УДК 519.642.8

Об итерационных методах решения уравнений с накрывающими отображениями*

Т.В. Жуковская[1], Е.С. Жуковский[2,3]

[1]Тамбовский государственный технический университет, ул. Советская, 106, Тамбов, 392000

[2]Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, ул. Интернациональная, 33, Тамбов, 392000

[3]Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198
E-mails: zhukovskaia@mail.ru (Жуковская Т.В.), zukovskys@mail.ru (Жуковский Е.С.)

Жуковская Т.В., Жуковский Е.С. Об итерационных методах решения уравнений с накрывающими отображениями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 357–369.

Предлагается итерационный метод решения уравнения $\Upsilon(x,x) = y$, в котором отображение Υ действует в метрических пространствах, является накрывающим по первому аргументу и липшицевым по второму. Каждый следующий элемент x_{i+1} последовательности итераций определяется через предыдущий как решение уравнения $\Upsilon(x,x_i) = y_i$, где y_i может быть любым достаточно близким к y элементом. Получены условия сходимости, даны оценки погрешности. Предлагаемый метод является развитием итерационного метода А.В. Арутюнова нахождения точек совпадения отображений. Для практической реализации метода в линейных нормированных пространствах для определения x_{i+1} предлагается выполнить один шаг методом Ньютона–Канторовича. Полученный таким образом метод, в случае если имеет место представление $\Upsilon(x,u) = \psi(x) - \phi(u)$, совпадает с итерационным методом, предложенным в работах А.И. Зинченко, М.А. Красносельского, И.А. Кусакина.

DOI: 10.15372/SJNM20160402

Ключевые слова: *итерационные методы решения уравнений, накрывающие отображения метрических пространств, приближенное решение.*

Zhukovskaia T.V., Zhukovskiy E.S. On iterative methods for solving equations with covering mappings // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 4. — P. 357–369.

In this paper we propose an iterative method for solving the equation $\Upsilon(x,x) = y$, where a mapping Υ acts in metric spaces, is covering in the first argument and Lipschitzian in the second one. Each subsequent element x_{i+1} of a sequence of iterations is defined by the previous one as a solution to the equation $\Upsilon(x,x_i) = y_i$, where y_i can be an arbitrary point sufficiently close to y. The conditions for convergence and error estimates have been obtained. The method proposed is an iterative development of the Arutyunov method for finding coincidence points of mappings. In order to determine x_{i+1} it is proposed to perform one step using the Newton–Kantorovich method or the practical implementation of the method in linear normed spaces. The obtained method of solving the equation of the form $\Upsilon(x,u) = \psi(x) - \phi(u)$ coincides with the iterative method proposed by A.I. Zinchenko, M.A. Krasnosel'skii, I.A. Kusakin.

Keywords: *iterative methods for solving equations, covering mappings in metric spaces, approximate solution.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-10021).

Точкой совпадения однозначных отображений ψ и φ называют решение уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x), \tag{1}$$

а точкой совпадения многозначных отображений Ψ и Φ — элемент, удовлетворяющий соотношению $\Psi(x) \cap \Phi(x) \neq \emptyset$. В работах А.В. Арутюнова [1, 2] предложен итерационный метод нахождения точек совпадения накрывающего и липшицева отображений. Рассмотрены не только однозначные, но и многозначные отображения, действующие из некоторого полного метрического пространства (X, ρ_X) в некоторое метрическое пространство (Y, ρ_Y).

В развитие этого метода в данной статье предлагается итерационный метод нахождения решения $x \in X$ уравнения

$$F(x) \doteq \Upsilon(x, x) = y \tag{2}$$

при заданных правой части $y \in Y$ и отображении $\Upsilon : X^2 \to Y$, обладающим по первому аргументу свойством аналогичным накрыванию, а по второму — аналогичным липшицевости. Уравнение вида (2) представляет интерес для приложений, так как в таком виде можно записать неявные дифференциальные и интегральные уравнения (и в статье приведен соответствующий пример). В метрических пространствах уравнения (1), (2) независимы; в линейных метрических пространствах уравнение (1) может быть записано в виде

$$\psi(x) - \varphi(x) = 0, \tag{3}$$

т. е. является частным случаем уравнения (2), где отображение Υ определяется равенством $\Upsilon(x_1, x_2) = \psi(x_1) - \varphi(x_2)$. Отметим, что при исследовании и решении уравнения (3) предлагаемый здесь метод имеет несколько более широкие границы применимости, чем метод [1, 2].

1. Итерационный метод

Обозначим через $B_X(u, r)$ замкнутый шар $\{x \in X : \rho_X(x, u) \leq r\}$ с центром в точке u радиуса $r>0$ в пространстве X; символом $\overline{U}$ обозначим замыкание множества $U \subset X$. Аналогичные обозначения будем использовать для замкнутого шара и замыкания множества в пространстве Y и в других метрических пространствах.

