

Re, а ее значение определялось по одной из точек соответствующей экспериментальной кривой при заданном значении $Re_{к0}$. При расчетах использовались следующие значения физических параметров: для первого сплава — $T_A = 505$, $T_{l0} = 504,225$, $a = 0,288$, $\kappa/c = 219,6$, $r_0 = 0,2$, $g = 404,75$, $Re_{к0} = 6542$, $A = 7,38$, для второго и третьего сплавов соответственно — $T_A = 505$, $T_{l0} = 504,25$; $503,5$, $a = 0,236$, $\kappa/c = 249,57$, $r_0 = 0,2$, $g = 386$; $194,4$, $Re_{к0} = 4361$; 3840 , $A = 5,2$; $9,27$, где T , K ; a , $см^2/с$; κ/c , K ; r_0 , $см$. Теоретические кривые (сплошные линии) достаточно хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными.

Автор выражает благодарность В. Е. Накорякову и В. Т. Борисову за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 9 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. К статистической теории кристаллизации металлов. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1937, № 3.
2. Борисов В. Т. Кристаллизация бинарного сплава при сохранении устойчивости. — Докл. АН СССР, 1961, т. 136, № 3.
3. Борисов В. Т., Матвеев Ю. Е. Кинетический режим развития двухфазной зоны в двойном металлическом сплаве. — Изв. АН СССР. Металлы, 1977, № 3.
4. Максимов Л. Н., Черепанов А. Н. Аналитическое исследование процесса затвердевания жидкого металла в установках непрерывного литья. — ПМТФ, 1977, № 3.
5. Флеминг М. Процессы затвердевания. М., «Мир», 1977.
6. Швед Р. И., Сосков Д. А. Влияние условий затвердевания и состава сплавов на характер и дисперсность ориентированной кристаллической структуры. — В кн.: Проблемы стального слитка. Труды V конференции по слитку. М., «Металлургия», 1974.
7. Jackson K. A., Chalmers B. Kinetics of solidification. — Can. J. Phys., 1956, vol. 34, N 5.
8. Хиллинг У., Тарибалл Д. Элементарные процессы роста кристаллов. М., ИЛ, 1959.
9. Добаткин В. И. Непрерывное литье и литейные свойства сплавов. М., Оборонгиз, 1948.
10. Никонова В. В., Темкин Д. Е. Изучение кинетики роста дендритов в некоторых бинарных сплавах. — В кн.: Рост и несовершенство металлических кристаллов. Киев, «Наукова думка», 1966.
11. Чалмерс Б. Теория затвердевания. М., «Металлургия», 1968.

УДК 532.62

ВОЛНООБРАЗОВАНИЕ ПРИ ТЕЧЕНИИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ

С. В. Алексеев, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев

(Новосибирск)

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что ламинарное вертикальное течение пленки жидкости неустойчиво, начиная с самых малых чисел Рейнольдса Re . Неустойчивость приводит к возникновению периодических волн, которые быстро растут по амплитуде с расстоянием и выходят при определенных амплитудах на стационарный режим. Линейная устойчивость гладкой пленки исследовалась во многих работах [1—5]. Наибольшие успехи достигнуты на основе численных методов счета уравнения Орра — Зоммерфельда. В результате расчетов получены зависимости для инкремента амплитуды волн, для фазовой скорости и волнового числа нейтральных возмущений и волн максимального роста.

Существенно меньше ясности в механизме нелинейного волнообразования, особенно при высоких числах Рейнольдса. Работы по нелинейным волнам можно разбить на две условные группы, в которых рассматриваются соответственно случаи малых и больших чисел Re . Для случая $Re \sim 1$ (здесь $Re = q_0/\nu$, q_0 — удельный расход жидкости, ν — кинематическая вязкость) выводится нелинейное нестационарное уравнение для длинных волн на поверхности пленки с использованием метода узких полос [6—8]. Для диапазона умеренных чисел $Re \sim 5 - 50$ выведено лишь стационарное уравнение [9—11], а анализ нелинейных нестационарных волн проводится на основе системы уравнений типа уравнений пограничного слоя с использованием метода интегральных соотношений.

Имеется определенная объективная необходимость в выводе одного универсального модельного уравнения для нестационарных нелинейных волн, которое позволило бы обобщить имеющиеся подходы и которое было бы справедливо в широком диапазоне чисел Re . Попытка вывода такого уравнения приведена в данной работе. Результаты линейного анализа этого уравнения сопоставляются с экспериментальными данными для растущих линейных волн и данными других авторов.

