ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
2. **Галин Л. А.** Упругопластические задачи.— М.: Наука, 1984.
3. **Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.** Упругопластическая задача.— Новосибирск: Наука, 1983.
4. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности.— М.: Наука, 1969.
5. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
6. **Доборджгинидзе Л. Г.** Комплексное представление смещений и напряжений для нелинейно-упругого материала гармонического типа // Тр. Тбил. мат. ин-та, 1979.— Т. 61.
7. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.

г. Тбилиси

Поступила 3/IV 1987 г., в окончательном варианте — 18/II 1988 г.

УДК 624.074.4:539.1

Л. П. Железнов, В. В. Кабанов

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С НАЧАЛЬНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ ФОРМЫ

В большинстве известных решений задач устойчивости оболочек с начальными прогибами рассматривались осесимметричные прогибы. В некоторых работах изучалось влияние неосесимметричных прогибов. Решения получены или в классической постановке без учета моментности исходного напряженного состояния, или в предположении развития без перестройки начальных прогибов в процессе нелинейного деформирования при действии осесимметричных нагрузок.

Ниже найдено достаточно общее решение задачи без ограничений на нагрузку и форму начальных и бифуркационных прогибов. Использован метод конечных элементов в перемещениях. Конечный элемент выбран в виде прямоугольника естественной кривизны, функции формы которого учитывают его смещение как твердого тела.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку длины L, радиуса R, толщины h. Начальные несовершенства формы задаются либо рядом $w^0 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} w_{ij}\cos i\varphi \cos j\pi x/L$, либо двумерным массивом узловых значений начального прогиба и его производных $\overline{\mathbf{w}^0} = \{w_1, w_{\xi 1}, w_{\varphi 1}, \ldots, w_k, w_{\xi k}, w_{\varphi k}, \ldots, w_{\varphi n}\}$. Здесь x, φ — продольная и угловая координаты; N, M — число членов ряда Фурье в разложении начального прогиба w^0; n — число узлов расчетной конечно-элементной сетки; $\xi = x/R$, w_{ij} — амплитуды начального прогиба; ξ, φ в индексах означают дифференцирование.

На конечном элементе начальные прогибы аппроксимируются бикубическим полиномом, неизвестные коэффициенты которого выражаются через узловые значения начального прогиба и его производных. Оболочка нагружена произвольной системой поверхностных нагрузок $q_i(x, y)$, погонных контурных сил $P_{\text{к}i}(x, y)$ и моментов $M_{\text{к}i}(x, y)$, локальных сил $P_{\text{л}i}$ и моментов $M_{\text{л}i}$, $i = 1, 2, 3$ соответствует направлениям осей x, y, z.

1. Конечный элемент оболочки. Используя решение [1], запишем выражения для перемещений конечного элемента

$$u = \alpha_1\xi\eta + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4 - \alpha_6 s - \alpha_{20}c,$$
$$v = \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\xi c + \alpha_7\eta + \alpha_8 - \alpha_{20}\xi s + \alpha_{23}c - \alpha_{24}s,$$
$$w = \alpha_9\xi^3\eta^3 + \alpha_{10}\xi^3\eta^2 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi^3 + \alpha_{13}\xi^2\eta^3 + \alpha_{14}\xi^2\eta^2 + $$
$$+ \alpha_{15}\xi^2\eta + \alpha_{16}\xi^2 + \alpha_{17}\xi\eta^3 + \alpha_{18}\xi\eta^2 + \alpha_{19}\xi\eta + \alpha_{20}\xi c + \alpha_{21}\eta^3 +$$
$$+ \alpha_{22}\eta^2 + \alpha_{23}s + \alpha_{24}c + \alpha_6\xi s,\ \xi = k_2x,\ \eta = k_2y,$$
$$c = \cos\varphi,\ s = \sin\varphi,\ u = k_2u',\ v = k_2v',\ w = k_2w',\ k_2 = R^{-1}.$$

В матричной форме $\mathbf{u} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}$ ($\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ — вектор перемещений точек конечного элемента, $\mathbf{P}$ — матрица связи порядка 3×24, $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_{24}\}$ — вектор неизвестных коэффициентов полиномов).