Напомним, что отображение $\phi : X \to Y$ называется *β-липшицевым*, $\beta \geq 0$, если для любых $u, v \in X$ выполнено неравенство

$$\rho_Y\big(\phi(u), \phi(v)\big) \leq \beta \rho_X(u, v).$$

Определение 1 [3]. Пусть $\alpha > 0$. Отображение $\psi : X \to Y$ называется *α-накрывающим*, если для любого $r > 0$ и любого $u \in X$ имеет место включение

$$\psi(B_X(u, r)) \supset B_Y(\psi(u), \alpha r).$$

В работах [4, 5] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть пространство X полное. Если отображение $\Upsilon : X^2 \to Y$ является α-накрывающим и непрерывным по первому аргументу, β-липшицевым по второму аргументу, причем $\beta < \alpha$, то при любом $x_0 \in X$ можно построить последовательность $\{x_i\} \subset X$ такую, что*

$$\Upsilon(x_{i+1}, x_i) = y, \quad \rho_X(x_{i+1}, x_i) \le \frac{1}{\alpha}\rho_Y\big(\Upsilon(x_i, x_i), y\big), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

и эта последовательность сходится к решению $x = \xi$ *уравнения* (2), *удовлетворяющему оценке*

$$\rho_X(\xi, x_0) \le \frac{1}{\alpha - \beta}\rho_Y\big(\Upsilon(x_0, x_0),\, y\big). \tag{5}$$

Использование таких итераций для приближенного решения уравнения (2) требует на каждом шаге нахождения решения $x = x_{i+1}$ уравнения

$$\Upsilon(x, x_i) = y \tag{6}$$

при заданных x_i, y. Но на практике, как правило, точное решение получить не удается. Возникает проблема использования итераций в случае определения x_{i+1} с некоторой погрешностью.

Итак, пусть заданы $\delta \ge 0$, $\alpha > 0$ и $y \in Y$. Предположим, что найдется элемент $x_0 \in X$, для которого можно определить элемент $x_1 \in X$, отвечающий требованиям:

$$\begin{aligned} \rho_Y\big(\Upsilon(x_1, x_0), y\big) &\le \delta\rho_Y\big(\Upsilon(x_0, x_0), y\big), \\ \rho_X(x_1, x_0) &\le \frac{1}{\alpha}\rho_Y\big(\Upsilon(x_0, x_0), y\big). \end{aligned} \tag{7}$$

Для найденного элемента $x_1 \in X$ пусть найдется $x_2 \in X$ такой, что

$$\rho_Y\big(\Upsilon(x_2, x_1), y\big) \le \delta\rho_Y\big(\Upsilon(x_1, x_1), y\big), \quad \rho_X(x_2, x_1) \le \frac{1}{\alpha}\rho_Y\big(\Upsilon(x_1, x_1), y\big).$$

Предположим, что на каждом следующем шаге можно аналогично найти $x_3, x_4, \ldots$. Таким образом определена последовательность итераций, отвечающая требованиям:

$$\begin{aligned} \rho_Y\big(\Upsilon(x_{i+1}, x_i), y\big) &\le \delta\rho_Y\big(\Upsilon(x_i, x_i), y\big), \\ \rho_X(x_{i+1}, x_i) &\le \frac{1}{\alpha}\rho_Y\big(\Upsilon(x_i, x_i), y\big), \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{8}$$

Приведем условия существования последовательности, обладающей свойством (8).

Очевидно, итерации (4) являются частным случаем итераций (8) при $\delta = 0$. Следовательно, если отображение $\Upsilon : X^2 \to Y$ является α-накрывающим по первому аргументу, то последовательность (8) существует, причем ее начальное значение x_0 может быть любым. Последовательность (8) может быть построена и в случае, когда отображение Υ не обладает свойством накрывания по первому аргументу.

Определение 2. Пусть заданы $0 \le \delta < 1$, $\alpha > 0$, $y \in Y$ и $U \subset X$. Будем говорить, что отображение $\Upsilon : X^2 \to Y$ удовлетворяет *условию* $\mathfrak{Cov}(U, y, \delta, \alpha)$, если для любого $u \in U$ существует такой $x \in U$, что

$$\rho_Y\big(\Upsilon(x, u), y\big) \le \delta\rho_Y\big(\Upsilon(u, u), y\big) \,\&\, \rho_X(x, u) \le \frac{1}{\alpha}\rho_Y\big(\Upsilon(u, u), y\big).$$

Лемма 1. *Если выполнено условие* $\mathfrak{Cov}(U, y, \delta, \alpha)$, *то существует последовательность, обладающая свойством* (8).

Доказательство. Для любого $x_0 \in U$ из условия $\mathfrak{Cov}(U, y, \delta, \alpha)$, полагая $u = x_0$, найдем $x \in U$ и определим $x_1 = x$. Для найденного элемента будет выполнено (7). Аналогично на каждом следующем шаге, полагая $u = x_i$, из условия $\mathfrak{Cov}(U, y, \delta, \alpha)$ найдем $x \in U$ и зададим $x_{i+1} = x$. Искомая последовательность построена. □

Замечание 1. Очевидно, верно и обратное к лемме 1 утверждение: *из существования последовательности* $\{x_i\}$, *отвечающей требованиям* (8), *следует, что отображение* $\Upsilon : X^2 \to Y$ *удовлетворяет условию* $\mathfrak{Cov}(U, y, \delta, \alpha)$, *где* $U = \{x_i\}$.