1. Вывод уравнения для волн. Запишем уравнения Навье — Стокса и граничные условия для пленки жидкости, стекающей по вертикальной стенке (фиг. 1), в безразмерном виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{3}{Re \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{\partial p^*}{\partial x^*};$$

$$(1.2) \quad \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = \frac{3}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} \right) - \frac{\partial p^*}{\partial y^*};$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0;$$

$$(1.4) \quad \varepsilon^2 \frac{4\partial h^*/\partial x^*}{1 - \varepsilon^2 (\partial h^*/\partial x^*)^2} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial v^*}{\partial x^*} = 0 \quad \text{при } y = h;$$

$$(1.5) \quad \Delta p^* = - \frac{3^{1/3} Fi^{1/3} \varepsilon^2}{Re^{5/3}} \frac{\partial^2 h^*/\partial x^{*2}}{[1 + \varepsilon^2 (\partial h^*/\partial x^*)^2]^{3/2}} + \frac{2\varepsilon}{Re} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \left[\frac{1 + \varepsilon^2 (\partial h^*/\partial x^*)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial h^*/\partial x^*)^2} \right]$$

при $y = h$;

$$(1.6) \quad u^* = 0, \quad v^* = 0 \quad \text{при } y = 0;$$

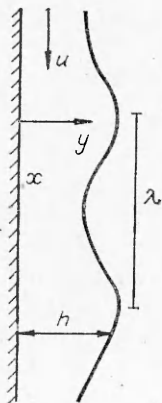
$$(1.7) \quad v^* = \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \quad \text{при } y = h,$$

где U^* — безразмерная продольная компонента скорости на поверхности пленки. Условия (1.4), (1.5) отражают отсутствие касательных и нормальных напряжений на поверхности пленки, а условие (1.7) является обычным кинематическим условием на свободной поверхности. Здесь введены следующие безразмерные величины:

$$u^* = u/u_0, \quad v^* = (v/u_0)L/h_0, \quad x^* = x/L, \quad y^* = y/h_0,$$

$$t^* = tu_0/L, \quad p^* = p/(\rho u_0^2), \quad \varepsilon = h_0/L,$$

$Fi = \sigma^3/(\rho^3 g \nu^4)$ — пленочное число, где t — время; L — характерный продольный размер (например, длина волны); p — давление; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность; σ — поверхностное натяжение жидкости; h_0 и u_0 определяются из формул Нуссельта для гладкого ламинарного течения пленки $Re = q_0/\nu = gh_0^3/(3\nu^2) = h_0 u_0/\nu$.



Ф и г. 1

Рассмотрим длинноволновой процесс $\varepsilon \ll 1$ и, полагая $Re \sim 1/\varepsilon$, оставим в уравнениях (1.1)–(1.7) члены порядка 1. В результате приходим к уравнениям типа уравнений пограничного слоя, которые запишем в размерном виде

$$(1.8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g;$$

$$(1.9) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

$$(1.10) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

с граничными условиями

$$(1.11) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = h;$$

$$(1.12) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \quad \text{при } y = h.$$

Условия (1.6), (1.7) остаются неизменными. Используя (1.9), (1.12), перепишем (1.8) в виде

$$(1.13) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}.$$

При выводе (1.13) учитывалось, что для реальных жидкостей $Fi^{1/3}$ является большой величиной (для воды, например, $Fi^{1/3} \approx 10^4$).

Важно отметить, что приближенные уравнения (1.11), (1.13) сохраняют свою форму в гораздо большем диапазоне чисел Re , чем $Re \sim 1/\varepsilon$. При $Re \sim 1/\varepsilon$ все члены уравнения (1.13) имеют один порядок, при $Re \sim 1$ инерционные члены в (1.13) меньше всех остальных членов, а при $Re \sim 1/\varepsilon^2$ соответственно больше. Однако видно, что всегда в диапазоне чисел $Re = 1 - 1/\varepsilon^2$ порядок отброшенных членов в исходной системе меньше, чем порядок членов, оставленных в уравнениях (1.13), (1.11), т. е. в указанном приближении число Re может меняться фактически от единицы и до чисел, соответствующих переходу в турбулентный режим.

