УДК 532.526

РОСТ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА УПРУГОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Б. Амфилохиев, В. В. Дробленков, А. С. Заворохина

(Ленинград)

Рассматривается поведение малых растущих возмущений в ламинарном пограничном слое на упругой поверхности.

В основу анализа положено обычное уравнение Орра — Зоммерфельда с граничными условиями для поверхности, испытывающей под действием возмущающего давления p лишь малые нормальные деформации $y\delta = kp \exp(i\theta)$ [1]

$$f(y)|_{y\to\infty} < M < \infty, \quad \alpha f(1) + f'(1) = 0, \quad f'(0) = 0 \tag{1}$$

$$-\frac{kc}{i\alpha \mathrm{R}} f'''(0) + f(0)[\exp(-i\theta) - kcu'(0)] = 0$$

Здесь $f = f(y)$ — безразмерная амплитуда функции тока возмущающего движения, y — безразмерная поперечная координата ($y = 1$ на внешней границе пограничного слоя толщиной δ и $y = 0$ на обтекаемой поверхности в положении равновесия), α — волновое число, $u = u(y)$ — отношение продольной составляющей скорости основного движения в пограничном слое к скорости U на его внешней границе, $c = c_r + ic_i$ — комплексная величина, содержащая отношение фазовой скорости распространения волны возмущений c_B к U ($c_r = c_B/U = \beta_r\delta/\alpha U$) и безразмерный коэффициент нарастаний возмущений во времени ($c_i = \beta_i\delta/\alpha U$), β_r — круговая частота волны возмущений, β_i — коэффициент нарастания возмущений во времени, $\mathrm{R} = U\delta/\nu$ — местное число Рейнольдса, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости, k — коэффициент податливости поверхности, θ — угол сдвига фаз между деформацией поверхности и возмущающим давлением.

Если использовать обычные формы для частных решений уравнения Орра — Зоммерфельда [2], то из граничных условий (1) можно получить приближенное характеристическое уравнение, в котором отброшены слагаемые порядка $(\alpha\mathrm{R})^{-1}$ и более высокого

$$F = \frac{c}{u_0' y_k}\left(\frac{z}{1+z} + \frac{kcu_0'}{\exp(-i\theta) - kcu_0'}\right) \tag{2}$$

где индекс k соответствует критическому слою ($y = y_k$ при $u = c_r$), а индекс 0 — координате $y = 0$.

Выражение (2) внешне не отличается от уравнения для нейтральных колебаний [1], но входящие в него величины должны вычисляться с учетом $c_i = 0$. Величина z, зависящая от профиля скорости основного течения, не связана с характеристиками обтекаемой поверхности и имеет такой же вид, как в случае твердой стенки [3]

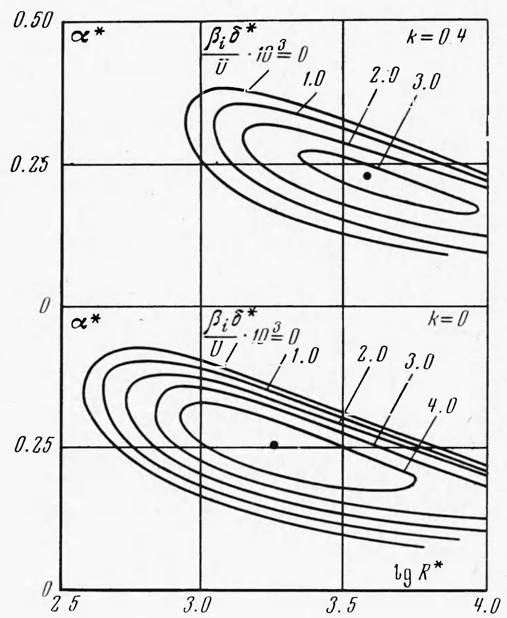
$$z = \left\{c_r u_0'\left[-\frac{1}{(u_k')^2 y_k(1-y_k)} + \frac{u_k''}{(u_k')^3}\ln\frac{y_k}{1-y_k} + \frac{1}{\alpha(1-c_r)^2}\right] + \right.$$
$$\left. + c_i u_0' \frac{u_k''\pi}{(u_k')^3}\right\} + i\left\{c_i u_0' \frac{1+c_r}{(1-c_r)^3\alpha} - c_r u_0' \frac{u_k''\pi}{(u_k')^3}\right\} \tag{3}$$

Левая часть уравнения (2) представляет собой универсальную функцию, которую, аналогично функции Титьенса для нейтральных колебаний, удалось протабулировать при фиксированных значениях параметра $c_i/y_k u_k'$ с помощью функций Ханкеля первого рода порядка $1/3$

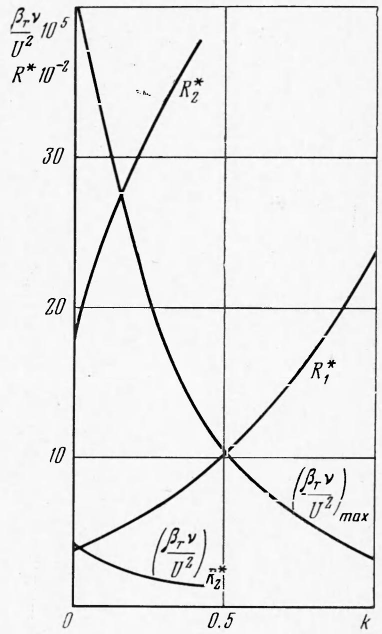
$$F = F_r\left(w, \frac{c_i}{y_k u_k'}\right) + iF_i\left(w, \frac{c_i}{y_k u_k'}\right) \tag{4}$$

$$w = y_k \sqrt[3]{\alpha \mathrm{R} u_k'} \tag{5}$$

Уравнение (2) решалось графически (с помощью построения полярных диаграмм его левой и правой частей) для профиля Блазиуса при ряде значений $c_i/y_k u_k'$ с нулевым сдвигом фаз $\theta = 0$ и четырех коэффициентах податливости $k = 0$, 0.1; 0.4; 1.0. Результаты расчетов представлены на фиг. 1 в плоскости (α^*, R^*); звездочка в обозначениях соответствует характеристикам, определяемым по толщине вытеснения δ^*. С ростом отношения $c_i/y_k u_k'$ площадь, охватываемая кривыми, уменьшается. Момент вырожде-