Условие $\mathfrak{Cov}(U, y, \delta, \alpha)$ означает, что при каждом $u \in U$ существует удовлетворяющее требуемым оценкам "приближенное решение" уравнения $\Upsilon(x, u) = y$, т. е. решение уравнения $\Upsilon(x, u) = \widetilde{y}$ с правой частью $\widetilde{y}$, мало отличающейся от y (при этом "настоящее" решение может не принадлежать U или не отвечать оценке, или даже не существовать). Отметим, что если для любого $u \in X$ отображение $\Upsilon(\cdot, u) : X \to Y$, α-накрывающее, то отображение $\Upsilon : X^2 \to Y$ удовлетворяет условию $\mathfrak{Cov}(X, y, 0, \alpha)$ при всех $y \in Y$. Следующий пример показывает, что отображение $\Upsilon : X^2 \to Y$, удовлетворяющее условию $\mathfrak{Cov}(X, y, \delta_0, \alpha_0)$ с некоторыми $\delta_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ при всех $y \in Y$, как отображение первого аргумента может не являться α-накрывающим ни при каком α.

Пример 1. Пусть $\delta_0 > 0$. Отображение $\Upsilon : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, определяемое равенством
$$\Upsilon(x, u) = x + \delta_0 u, \tag{9}$$
при любом $y \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию $\mathfrak{Cov}(\mathbb{R}_+, y, \delta_0, 1)$. Это легко проверить: следует выбрать $x = 0$ при $0 \le y \le \delta_0 u$ и $x = y - \delta_0 u$ при $y > \delta_0 u$. В то же время $0 \notin \Upsilon(\mathbb{R}_+, u)$ при любом $u \ne 0$, отображение $\Upsilon(\cdot, u) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ не является сюръективным и, следовательно, накрывающим.

Теорема 2. *Пусть пространство* X *полное*; *существует последовательность* $\{x_i\}$, *все члены которой при некоторых значениях* $\alpha > 0$, $\delta \ge 0$ *удовлетворяют неравенствам* (8); *выполнено условие*
$$\exists \beta \ge 0 \, \forall u, v \in X \quad \rho_Y\big(\Upsilon(u, v), \, \Upsilon(u, u)\big) \le \beta \rho_X(u, v), \tag{10}$$
причем числа α, δ, β *удовлетворяют неравенству*
$$\frac{\beta}{\alpha} + \delta < 1; \tag{11}$$
и пусть отображение $F : X \to Y$, $F(x) \doteq \Upsilon(x, x)$ *имеет замкнутый график. Тогда последовательность* $\{x_i\}$ *сходится к решению* $x = \xi$ *уравнения* (2), *и для этого решения справедлива оценка*
$$\rho_X(\xi, x_0) \le \frac{1}{\alpha(1 - \delta) - \beta} \rho_Y\big(\Upsilon(x_0, x_0), y\big). \tag{12}$$

Доказательство. Покажем, что последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной. Вследствие условий (8), (10) имеем неравенства:
$$\begin{aligned} \rho_Y\big(\Upsilon(x_{i+1}, x_{i+1}), y\big) &\le \rho_Y\big(\Upsilon(x_{i+1}, x_{i+1}), \Upsilon(x_{i+1}, x_i)\big) + \rho_Y\big(\Upsilon(x_{i+1}, x_i), y\big) \\ &\le \beta \rho_X\big(x_{i+1}, x_i\big) + \delta \rho_Y\big(\Upsilon(x_i, x_i), y\big) \le \Big(\frac{\beta}{\alpha} + \delta\Big) \rho_Y\big(\Upsilon(x_i, x_i), y\big). \end{aligned}$$

Используя эту оценку, получаем

$$\rho_Y\big(\Upsilon(x_i,x_i),y\big) \le \Big(\frac{\beta}{\alpha}+\delta\Big)^i \rho_Y\big(\Upsilon(x_0,x_0),y\big),$$
$$\rho_X(x_{i+1},x_i) \le \frac{1}{\alpha}\rho_Y\big(\Upsilon(x_i,x_i),\,y\big) \le \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{\beta}{\alpha}+\delta\Big)^i \rho_Y\big(\Upsilon(x_0,x_0),\,y\big).$$

Следовательно, при любом натуральном j выполнены неравенства:

$$\begin{aligned}\rho_X(x_{i+j},x_i) &\le \sum_{k=i}^{i+j-1} \rho_X(x_{k+1},x_k)\\ &\le \sum_{k=i}^{i+j-1} \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{\beta}{\alpha}+\delta\Big)^k \rho_Y\big(\Upsilon(x_0,x_0),y\big)\\ &\le \frac{1}{\alpha(1-\delta)-\beta}\Big(\frac{\beta}{\alpha}+\delta\Big)^i \rho_Y\big(\Upsilon(x_0,x_0),y\big).\end{aligned} \tag{13}$$

Из полученных неравенств в силу предположения (11) следует, что последовательность $\{x_i\}$ фундаментальная. Вследствие полноты пространства X эта последовательность сходится к некоторому элементу $\xi \in X$. Кроме того, $\rho_Y\big(\Upsilon(x_i,x_i),\,y\big) \to 0$ при $i \to \infty$, и так как график отображения F замкнут, имеем $\Upsilon(\xi,\xi) = y$.

В завершение доказательства замечаем, что из (13) получаем неравенство

$$\rho_X(x_j,x_0) \le \frac{1}{\alpha(1-\delta)-\beta}\rho_Y\big(\Upsilon(x_0,x_0),\,y\big), \tag{14}$$

прямым следствием которого является оценка (12). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть пространство X полное*; *отображение Υ удовлетворяет условиям* $\mathfrak{Cov}(U,y,\delta,\alpha)$, (10), (11); *и пусть график отображения F замкнут. Тогда при любом $x_0 \in U$ существует последовательность $\{x_i\} \subset U$, отвечающая требованиям* (8); *эта последовательность сходится к решению $x = \xi$ уравнения* (2), *и для этого решения справедлива оценка* (12).