В дальнейшем используем метод интегральных соотношений (метод Кармана — Польгаузена). Основное затруднение в этом методе состоит в том, что мгновенный профиль скорости в пленке необходимо задавать априорным способом. Возникающую при этом возможную погрешность оценить трудно, хотя интуитивно и ясно, что в случае длинных волн она не должна быть слишком большой. Результаты экспериментов [12–13] по прямому определению мгновенных профилей скорости в волновой пленке жидкости говорят об удовлетворительной аппроксимации профиля скорости автомодельным полиномом в случае двумерных волн, по крайней мере, умеренной амплитуды.

Проинтегрировав уравнения (1.13), (1.10) по толщине пленки, получим после простых преобразований

$$(1.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + gh + \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3};$$

$$(1.15) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy = 0.$$

Представим профиль скорости в виде

$$u = U f(\eta), \quad \eta = y/h.$$

Функцию f можно аппроксимировать, например, полиномом второй степени с коэффициентами, удовлетворяющими граничным условиям (1.6), (1.11)

$$(1.16) \quad f(\eta) = 2\eta - \eta^2.$$

Далее введем мгновенный расход жидкости в пленке и выразим его через f

$$q = \int_0^h u dy = Uh \int_0^1 f(\eta) d\eta.$$

Аналогично имеем

$$\int_0^h u^2 dy = U^2 h \int_0^1 f^2(\eta) d\eta, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{U}{h} \frac{df}{d\eta} \Big|_{\eta=0}.$$

Используя эти выражения и вводя обозначения

$$\int_0^1 f d\eta = \delta, \quad \int_0^1 f^2 d\eta = \gamma, \quad \frac{df}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = \kappa, \quad \chi = \gamma/\delta^2,$$

перепишем уравнения (1.14), (1.15) в виде уравнений для толщины и расхода

$$(1.17) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + 2\chi \frac{q}{h} \frac{\partial q}{\partial x} - \chi \frac{q^2}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\kappa v}{\delta h^2} q + gh + \frac{\sigma h}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3};$$

$$(1.18) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Представим общее течение в виде $q = q_0 + q'$, $h = h_0 + h'$, где штрихом отмечена возмущенная часть величины, и подставим эти выражения в уравнения (1.17), (1.18). Полагая $q' \ll q_0$, $h' \ll h_0$ и оставляя в уравнениях члены порядка h'^2 , q'^2 , получаем нелинейные уравнения для возмущений толщины и расхода с нелинейными членами в правой части

$$(1.19) \quad \frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{2\chi q_0}{h_0} \frac{\partial q'}{\partial x} - \chi \frac{q_0^2}{h_0^2} \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\kappa v}{\delta h_0^2} q' - 3gh' - \frac{\sigma h_0}{\rho} \frac{\partial^3 h'}{\partial x^3} = \frac{3gh'^2}{h_0} -$$

$$- \frac{2}{h_0} h' \frac{\partial q'}{\partial t} - \frac{2\chi}{h_0^2} q_0 \left[h' \frac{\partial q'}{\partial x} + h_0 \frac{q'}{q_0} \frac{\partial q'}{\partial x} - q' \frac{\partial h'}{\partial x} \right];$$

$$(1.20) \quad \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\partial q'}{\partial x} = 0.$$

Продифференцируем (1.19) по x и заменим производную $\partial q'/\partial x$ в линейных членах через уравнение неразрывности (1.20), тогда

$$(1.21) \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + \frac{2\chi q_0}{h_0} \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + \chi \frac{q_0^2}{h_0^2} \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\kappa v}{\delta h_0^2} \frac{\partial h'}{\partial t} + 3g \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\sigma h_0}{\rho} \frac{\partial^4 h'}{\partial x^4} =$$

$$= -\frac{6g}{h_0} h' \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{2}{h_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(h' \frac{\partial q'}{\partial t} \right) + \frac{2\chi q_0}{h_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[h' \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{h_0}{q_0} q' \frac{\partial q'}{\partial x} - q' \frac{\partial h'}{\partial x} \right].$$

Для того, чтобы исключить q' и $\partial q'/\partial t$ из нелинейных членов, воспользуемся следующими соображениями. Перейдем в уравнении неразрывности от переменных x , t к переменным ξ , t , где $\xi = x - ct$, c — скорость

распространения возмущений, которую будем считать постоянной для случая квазистационарных волн. Как следует из эксперимента, во многих случаях рассматриваемые волны действительно можно считать слабодиспергирующими и слабонелинейными. Тогда имеем

$$(1.22) \quad \partial h'/\partial t - c \partial h'/\partial \xi + \partial q'/\partial \xi = 0.$$

В случае квазистационарного процесса профиль волны в движущейся системе координат деформируется слабо, в результате чего от уравнения (1.22) приходим к приближенному уравнению $c \partial h'/\partial \xi = \partial q'/\partial \xi$, откуда следуют соотношения

$$(1.23) \quad q' = c h';$$

$$(1.24) \quad \partial/\partial t = -c \partial/\partial x.$$

Для стационарных волн выражения (1.23), (1.24) являются точными.