Кинематические соотношения для конечного элемента возьмем в виде

$$\varepsilon_1 = u_\xi + w_\xi^0 w_\xi + \frac{1}{2} w_\xi^2, \quad \varepsilon_2 = v_\eta + w + w_\eta^0 w_\eta + \frac{1}{2} w_\eta^2,$$

$$\varepsilon_3 = u_\eta + v_\xi + w_\xi^0 w_\eta + w_\eta^0 w_\xi + w_\xi w_\eta,$$

$$\chi_1 = -w_{\xi\xi} k_2, \quad \chi_2 = v_\eta - k_2 w_{\eta\eta}, \quad \chi_3 = 2(v_\xi - k_2 w_{\xi\eta})$$

(индекс 0 относится к начальному прогибу, ξ, η здесь и далее означают дифференцирование по ξ, η). В матричной форме

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_l + \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_n = (\mathbf{A}_l + \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_n)\mathbf{u}, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ — вектор деформаций и изменений кривизн точек конечного элемента

$$\mathbf{A}_l^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} (\ )_\xi & 0 & (\ )_\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\ )_\eta & (\ )_\xi & 0 & (\ )_\eta & 2(\ )_\xi \\ 0 & (\ ) & 0 & -k_2(\ )_{\xi\xi} & -k_2(\ )_{\eta\eta} & -2k_2(\ )_{\xi\eta} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A}_0^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_\xi^0(\ )_\xi & w_\eta^0(\ )_\eta & [w_\xi^0(\ )_\eta + w_\eta^0(\ )_\xi] & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A}_n^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(\ )_\xi^2 & \frac{1}{2}(\ )_\eta^2 & (\ )_\xi(\ )_\eta & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Используя решение [2], запишем выражения для перемещений, внутренних усилий, потенциальной энергии конечного элемента

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}_1\bar{\mathbf{u}}, \ \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}\mathbf{B}^{-1}, \ \mathbf{T} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}_l + \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_n = \tag{1.2}$$
$$= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_l + \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_n, \ \Pi_i = W_i - A_i,$$

$$W_i = \frac{1}{2}\iint_s \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\,ds, \quad A_i = \iint_s \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\,ds + \int_l \mathbf{R}_{\text{к}}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_{\text{к}}\,dl + \mathbf{R}_{\text{л}}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_{\text{л}}.$$

Здесь $\bar{\mathbf{u}} = \{u_i, v_i, w_i, w_{\xi i}, \theta_i, w_{\xi\eta i}, \ldots, w_{\xi\eta j}, \ldots, w_{\xi\eta\text{к}}, \ldots, w_{\xi\eta n}\}$ — вектор узловых перемещений конечного элемента; $\mathbf{B}$ — матрица порядка 24×24; $\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3\}$ — вектор внутренних усилий и моментов; $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ — вектор внешней поверхностной нагрузки; $\mathbf{R}_{\text{к}} = \{P_{\text{к}1}, P_{\text{к}2}, P_{\text{к}3}, M_{\text{к}1}, M_{\text{к}2}, M_{\text{к}3}\}$, $\mathbf{R}_{\text{л}} = \{P_{\text{л}1}, P_{\text{л}2}, P_{\text{л}3}, M_{\text{л}1}, M_{\text{л}2}, M_{\text{л}3}\}$ — векторы контурных и локальных сил и моментов; $\mathbf{u}_{\text{к}} = \{u, v, w, w_\xi, \theta, w_{\xi\eta}\}$; $\bar{\mathbf{u}}_{\text{л}} = \{u_{\text{л}}, v_{\text{л}}, w_{\text{л}}, w_{\xi\text{л}}, \theta_{\text{л}}, w_{\xi\eta\text{л}}\}$; $\theta = -v + w_\eta$; матрица упругих констант

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & & & \\ B_{12} & B_{11} & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & B_{33} & & & \\ & & & D_{11} & D_{12} & 0 \\ & 0 & & D_{12} & D_{11} & 0 \\ & & & 0 & 0 & D_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} B_{11} &= Eh/(1-\nu^2), \\ B_{12} &= \nu B_{11}, \\ B_{33} &= \frac{1}{2}(1-\nu)B_{11}, \\ D_{11} &= Eh^3/12(1-\nu^2), \\ D_{12} &= \nu D_{11}, \\ D_{33} &= \frac{1}{2}(1-\nu)D_{11}. \end{aligned}$$

Суммируя потенциальные энергии отдельных элементов, находим полную потенциальную энергию оболочки.