Замечание 2. Условие замкнутости графика отображения F в формулировке теоремы 2 можно ослабить, заменив предположением замкнутости графика сужения этого отображения на шар $B_X(x_0,r)$ радиуса $r = \big(\alpha(1-\delta)-\beta\big)^{-1}\rho_Y\big(\Upsilon(x_0,x_0),\,y\big)$. Соответственно в следствии 1 достаточно потребовать замкнутости графика сужения F на множество $\overline{U} \cap B_X(x_0,r)$. Аналогично выполнения неравенства (10) в теореме 2 (в следствии 1) можно требовать при любых u,v, выбираемых не из всего пространства X, а из шара $B_X(x_0,r)$ (множества $\overline{U} \cap B_X(x_0,r)$). Эти уточнения следуют из неравенства (14), установленного при доказательстве теоремы 2.

При практической реализации рассматриваемого метода часто приходится ограничиваться конечным числом итераций. Если принять за приближенное решение i-ю итерацию, то из неравенства (13) при $j \to \infty$ получаем следующую оценку погрешности:

$$\rho_X(\xi,x_i) \le \frac{1}{\alpha(1-\delta)-\beta}\Big(\frac{\beta}{\alpha}+\delta\Big)^i \rho_Y\big(\Upsilon(x_0,x_0),\,y\big). \tag{15}$$

Таким образом, в качестве приближенного решения, погрешность которого не превышает заданного значения $\varepsilon > 0$, можно принимать $x_{I(\varepsilon)}$, где

$$I(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon - \ln \rho_Y \big(\Upsilon(x_0, x_0),\, y \big) + \ln \big(\alpha(1-\delta) - \beta \big)}{\ln \left(\frac{\beta}{\alpha} + \delta \right)} \right] + 1 \tag{16}$$

(здесь скобками [ ] обозначена целая часть действительного числа). Соотношения (15), (16) аналогичны полученным в [1] оценкам погрешности итерационного метода нахождения точек совпадения двух отображений.

Сравнивая теорему 2 с теоремами о разрешимости уравнения (2) работ [4, 5], в частности с теоремой 1, заметим, что предположения теоремы 2 менее обременительные (платой за это улучшение является более грубая по сравнению с (5) оценка (12) решения). Проиллюстрируем условия теоремы 2.

Пример 2. Пусть $0 < \delta_0 < 1/2$. В пространстве $\mathbb{R}_+$ рассмотрим простейшее уравнение

$$x + \delta_0 x = 0,$$

имеющее, очевидно, единственное решение $x = 0$. Это уравнение запишем в виде (2), задав отображение $\Upsilon : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ равенством (9). Как показано в примере 1, это отображение удовлетворяет условию $\mathfrak{Cov}(\mathbb{R}_+, 0, \delta_0, 1)$, поэтому согласно лемме 1, можно построить последовательность (8). Для этого отображения выполнены и остальные предположения теоремы 2: условие (10) с коэффициентом $\beta = \delta_0$, неравенство (11) и замкнутость графика F (более того, отображение F непрерывно). В теореме 2, в отличие от утверждений работ [4, 5], не требуется, чтобы правая часть y принадлежала образу $\Upsilon(X, u)$ при любом $u \in X$. В данном случае $0 \notin \Upsilon(\mathbb{R}_+, u)$ при любом $u \neq 0$, и это не позволяет применять результаты упомянутых работ.

Следующий пример иллюстрирует возможности приложений теоремы 2 к исследованию и приближенному решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной искомой функции

$$f(t, x, \dot{x}) = 0, \quad x(a) = A. \tag{17}$$

Задачу (17) можно записать в виде интегрального уравнения

$$f\left(t, A + \int_a^t z(s)\, ds, z(t) \right) = 0 \tag{18}$$

относительно неизвестной функции $z = \dot{x}$. Уравнение (18) это уравнение вида (2) с отображением Υ, определяемым равенством:

$$\big(\Upsilon(v, u) \big)(t) \doteq f\left(t,\ A + \int_a^t u(s)\, ds, v(t) \right) \tag{19}$$

и действующим в некоторых функциональных пространствах, выбираемых исходя из свойств функции f. Таким образом, для исследования задачи Коши (17) надо проверить, удовлетворяет ли отображение (19) условиям теоремы 2.

Пример 3. Пусть заданы действительные числа a, A и измеримая функция $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу:

$$|\dot{x}(t)| + x(t) = y(t), \quad x(a) = A. \tag{20}$$

Поставим в соответствие каждой паре положительных чисел ε, σ множество $I(\varepsilon, \sigma) = \{t \in [a, a+\sigma] : y(t) \leq A - \varepsilon\}$, которое измеримо вследствие измеримости функции y. В случае, если

$$\exists\varepsilon_0>0,\quad \exists\sigma_0>0\quad \forall\sigma\in(0,\sigma_0),\quad \mu(I(\varepsilon_0,\sigma))>0,$$

задача (20) не имеет решений при $t>a$. Действительно, если бы решение $x(t)$ при $t>a$ существовало, то (вследствие непрерывности функции x) на некотором отрезке $[a,a+\sigma]$, $\sigma\in(0,\sigma_0)$, было бы выполнено неравенство $x(t)>A-\varepsilon_0$; и поэтому $|\dot x(t)|+x(t)>A-\varepsilon_0\geq y(t)$, $t\in I(\varepsilon_0,\sigma)$.