Подставим теперь (1.23) в нелинейные члены уравнения (1.21), которые при $Re = 1 - 1/\varepsilon^2$ всегда имеют более высокий порядок малости, чем основные члены. Появившиеся при этом в нелинейных членах производные вида $c \partial/\partial x$ заменим, согласно выражению (1.24). В итоге получаем нелинейное нестационарное уравнение для возмущения толщины

$$(1.25) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) h' + \frac{\delta}{\kappa} \frac{h_0^2}{v} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) h' + \\ + 6 \frac{\delta h_0 g}{\kappa v} h' \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{2\delta}{\kappa} (\chi - 1) \frac{h_0}{v} \frac{\partial}{\partial t} \left(h' \frac{\partial h'}{\partial t} \right) + \frac{\delta \sigma}{\kappa \rho v} h_0^3 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^4} = 0,$$

где $c_0 = 3q_0/h_0$; $c_1 = q_0(\chi + \sqrt{\chi^2 - \chi})/h_0$; $c_2 = q_0(\chi - \sqrt{\chi^2 - \chi})/h_0$.

Уравнение (1.25) имеет характерную двухволновую структуру. Это означает, что волновой процесс на пленке жидкости включает в себя кинематическую волну, как волну низшего порядка, имеющую скорость c_0 , и волны, описываемые производными высшего порядка и распространяющиеся со скоростями c_1 и c_2 . Методика вывода и анализ подобных уравнений подробно обсуждаются в [14].

Для дальнейших рассуждений используем аппроксимацию (1.16) для профиля скорости в гравитационно стекающей вертикальной пленке жидкости и вычислим по нему коэффициенты

$$\delta = 2/3, \quad \kappa = 2, \quad \chi = 1.2, \quad c_1 = 1.69 u_0,$$

$$c_2 = 0.71 u_0, \quad u_0 = q_0/h_0 = g h_0^2 / (3v).$$

Подставляя эти значения в уравнение (1.25) и производя обезразмеривание, окончательно имеем

$$(1.26) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + 3 \frac{\partial}{\partial x^*} \right) H + 6H \frac{\partial H}{\partial x^*} - \frac{2}{15} Re \left(\frac{h_0}{L} \right) \frac{\partial}{\partial t^*} \left(H \frac{\partial H}{\partial t^*} \right) + \frac{Re}{3} \left(\frac{h_0}{L} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \right. \\ \left. + 1.69 \frac{\partial}{\partial x^*} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t^*} + 0.71 \frac{\partial}{\partial x^*} \right) H + We \left(\frac{h_0}{L} \right)^3 \frac{\partial^4 H}{\partial x^{*4}} = 0,$$

где $H = h'/h_0$. От формы записи (1.26) всегда можно прийти к общепринятой записи с одним масштабом h_0 , приняв $L = h_0$.

Если предположить, что волна стационарна $h' = h'(x - ct)$, то уравнение (1.26) будет соответствовать уравнениям работ [10, 11].

Рассмотрим случай $h_0/L \ll 1$, $Re \sim 1$. Видим, что в основе волнового процесса лежит кинематическая волна $\partial H/\partial t^* + 3\partial H/\partial x^* = 0$. Следуя [14], заменим в волне высшего порядка производную по времени с помощью соотношения $\partial/\partial t^* = -3\partial/\partial x^*$, пренебрежем вторым нелиней-

ным членом и перейдем от уравнения (1.26) к уравнению

$$(1.27) \quad \frac{\partial H}{\partial t^*} + 3 \frac{\partial H}{\partial x^*} + 6H \frac{\partial H}{\partial x^*} + \operatorname{Re} \left(\frac{h_0}{L} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial x^{*2}} + \operatorname{We} \left(\frac{h_0}{L} \right)^3 \frac{\partial^4 H}{\partial x^{*4}} = 0.$$

Уравнение типа (1.27) использовалось в последнее время в работах [7, 8, 15, 16] как основное уравнение при анализе нелинейных волн на пленке.

