиль температуры и скорости легкого компонента является немонотонным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руев Г. А., Фомин В. М., Яненко Н. Н. Структура ударной волны в смеси газов. — ДАН, 1981, т. 261, № 2.
2. Струминский В. В. Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей. — ПММ, 1974, т. 38, № 2.

Поступила 22/VIII 1983 г.