А теперь на основании теоремы 1 докажем, что при любых числах a, A и произвольной измеримой существенно ограниченной функции y таких, что

$$\exists\sigma_0>0\quad \forall t\in[a,a+\sigma_0],\quad y(t)\geq A,$$

задача Коши (20) имеет на отрезке $[a,a+\delta]$, $\delta=\min\{\sigma_0,3^{-1}\}$, решение — абсолютно непрерывную на этом отрезке функцию с существенно ограниченной производной. Получим также итерационный метод нахождения такого решения, дадим оценку решения и поясним, почему к задаче (20) неприменимы результаты [1–5].

Стандартно обозначим через $L_\infty=L_\infty[a,a+\delta]$ банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций $z:[a,a+\delta]\to\mathbb{R}$ с нормой $\|z\|_{L_\infty}=\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,a+\delta]}|z(t)|$ и соответственно метрикой $\rho_{L_\infty}(z_1,z_2)=\|z_1-z_2\|_{L_\infty}$. Относительно $z=\dot x\in L_\infty$ запишем задачу (20) в виде уравнения

$$|z(t)|+A+\int_a^t z(s)\,ds=y(t),\quad t\in[a,a+\delta]. \tag{21}$$

Определим отображение

$$\Upsilon:L_\infty\times L_\infty\to L_\infty\,,\quad \big(\Upsilon(v,u)\big)(t)\doteq|v(t)|+A+\int_a^t u(s)\,ds,$$

и покажем, что оно удовлетворяет условию $\mathfrak{Cov}(L_\infty,y,\delta,1)$.

Для произвольного $u\in L_\infty$ положим

$$T_-(u)=T_-\doteq\left\{t\in[a,a+\delta]:\ A+\int_a^t u(s)\,ds<y(t)\right\},$$
$$T_+(u)=T_+\doteq\left\{t\in[a,a+\delta]:\ A+\int_a^t u(s)\,ds\geq y(t)\right\}$$

и определим $v\in L_\infty$ соотношениями:

$$v(t)=\begin{cases}\operatorname{sign}[u(t)]\left(y(t)-A-\displaystyle\int_a^t u(s)\,ds\right) & \text{при } t\in T_-\,,\\ 0 & \text{при } t\in T_+\,,\end{cases}$$

где $\operatorname{sign}[x]=\begin{cases}1, & \text{если } x\geq 1,\\ -1, & \text{если } x<1.\end{cases}$ Покажем, что для этого элемента выполнено

$$\rho_{L_\infty}\big(\Upsilon(v,u),\,y\big)\leq\delta\rho_{L_\infty}\big(\Upsilon(u,u),\,y\big), \tag{22}$$
$$\rho_{L_\infty}(v,u)\leq\frac{1}{\alpha}\rho_{L_\infty}\big(\Upsilon(u,u),\,y\big). \tag{23}$$

Имеем $\rho_{L_\infty(T_-)}\big(\Upsilon(v,u),\,y\big)=0$. Далее, при $t\in T_+$ выполнено

$$0 \le \big(\Upsilon(v,u)\big)(t) - y(t) = A + \int_a^t u(s)\,ds - y(t) \le \int_a^t u(s)\,ds \le \delta\|u\|_{L_\infty},$$
$$\big(\Upsilon(u,u)\big)(t) - y(t) = |u(t)| + A + \int_a^t u(s)\,ds - y(t) \ge |u(t)|,$$

поэтому $\rho_{L_\infty(T_+)}\big(\Upsilon(v,u),\, y\big) \le \delta\|u\|_{L_\infty}$, $\rho_{L_\infty(T_+)}\big(\Upsilon(u,u),\, y\big) \ge \|u\|_{L_\infty}$ и, следовательно, $\rho_{L_\infty(T_+)}\big(\Upsilon(v,u),\, y\big) \le \delta\rho_{L_\infty(T_+)}\big(\Upsilon(u,u),\, y\big)$. Таким образом, неравенство (22) справедливо.

Теперь вследствие определения v получаем

$$\begin{aligned}
\rho_{L_\infty(T_-)}\big(\Upsilon(u,u),y\big) &= \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T_-}\left|\,|u(t)| + A + \int_a^t u(s)\,ds - y(t)\right| \\
&= \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T_-}\big|\,|u(t)| - \operatorname{sign}[u(t)]v(t)\big| = \rho_{L_\infty(T_-)}(v,u), \\
\rho_{L_\infty(T_+)}\big(\Upsilon(u,u),y\big) &= \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T_+}\left|\,|u(t)| + A + \int_a^t u(s)\,ds - y(t)\right| \\
&\ge \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T_+}|u(t)| = \rho_{L_\infty(T_+)}(v,u).
\end{aligned}$$

Таким образом, выполнено неравенство (23) с константой $\alpha = 1$. Доказано, что отображение Υ удовлетворяет условию $\mathfrak{Cov}(L_\infty, y, \delta, 1)$.