Рассмотрим другой предельный случай, когда $\operatorname{Re}(h_0/L) \gg 1$. В основе волнового процесса будем иметь волны второго порядка. Выделим предельно распространяющуюся вдоль потока волну $\partial H / \partial t^* + 1,69 \partial H / \partial x^* = 0$. Произведем во всех остальных производных замену $\partial / \partial t^* = -1,69 \partial / \partial x^*$ и получим

$$(1.28) \quad \frac{\partial H}{\partial t^*} + 1,69 \frac{\partial H}{\partial x^*} + 2,07 H \frac{\partial H}{\partial x^*} - \frac{4,01}{\operatorname{Re}} \left(\frac{L}{h_0} \right) H - \frac{9,2}{\operatorname{Re}} \left(\frac{L}{h_0} \right) H^2 - \\ - 3,06 \frac{\operatorname{We}}{\operatorname{Re}} \left(\frac{h_0}{L} \right)^2 \frac{\partial^3 H}{\partial x^{*3}} = 0.$$

Уравнение в таком виде получено в [17] как модельное уравнение для волн на поверхности пленки при больших Re .

Таким образом, в случае длинноволнового процесса при малых числах Рейнольдса энергия из среднего течения перекачивается в кинематическую волну через волновой механизм высшего порядка. Это соответствует появлению в уравнении (1.27) члена накачки со второй производной или, как иногда говорят, члена с «отрицательной» вязкостью. При больших числах Рейнольдса энергия в волну высшего порядка, которая условно может быть названа «инерционной», перекачивается кинематической волной, что соответствует появлению в уравнении (1.28) линейного члена «низкочастотной» накачки.

Заключение о точной области применимости уравнения (1.26) и возможности предельного перехода в уравнении (1.26) к случаю больших чисел Re можно сделать только на основе сопоставления решений этого уравнения с экспериментом и точными численными решениями. Для линейных волн такое сопоставление проведено ниже.

2. Анализ устойчивости пленочного течения. Выведем из (1.26) дисперсионные уравнения для временно растущих (затухающих) волн. С этой целью представим H в виде $H = A_0 \exp [i(kx^* - \Omega t^*)\varepsilon^{-1}] = A_0 \exp [ik\varepsilon^{-1}(x^* - c^*t^*)] \exp \hat{r}i^* \varepsilon^{-1}$, где $k = 2\pi h_0/\lambda$ — действительное волновое число; $\Omega = \omega + i\beta$ — комплексная частота, обезразмеренная через h_0 и u_0 ; $c^* = c/u_0$ — реальная часть фазовой скорости. Подставим H в линеаризованное уравнение (1.26) и, разделяя действительную и мнимую части, получим

$$(2.1) \quad -c^* + 3 - \frac{2}{3} c^* \beta \operatorname{Re} + 0,8 \operatorname{Re} \beta = 0;$$

$$(2.2) \quad 3\beta - k^2 \operatorname{Re} (c^{*2} - 2,4c^* + 1,2) + \beta^2 \operatorname{Re} + 3 \operatorname{We} k^4 = 0.$$

Аналогичные уравнения ранее были выведены в [3] непосредственно из исходной системы уравнений (1.14), (1.15), но анализ дисперсионных соотношений не проводился.

Из (2.1) следует

$$(2.3) \quad \beta \operatorname{Re} = -\frac{3}{2} \frac{c^* - 3}{c^* - 1,2}.$$

Исключая из (2.2) β с помощью (2.3), выводим квадратное относительно $k^2 \text{Re}^2$ уравнение, решение которого есть

$$(2.4) \quad (k \text{Re})^2 = \frac{\text{Re}^3}{6 \text{We}} (c^* - c_1^*)(c^* - c_2^*) \times \\ \times \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{27 \text{We}}{\text{Re}^3} \frac{(c^* - 3)(c^* + 0,6)}{(c^* - 1,2)^2 (c^* - c_1^*)^2 (c^* - c_2^*)^2}} \right],$$

где $c_1^* = 1,69$; $c_2^* = 0,71$.

Нейтральные волны существуют при условиях

$$(2.5) \quad \beta = 0, \quad c^* = 3, \quad k = \sqrt{\text{Re}/\text{We}}.$$

Волны с $c^* > 3$ экспоненциально затухают, а с $c^* < 3$ — растут.