2. Уравнения равновесия оболочки. Систему нелинейных алгебраических уравнений равновесия получаем согласно принципу возможных перемещений $\delta\Pi = 0$. Запишем вариацию потенциальной энергии оболочки

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^{mn} (\delta W_i - \delta A_i) = \sum_{i=1}^{mn} \left(\int\int_s \mathbf{T}^{\text{т}} \delta\boldsymbol{\varepsilon} ds - \delta A_i \right) = 0; \tag{2.1}$$

$$\delta A_i = \int\int_s \mathbf{q}^{\text{т}} \delta\mathbf{u} ds + \int_l \mathbf{R}_{\text{к}}^{\text{т}} \delta\mathbf{u}_{\text{к}} dl + \mathbf{R}_{\text{л}}^{\text{т}} \delta\bar{\mathbf{u}}_{\text{л}}. \tag{2.2}$$

Подставляя (1.1) в (2.1), имеем

$$\sum_{i=1}^{mn} \left(\int\int_s \mathbf{T}^{\text{т}} (\delta\boldsymbol{\varepsilon}_l + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_n) ds - \int\int_s \mathbf{q}^{\text{т}} \delta\mathbf{u}\, ds - \int_l \mathbf{R}_{\text{к}}^{\text{т}} \delta\mathbf{u}_{\text{к}} dl - \mathbf{R}_{\text{л}}^{\text{т}} \delta\bar{\mathbf{u}}_{\text{л}} \right) = 0. \tag{2.3}$$

Представляя $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon}_n = \bar{\mathbf{B}} \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \bar{\mathbf{B}}^0 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \bar{\mathbf{B}}^0 \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{2.4}$$

где

$$\bar{\mathbf{B}}^{\text{т}} = \begin{vmatrix} w_\xi & 0 & w_\eta \\ 0 & w_\eta & w_\xi \end{vmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}}^{0\text{т}} = \begin{vmatrix} w_\xi^0 & 0 & w_\eta^0 \\ 0 & w_\eta^0 & w_\xi^0 \end{vmatrix}; \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{w_\xi, w_\eta\};$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{P}^* \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{u}}; \quad p_{1j}^* = (p_{3j})_\xi; \quad p_{2j}^* = (p_{3j})_\eta - (p_{2j}) \quad (j = 1, \ldots, 24);$$

p_{ij}^* — элементы матрицы $\mathbf{P}^*$; p_{ij} — элементы матрицы $\mathbf{P}$, с учетом (1.1), (1.2) запишем (2.3) как

$$\sum_{i=1}^{mn} \left((\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1^{\text{т}} + \mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_2^{\text{т}} + \mathbf{K}_3) \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{\text{к}} - \mathbf{Q}_{\text{л}} \right) = 0.$$

Здесь

$$\mathbf{K}_u = (\mathbf{B}^{-1})^{\text{т}} \int\int_s \mathbf{P}^{\text{т}} \mathbf{A}_l^{\text{т}} \mathbf{D} \mathbf{A}_l \mathbf{P} ds \mathbf{B}^{-1}; \quad \mathbf{Q} = \int\int_s \mathbf{q}^{\text{т}} \mathbf{P}\, ds \mathbf{B}^{-1};$$

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{B}^{-1})^{\text{т}} \int\int_s \mathbf{P}^{\text{т}} \bar{\mathbf{A}}_l^{\text{т}} \mathbf{D}^* \bar{\mathbf{B}}^0 \mathbf{P}^*\, ds \mathbf{B}^{-1}; \quad \mathbf{Q}_{\text{к}} = \int_l \mathbf{R}_{\text{к}}^{\text{т}} \mathbf{P}_{\text{к}}\, dl \mathbf{B}^{-1};$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^{-1})^{\text{т}} \int\int_s \mathbf{P}^{\text{т}} \bar{\mathbf{A}}_l^{\text{т}} \mathbf{D}^* \bar{\mathbf{B}} \mathbf{P}^*\, ds\, \mathbf{B}^{-1}; \quad \mathbf{Q}_{\text{л}} = \mathbf{R}_{\text{л}};$$