Предположение (10) выполнено, так как при любых $v, u_1, u_2 \in L_\infty$ имеем

$$\rho_{L_\infty}\big(\Upsilon(v,u_2), \Upsilon(v,u_1)\big) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,a+\delta]}\left|\int_a^t u_2(s) - u_1(s)\,ds\right| \le \delta\rho_{L_\infty}(u_2,u_1).$$

Условие (11) также справедливо, поскольку $\alpha = 1$, $\beta = \delta \le 3^{-1}$. И, наконец, отображение $F : L_\infty \to L_\infty$, $F(u) = \Upsilon(u,u)$ непрерывно, т. е. все условия теоремы 2 выполнены.

Из теоремы 2 следует, что последовательность итераций

$$\forall z_0 \in L_\infty, \quad z_{i+1} = \begin{cases} \operatorname{sign}[z_i(t)]\left(y(t) - A - \displaystyle\int_a^t z_i(s)\,ds\right) & \text{при } t \in T_-(z_i), \\ 0 & \text{при } t \in T_+(z_i), \end{cases}$$

сходится по метрике L_∞ к решению z уравнения (21), т. е. к производной $\dot{x}$ решения x задачи (20); имеет место оценка

$$\rho_{L_\infty}(\dot{x}, z_0) \le 3\left\|z_0(\cdot) + A + \int_a^{(\cdot)} z_0(s)\,ds - y(\cdot)\right\|_{L_\infty}.$$

Результаты [4, 5] к исследованию уравнения (21) применить не удается, так как элемент $y \in L_\infty$ не принадлежит множеству $\Upsilon(L_\infty, u)$ при тех $u \in L_\infty$, для которых $\mu\big(T_+(u)\big) > 0$. Теоремы о точке совпадения [1–3] также использовать нельзя, хотя в данном случае уравнение (21) записывается в виде

$$|z(t)| = y(t) - A - \int_a^t z(s)\,ds, \quad t \in [a, a+\delta],$$

т. е. сводится к задаче о точке совпадения отображений

$$\psi, \phi : L_\infty \to L_\infty, \quad \big(\psi(u)\big)(t) \doteq |u(t)|, \quad \big(\phi(u)\big)(t) \doteq y(t) - A - \int_a^t u(s)\,ds.$$

Однако не выполнено предположение $\phi(u) \in \psi(L_\infty)$, существенно используемое в цитируемых работах и означающее для данных отображений, что

$$y(t) - A - \int_a^t u(s)\,ds \in \mathbb{R}_+, \quad t \in [a, a+\delta].$$

Это включение нарушается, если $\mu\big(T_+(u)\big) > 0$.

2. Одна реализация предлагаемого итерационного метода

Для реализации итерационного метода необходимо предложить способ приближенного решения уравнения (6). Здесь мы предлагаем с этой целью воспользоваться одним шагом известного метода Ньютона–Канторовича (см., например, [6, 7]).

Итак, пусть теперь X и Y — линейные нормированные пространства. Не ограничивая общность, можем считать, что $y = 0$, т. е. будем рассматривать уравнение

$$\Upsilon(x, x) = 0. \tag{24}$$

Для приближенного решения уравнения (6) (с правой частью $y = 0$) мы будем предполагать, что отображение $\Upsilon(\cdot, x_i) : X \to Y$ дифференцируемо по Фреше в окрестности точки x_0, и производная $\Upsilon'_x(x, x_i)\big|_{x=x_0} = \Upsilon'_x(x_0, x_i)$ невырождена. Приближенное решение уравнения (6) будем определять формулой

$$x_{i+1} = x_i - \big(\Upsilon'_x(x_0, x_i)\big)^{-1}\Upsilon(x_i, x_i). \tag{25}$$

Применим теорему 2 к итерациям (25) и сформулируем условия их сходимости к решению уравнения (24).

Теорема 3. *Пусть пространство X является банаховым; определены числа $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, связанные соотношением $\beta + \gamma < \alpha$, и такие, что выполнены условия:*
• *при любых $u, v \in B \doteq B_X(x_0, r)$, $r \doteq (\alpha - \beta - \gamma)^{-1}\|\Upsilon(x_0, x_0)\|_Y$ справедливо неравенство*

$$\big\|\Upsilon(u, v) - \Upsilon(u, u)\big\|_Y \leq \beta\|u - v\|_X; \tag{26}$$

• *при любом $u \in B$ отображение $\Upsilon(\cdot, u) : X \to Y$ дифференцируемо по Фреше в шаре B и производная удовлетворяет неравенству*

$$\forall x \in B \quad \|\Upsilon'_x(x, u) - \Upsilon'_x(x_0, u)\|_Y \leq \gamma, \tag{27}$$

а в точке x_0 производная $\Upsilon'_x(x_0, u)$ невырождена и выполнена оценка

$$\forall u \in B \quad \big\|\big(\Upsilon'_x(x_0, u)\big)^{-1}\big\|_{Y \to X} \leq \frac{1}{\alpha}. \tag{28}$$

Тогда определенная формулой (25) последовательность $\{x_i\}$ удовлетворяет условиям (8) с $\delta = \alpha^{-1}\gamma$ и сходится к решению $x = \xi$ уравнения (24), для этого решения справедлива оценка

$$\|\xi - x_0\|_X \leq \frac{1}{\alpha - \beta - \gamma}\rho_Y\|\Upsilon(x_0, x_0)\|_Y.$$

Доказательство. Покажем, что последовательность $\{x_i\}$ удовлетворяет условиям (8) с $\delta = \alpha^{-1}\gamma$.