Анализ выражения (2.3) показывает, что максимум инкремента β соответствует минимуму фазовой скорости на дисперсионной кривой (2.4). Для точного определения характеристик волн максимального роста вернемся к уравнениям (2.2), (2.3). Перепишем (2.3) в виде

$$(2.6) \quad c^* = 1,2 + 1,8/\Phi,$$

где $\Phi = 1 + 2\beta \text{Re}/3 \geq 1$. Затем подставим (2.6) в (2.2), продифференцируем полученное выражение по k и, учитывая условие экстремума $\partial\Phi/\partial k = 0$, получаем

$$(2.7) \quad k \text{Re} = 0,2 \sqrt{\frac{\text{Re}^3}{\text{We}}} \sqrt{\frac{13,5}{\Phi^2} - 1} = \sqrt[4]{\frac{3}{4} \frac{\text{Re}^3}{\text{We}} (\Phi^2 - 1)}.$$

Наконец, подставляя (2.6), (2.7) в (2.2), приходим к выражению

$$(2.8) \quad \frac{\text{Re}^3}{\text{We}} - \frac{\Phi^4 (\Phi^2 - 1)}{(\Phi^2 - 13,5)^2} \frac{3 \cdot 10^3}{6,4}.$$

Инкремент волн максимального роста

$$(2.9) \quad \beta = 1,5(\Phi - 1)/\text{Re}.$$

Для того, чтобы перейти от временных инкрементов β к пространственным инкрементам ($-\alpha$), которые и измеряются в эксперименте, необходимо воспользоваться известным преобразованием Гастера

$$(2.10) \quad -\alpha = i \frac{\partial \omega}{\partial k} = \beta \left/ \left[c^* + k \frac{\partial c^*}{\partial k} \right] \right. = \beta/c^*.$$

Здесь учтено, что для волн максимального роста $\partial c^*/\partial k = 0$. Как показал численный счет, в рамках поставленной задачи пространственный и временной инкременты действительно с достаточной точностью связаны соотношением (2.10).

Таким образом, сводка формул (2.6)—(2.10) описывает все характеристики максимального роста волн на пленке. Поскольку числа Re и We входят в формулы в виде комбинации Re^3/We , ее удобней преобразовать так, чтобы использовался только один расходный параметр Re

$$\text{Re}^3/\text{We} = 3^{2/3} (\text{Re}/(\text{Fi}^{1/11}))^{11/3}.$$

3. Экспериментальная техника. Эксперименты по исследованию волн в области их возникновения проводились на установке [12, 13]. Жидкость из бака постоянного уровня через систему ротаметров поступала на наружную поверхность рабочего участка, где стекала в виде пленки. В качестве рабочего участка использовалась оргстеклянная труба наружным диаметром 60 мм и длиной 1 м. Подача жидкости на рабочий участок осу-

ществлялась через кольцевую щель распределительного устройства, длина которой составляла 70 мм, а ширина — 0,5—1 мм.

Основная трудность при подготовке эксперимента заключалась в организации двумерного течения волновой пленки жидкости. С целью получения равномерного орошения рабочий участок выставлялся строго вертикально, а величина кольцевого зазора и соосность распределительного устройства с рабочим участком тонко регулировалась до тех пор, пока возникающие волны не становились двумерными (кольцевыми). Возможность такой регулировки достигалась благодаря небольшому люфту между посадочными поверхностями рабочего участка и распределительного устройства.

Пленка жидкости чрезвычайно чувствительна к внешним возмущениям, в частности к вибрациям от работающего насоса. Поэтому опыты проводились только с выключенным насосом, а закачка жидкости в бак постоянного напора производилась периодически в автоматическом режиме.

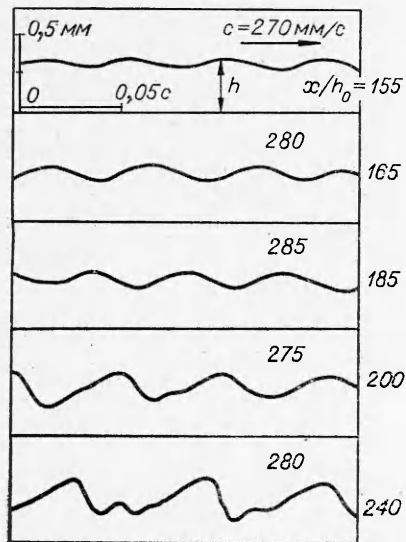
В качестве рабочей жидкости использовались водоглицериновые и водоспиртовые растворы, которые обладают тем преимуществом, что они гораздо менее подвержены влиянию адсорбирующихся на поверхности пленки загрязнений по сравнению с чистой водой.