Фиг. 1

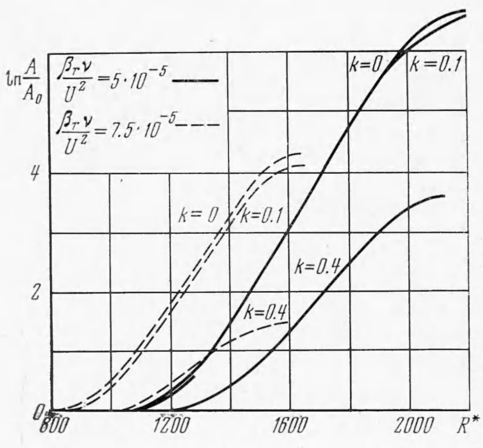


Фиг. 2

ния кривой в точку соответствует физической невозможности дельнейшего существования плоских возмущений рассматриваемого типа

$$\Psi = U\delta f \exp\{i[aX - (\beta_r + i\beta_i)T]\} \tag{6}$$

где Ψ — размерная функция тока возмущающего движения, $a = \alpha/\delta$ — частота формы волны возмущения, $X = x\delta$ — продольная размерная координата (x — безразмерная), $T = t\delta/U$ — время, t — безразмерное время, и в соответствии с гипотезой Мишеля [4] принимается за начало области ламинарно-турбулентного перехода. Соответствующее число Рейнольдса можно назвать критическим (R_2 или R_2^*), а наименьшее число Рейнольдса на кривой нейтральной устойчивости ($c_i = 0$) — числом Рейнольдса потери устойчивости (R_1 или R_1^*). Зависимость R_1^* и R_2^* от коэффициента податливости k приведена на фиг. 2.



Фиг. 3

Определенный интерес представляет также вопрос о влиянии упругости поверхности на нарастание пульсаций скорости. Продольная составляющая скорости возмущающего движения находится через функцию тока (6)

$$v_x = \frac{1}{\delta}\frac{\partial\Psi}{\partial y}A\exp[i(aX - \beta_r T)]$$

$$(A = A_0\exp(\beta_i T)) \tag{7}$$

где A — амплитуда пульсационной скорости в точке с координатой X и соответствующим числом Рейнольдса $R_x = UX/\nu$, $A_0 = Uf'$ — амплитуда пульсационной скорости в точке потери устойчивости $\beta_i = c_i = 0$ для колебания данной базразмерной частоты. Этой точке соответствует координата X_0 и числа Рейнольдса R_{x0} и R_0^*.

Учитывая, что волна возмущения распространяется [5] с групповой скоростью $c_B + \alpha \partial c_B / \partial \alpha$, из (7) можно получить

$$\ln \frac{A}{A_0} = \int_{T_0}^{T} \beta_i dT = \int_{X_0}^{X} \beta_i \left(c_B + \alpha \frac{\partial c_B}{\partial \alpha} \right)^{-1} dX =$$

$$= \int_{R_{x0}}^{R_x} \frac{\beta_i \delta^*}{R^*} \left(c_B + \frac{\partial c_B}{\partial \alpha} \right)^{-1} dR_x \tag{8}$$

В случае ламинарного пограничного слоя на плоской пластине

$$R^* = 1.72\sqrt{R_x} \quad \text{и}$$

$$\ln \frac{A}{A_0} = 0.668 \int_{R_0^*}^{R^*} \frac{\beta_i \delta^*}{U} \left(c_r + \frac{\partial c_r}{\partial \alpha} \Big|_{R^*} \right)^{-1} dR^* \tag{9}$$

На фиг. 3 произведено сравнение роста амплитуд на упругой и жесткой поверхностях при безразмерных частотах $\beta_r \nu / U^2 = 5 \cdot 10^{-5}$ и $7.5 \cdot 10^{-5}$.

Теоретическое исследование и результаты расчетов позволили установить, что с увеличением значения коэффициента податливости обтекаемой поверхности увеличивается число Рейнольдса потери устойчивости, критическое число Рейнольдса и протяженность предпереходной области (зоны, расположенной между точками, соответствующими R_1 и R_2); уменьшается диапазон опасных безразмерных частот возмущающего движения, соответствующих зоне неустойчивости, а также безразмерная частота и коэффициент нарастания наибольших растущих возмущений: замедляется рост амплитуд пульсационных скоростей.

Поступила 30 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Короткин А. И. Устойчивость ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости на упругой поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
2. Басин А. М., Короткин А. И., Козлов Л. Ф. Управление пограничным слоем судна. Л., «Судостроение», 1968.
3. Дробленков В. В., Короткин А. И. Исследование нарастающих возмущений в ламинарном пограничном слое при различных градиентах внешнего давления в связи с проблемой расчета точки перехода. Материалы по обмену опытом НТО судостроит. пром-ти им. акад. А. Н. Крылова, вып. 127, Л., «Судостроение», 1969.
4. Michel R. Determination du point de transition et calcul de la trainee des profils d'aile en liquide incompressible. ONERA Publ. No. 58, 1952.
5. Shen S. F. Calculated amplified oscillations in the plane Poiseulle and Blasius flows. J. Aero. Sci., 1954, vol. 21, No 1.