При $i = 0$ из соотношения (25), учитывая предположение (28), получаем

$$\|x_1 - x_0\|_X = \| - \big(\Upsilon'_x(x_0, x_0)\big)^{-1}\Upsilon(x_0, x_0)\|_X \leq \frac{1}{\alpha}\|\Upsilon(x_0, x_0)\|_Y. \tag{29}$$

Оценим далее величину $\|\Upsilon(x_1, x_0)\|_Y$, воспользовавшись очевидным равенством

$$\|\Upsilon(x_1, x_0)\|_Y = \|\big(\Upsilon(x_1, x_0) - \Upsilon(x_0, x_0)\big) + \Upsilon(x_0, x_0)\|_Y. \tag{30}$$

Согласно формуле конечных приращений (см. [5, с. 649]), при некотором $\lambda \in (0, 1)$ имеем

$$\Upsilon(x_1, x_0) - \Upsilon(x_0, x_0) = \Upsilon'_x(x_0 + \lambda(x_1 - x_0),\, x_0)(x_1 - x_0),$$

а из соотношения (25) при $i = 0$ следует

$$\Upsilon(x_0, x_0) = -\Upsilon'_x(x_0, x_0)(x_1 - x_0).$$

Подставим полученные выражения в (30) и найдем

$$\begin{aligned}\|\Upsilon(x_1, x_0)\|_Y &= \|\Upsilon'_x(x_0 + \lambda(x_1 - x_0), x_0)(x_1 - x_0) - \Upsilon'_x(x_0, x_0)(x_1 - x_0)\|_Y \\ &\leq \|\Upsilon'_x(x_0 + \lambda(x_1 - x_0), x_0) - \Upsilon'_x(x_0, x_0)\|_{X\to Y}\|x_1 - x_0\|_X.\end{aligned}$$

Теперь вследствие предположения (27) и неравенства (31) получим требуемую оценку

$$\|\Upsilon(x_1, x_0)\|_Y \leq \gamma\|x_1 - x_0\|_X \leq \frac{\gamma}{\alpha}\|\Upsilon(x_0, x_0)\|_Y.$$

Итак, при $i = 0$ выполнены неравенства (8).

Пусть первые k членов x_i, $i = \overline{1, k}$, последовательности, определяемой соотношением (25) с $\delta = \alpha^{-1}\gamma$, удовлетворяют неравенствам (8). Докажем, что эти неравенства выполнены и для x_{k+1}.

В силу неравенств (8), как показано при доказательстве теоремы 2, для x_i, $i = \overline{1, k}$, справедлива оценка (14), и таким образом $x_i \in B$. Это позволяет в следующих ниже выкладках пользоваться дифференцируемостью отображения $\Upsilon(\cdot, x_k) : X \to Y$ и предположениями (27), (28).

Итак, из соотношения (25), учитывая предположение (28), получаем

$$\|x_{k+1} - x_k\|_X = \| - \big(\Upsilon'_x(x_0, x_k)\big)^{-1}\Upsilon(x_k, x_k)\|_X \leq \frac{1}{\alpha}\|\Upsilon(x_k, x_k)\|_Y. \tag{31}$$

Далее, проводя такие же вычисления как при оценке $\|\Upsilon(x_1, x_0)\|_Y$, получим

$$\begin{aligned}\|\Upsilon(x_{k+1}, x_k)\|_Y &= \|\big(\Upsilon(x_{k+1}, x_k) - \Upsilon(x_k, x_k)\big) + \Upsilon(x_k, x_k)\|_Y \\ &\leq \|\Upsilon'_x(x_k + \lambda(x_{k+1} - x_k),\, x_k) - \Upsilon'_x(x_0, x_k)\|_{X\to Y}\|x_{k+1} - x_k\|_X \\ &\leq \gamma\|x_{k+1} - x_k\|_X \leq \frac{\gamma}{\alpha}\|\Upsilon(x_k, x_k)\|_Y,\end{aligned}$$

здесь $\lambda \in (0, 1)$.

Итак, по индукции доказано, что все члены последовательности $\{x_i\}$ удовлетворяют неравенствам (8).

Остальные предположения теоремы 2 также, очевидно, выполнены. В частности, из условия (26) и дифференцируемости при любом $u \in B$, а следовательно, и непрерывности отображения $\Upsilon(\cdot, u) : X \to Y$ на шаре B вытекает непрерывность на B отображения $F : X \to Y$. Действительно, для любой последовательности $\{v_i\} \subset B$, $v_i \to v$, имеем

$$
\begin{aligned}
\|F(v_i) - F(v)\|_Y &= \|\Upsilon(v_i, v_i) - \Upsilon(v, v)\|_Y \\
&\le \|\Upsilon(v_i, v_i) - \Upsilon(v_i, v)\|_Y + \|\Upsilon(v_i, v) - \Upsilon(v, v)\|_Y \\
&\le \beta\|v_i - v\|_X + \|\Upsilon(v_i, v) - \Upsilon(v, v)\|_Y \to 0.
\end{aligned}
$$

И конечно, из непрерывности на B отображения F следует замкнутость в Y графика сужения этого отображения на B (см. замечание 2). Теорема доказана. □

Подчеркнем, что в рассмотренной теореме не требуется дифференцируемость отображения $F : X \to Y$, $F(x) = \Upsilon(x, x)$.