В ходе эксперимента измерялись: мгновенная и средняя толщины пленки, амплитуды, скорости и длины волн. Толщина пленки измерялась теневым методом, который заключается в фотографической регистрации тени, отбрасываемой пленкой жидкости при освещении рабочего участка [12]. Фазовая скорость волн определялась по сдвигу фазы между двумя одновременными записями мгновенной толщины пленки, которые соответствовали двум разным точкам вдоль трубы. Точность измерений абсолютной толщины оценивается в 2—5%, а фазовой скорости — 5—9%.

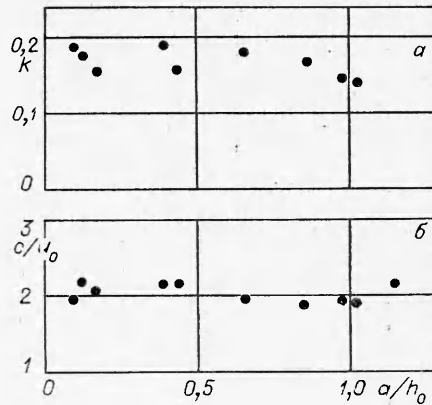
4. Двумерные волны в области их возникновения. Картина стекания пленки жидкости по вертикальной поверхности при числах $Re = 5-50$ имеет следующий вид. Непосредственно у выходной щели пленка жидкости является гладкой. Затем на некотором расстоянии от кромки щели вследствие естественной неустойчивости гладкого ламинарного течения возникают бесконечно малые двумерные периодические возмущения, которые очень быстро растут по амплитуде. При достижении достаточно больших амплитуд начинает влиять нелинейность, и волны выходят на нелинейный стационарный режим. Двумерные волны сами по себе неустойчивы и вскоре разваливаются на трехмерные подковообразные возмущения, которые являются существенно нестационарными.

Данные по эволюции двумерных волн в области их возникновения приведены на фиг. 2, 3. Осциллограммы толщины пленки снимались на различных расстояниях от кромки выходной щели путем передвижения оптической системы вдоль рабочего участка. Из фиг. 2 следует, что возникающие волны имеют синусоидальную форму, а их амплитуда, как было показано ранее [13], растет с расстоянием экспоненциально. И только при достижении достаточно больших амплитуд (на расстоянии $x/h_0 \sim 200$, фиг. 2) форма волны искажается, а скорость роста резко замедляется. Данные по скорости и длине волны растущих волн для удобства представлены в виде зависимости от амплитуды (фиг. 3), откуда прямо следует линейность волн в области их возникновения. Амплитуда a на фиг. 3 определена как разность между максимальным и минимальным значениями толщины.

Необходимо отметить, что возникающие волны не являются в общем строго регулярными и поэтому требуется статистическая обработка сигнала для получения усредненных волновых характеристик. Однако при хорошо организованной подаче жидкости на рабочий участок при подходя-



Ф и г. 2



Ф и г. 3

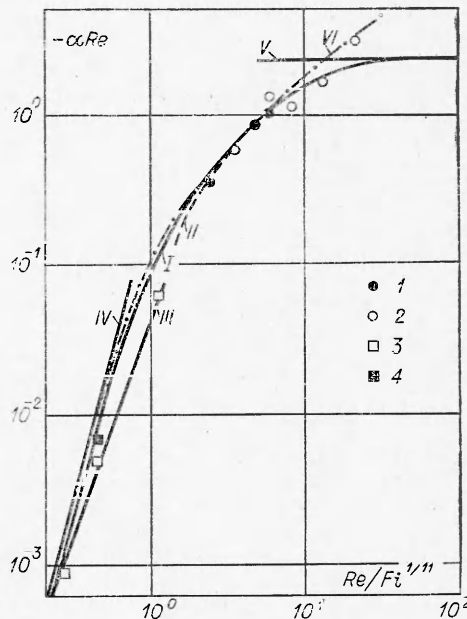
пих свойствах (растворы глицерина и спирта) и расходах жидкостей можно наблюдать сравнительно регулярные двумерные волны в области волнообразования.

Именно такие волновые режимы по возможности и обрабатывались в настоящем эксперименте.

Согласно линейным теориям неустойчивости волны, наблюдаемые на практике вблизи линии волнообразования, должны соответствовать волнам максимального роста, что частично подтверждено в [18, 19] для скорости и длины волн. На фиг. 4—6 приведены данные по инкременту, скорости и длине растущих волн, которые сравниваются с теоретическими зависимостями для волн максимального роста и экспериментальными данными других авторов. При построении графиков выбраны координаты, в которых теоретические зависимости, полученные в настоящей работе, представляют собой универсальные кривые.

В области чисел $Re > 10$ на фиг. 4 наши экспериментальные данные 1 для водоглицеринового раствора ($\nu = 2,34 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\sigma/\rho = 60,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$, $Fi^{1/11} = 6,4$) согласуются с данными 2 [20]. При числах $Re \leq 1$ нанесены экспериментальные данные 3, 4 работы [4] для пленок масла.

При значении комплекса $Re/Fi^{1/11} < 0,5$ экспериментальные точки хорошо описываются различными теориями: I — расчет по формулам (2.6)—(2.10), III—[1], IV—длинноволновое приближение [1], VI—[5]. В диапазоне умеренных чисел Re при $Re/Fi^{1/11} > 2$ опытные данные обобщаются теоретическими зависимостями I, VI и частично расчетом работы [2]—II. При $Re/Fi^{1/11} > 50$ зависимость I совпадает с расчетом [17]—V.



Ф и г. 4

Полагая, что в работе [5] результаты численного счета уравнения Орра—Зоммерфельда справедливы во всем представленном диапазоне чисел Re , из сравнения, например, зависимостей I и VI на фиг. 4 можно сделать более точный вывод о границах применимости погранслоного приближения для волновой пленки жидкости. Как видно из фиг. 4, наилучшее согласие между зависимостями I и VI наблюдается в диапазоне значений комплекса $Re/Fi^{1/11} = 1-10$. Однако и при $Re/Fi^{1/11} < 1$ согласие между теориями можно считать удовлетворительным, так как зависимости отличаются только численным коэффициентом, но имеют одинаковые асимптотики. Более существенное расхождение наблюдается при $Re/Fi^{1/11} > 10$, поскольку теоретические зависимости имеют уже разные асимптотики по числу Re .

Поступила 26 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin T. B. Wave formation in laminar flow down an inclined plane.— *J. Fluid Mech.*, 1957, vol. 2, N 6.
2. Whitaker S. Effect of surface active agents on the stability of falling liquid films.— *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 1964, vol. 3, N 2.
3. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1968, № 2.
4. Krantz W. B., Goren S. L. Stability of thin liquid films flowing down a plane.— *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 1971, vol. 10, N 1.
5. Pierson F. W., Whitaker S. Some theoretical and experimental observations of the wave structure of falling liquid films.— *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 1977, vol. 16, N 4.
6. Benney D. J. Long waves on liquid films.— *J. Math. and Physics*, 1966, vol. 45, N 2.
7. Gjevik B. Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films.— *Phys. Fluids*, 1970, vol. 13, N 8.
8. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1974, № 3.
9. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— *ЖЭТФ*, 1948, т. 18, вып. 3.
10. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1967, № 1.
11. Lee J. Kapitza's method of film flow description.— *CES*, 1969, vol. 24, N 8.
12. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеев С. В., Орлов В. В. Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости.— *ИФЖ*, 1977, т. 33, № 3.
13. Покусаев Б. Г., Алексеев С. В. Двумерные волны на вертикальной пленке жидкости.— В кн.: *Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах*. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977.
14. Уизем Д. Б. Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
15. Маурин Л. П., Одишария Г. Э., Точигин А. А. Уединенная волна на стекающей жидкой пленке.— В кн.: *Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах*. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977.
16. Петвиашвили В. И., Цвелодуб О. Ю. Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости.— *ДАН СССР*, 1978, т. 238, № 6.
17. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Волны на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости.— *ПМТФ*, 1973, № 2.
18. Jones L. O., Whitaker S. An experimental study of falling liquid films.— *AIChE J.*, 1966, vol. 12, N 3.
19. Strobel W. J., Whitaker S. The effect of surfactants on the flow characteristics of falling liquid films.— *AIChE J.*, 1969, vol. 15, N 4.
20. Portalski S., Clegg A. J. An experimental study of wave inception on falling liquid films.— *CES*, 1972, vol. 27, N 6.
21. Крылов В. С., Воротилин В. П., Левич В. Г. К теории волнового движения тонких пленок жидкости.— *ТОХТ*, 1969, т. 3, № 4.