При выполнении условий теоремы 3 для итераций (25) справедливы соотношения (15), (16), определяющие погрешность приближенного решения и количество итераций, достаточное для достижения требуемой погрешности.

Замечание 3. Для построения последовательных приближений x_i к решению уравнения (24) вместо формул (25) можно использовать формулы:

$$
x_{i+1} = x_i - \big(\Upsilon'_x(x_i, x_i)\big)^{-1}\Upsilon(x_i, x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,
$$

которые требуют гораздо больший объем вычислений, что на практике часто перевешивает выгоду от увеличения точности.

Замечание 4. При построении итераций приближенное решение уравнения (6) (с правой частью $y = 0$) можно определять, проводя несколько шагов методом Ньютона–Канторовича. Например, для двух шагов получим следующие итерации:

$$
\begin{aligned}
x_{i+1/2} &= x_i - \big(\Upsilon'_x(x_0, x_i)\big)^{-1}\Upsilon(x_i, x_i), \\
x_{i+1} &= x_{i+1/2} - \big(\Upsilon'_x(x_0, x_i)\big)^{-1}\Upsilon(x_{i+1/2}, x_i).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим частный случай уравнения (24) — уравнение

$$
\psi(x) - \phi(x) = 0; \tag{32}
$$

здесь отображение $\Upsilon : X^2 \to Y$ имеет представление

$$
\Upsilon(x, u) = \psi(x) - \phi(u).
$$

Формула (25) для приближенного решения уравнения (32) принимает вид

$$
x_{i+1} = x_i - \big(\psi'(x_0)\big)^{-1}\big(\psi(x_i) - \phi(x_i)\big). \tag{33}
$$

Итерации (33) для решения уравнения (32) предложены и исследованы в работах А.И. Зинченко, М.А. Красносельского, И.А. Кусакина (см. [7, с. 150–151]). Применение теоремы 3 дает следующие условия сходимости таких итераций.

Следствие 2. *Пусть пространство X является банаховым; определены числа $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$, $\gamma \ge 0$, связанные соотношением $\beta + \gamma < \alpha$, и такие, что на шаре $B \doteq B_X(x_0, r)$, $r \doteq (\alpha - \beta - \gamma)^{-1}\|\psi(x_0) - \phi(x_0)\|_Y$ отображение ϕ является β-липшицевым, а отображение ψ — дифференцируемым по Фреше, причем производная $\psi'(x_0)$ невырождена и выполнены неравенства:*

$$\forall x \in B \quad \|\psi'(x) - \psi'(x_0)\|_Y \le \gamma; \quad \left\|\left(\psi'(x_0)\right)^{-1}\right\|_{Y\to X} \le \frac{1}{\alpha}.$$

Тогда определенная формулой (33) *последовательность* $\{x_i\}$ *сходится к решению* $x = \xi$ *уравнения* (32), *и для этого решения справедлива оценка*

$$\|\xi - x_0\|_X \le \frac{1}{\alpha - \beta - \gamma}\rho_Y \|\psi(x_0) - \phi(x_0)\|_Y.$$

Отметим, что близкий результат методами теории накрывающих отображений получен в работе [8].

Литература

1. **Арутюнов А.В.** Итерационный метод нахождения точек совпадения двух отображений // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 11. — С. 1947–1950.
2. **Арутюнов А.В.** Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения. — 2014. — Т. 48, вып. 1. — С. 89–93.
3. **Арутюнов А.В.** Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 416, № 2. — С. 151–155.
4. **Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.** Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 5. — С. 613–634.
5. **Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S, and Zhukovskii S.E.** Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. — 2012. — Vol. 75, № 3. — P. 1026–1044.
6. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
7. **Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.** Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.
8. **Жуковская Т.В., Молоканова Е.А.** Метод приближенного нахождения точек совпадения накрывающего и липшицева отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2013. — Т. 18, № 5–2. — С. 2513–2518.

Поступила в редакцию 17 марта 2015 г.,
в окончательном варианте 18 февраля 2016 г.

Литература в транслитерации

1. **Arutyunov A.V.** Iteracionnyi metod nakhozhdeniya tochek sovpadeniya dvukh otobrazhenii // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2012. — T. 52, № 11. — S. 1947–1950.
2. **Arutyunov A.V.** Tochki sovpadeniya dvukh otobrazhenii // Funkcional'nyi analiz i ego prilozheniya. — 2014. — T. 48, vyp. 1. — S. 89–93.
3. **Arutyunov A.V.** Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnye tochki // Doklady Akademii nauk. — 2007. — T. 416, № 2. — S. 151–155.
4. **Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S.** Nakryvayushchie otobrazheniya i ikh prilozheniya k differencial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoi // Differencial'nye uravneniya. — 2009. — T. 45, № 5. — S. 613–634.

5. **Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S, and Zhukovskii S.E.** Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. — 2012. — Vol. 75, № 3. — P. 1026–1044.

6. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Funkcional'nyj analiz. — M.: Nauka, 1984.

7. **Krasnosel'skii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutickii Ya.B., Stecenko V.Ya.** Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii. — M.: Nauka, 1969.

8. **Zhukovskaya T.V., Molokanova E.A.** Metod priblizhennogo nakhozhdeniya tochek sovpadeniya nakryvayushchego i lipshiceva otobrazhenii // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki. — 2013. — T. 18, № 5–2. — S. 2513–2518.