$$\mathbf{K}_3 = (\mathbf{B}^{-1})^{\text{т}} \int\int_s (\mathbf{P}^*)^{\text{т}} [\bar{\mathbf{T}}] \mathbf{P}^*\, ds \mathbf{B}^{-1}; \quad [\bar{\mathbf{T}}] = (\bar{\mathbf{B}}^0)^{\text{т}} \mathbf{D}^* \bar{\mathbf{B}}^0 +$$

$$+ (\bar{\mathbf{B}}^0)^{\text{т}} \mathbf{D}^* \bar{\mathbf{B}} + (1/2)\, \bar{\mathbf{B}}^{\text{т}} \mathbf{D}^* \bar{\mathbf{B}}^0 + (1/2)\, \bar{\mathbf{B}}^{\text{т}} \mathbf{D}^* \bar{\mathbf{B}};$$

$$\bar{\mathbf{A}}_l^{\text{т}} = \begin{vmatrix} (\ )_\xi & 0 & (\ )_\eta \\ 0 & (\ )_\eta & (\ )_\xi \\ 0 & (\ ) & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{D}^* = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{vmatrix};$$

$$(p_{\text{к}})_{1j} = p_{1j}; \ (p_{\text{к}})_{2j} = p_{2j}; \ (p_{\text{к}})_{3j} = p_{3j}; \ (p_{\text{к}})_{4j} = (p_{3j})_\xi;$$

$$(p_{\text{к}})_{5j} = -p_{2j} + (p_{3j})_\eta; \ (p_{\text{к}})_{6j} = (p_{3j})_{\xi\eta} \ (j = 1, \ldots, 24);$$

$(p_{\text{к}})_{ij}$, p_{ij} — элементы матриц $\mathbf{P}_{\text{к}}$ и $\mathbf{P}$ соответственно. Учитывая условия совместности перемещений согласно [2] и граничные условия, находим систему нелинейных алгебраических уравнений равновесия оболочки

$$\psi(u) = \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u} - \bar{\mathbf{Q}} = 0, \tag{2.5}$$

где $\bar{\mathbf{K}}$ (матрица жесткости оболочки ленточной структуры) получается суммированием элементов матрицы $(\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1^{\text{т}} + \mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_2^{\text{т}} + \mathbf{K}_3)$ с использованием матрицы индексов [3]; $\mathbf{Q}$ (вектор обобщенных узловых сил оболочки) определяется суммированием элементов вектора $(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_{\text{к}} + \mathbf{Q}_{\text{л}})$ с использованием матрицы индексов; $\mathbf{u}$ — вектор узловых перемещений оболочки.

3. Алгоритм решения уравнений равновесия оболочки. Для решения системы (2.5) воспользуемся методом Ньютона — Канторовича [3]:

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{u}^n)}{\partial\mathbf{u}^n}\Delta = -\psi(\mathbf{u}^n) \tag{3.1}$$

(Δ — вектор приращений узловых перемещений). Производная $\partial\psi(\mathbf{u}^n)/\partial\mathbf{u}^n$ есть матрица вторых производных потенциальной энергии оболочки и находится из второй вариации потенциальной энергии в виде

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{u}^n)}{\partial\mathbf{u}^n} = \delta^2 W = \sum_{i=1}^{mn}\int\int(\delta\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\delta\varepsilon + \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\delta^2\varepsilon)\,ds. \tag{3.2}$$

Используя связь $\delta^2\varepsilon = \delta^2\varepsilon_n = \delta\overline{\mathbf{B}}\delta\bar{\varepsilon}$, $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\delta^2\varepsilon = \delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}^*\delta\bar{\varepsilon}$, где

$$\mathbf{T}^* = \begin{vmatrix} T_1 & T_3 \\ T_3 & T_2 \end{vmatrix},$$

с учетом (1.2), (2.4) имеем

$$\delta^2 W = \sum_{i=1}^{mn}(\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_4 + \mathbf{K}_4^{\mathrm{T}} + \mathbf{K}_5). \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{K}_4 = (\mathbf{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\int\limits_s\int\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{A}}_l^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{P}^*\,ds\mathbf{B}^{-1}$; $\mathbf{K}_5 = (\mathbf{B}^{-1})^{\mathrm{T}}\int\limits_s\int(\mathbf{P}^*)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{T}'\mathbf{P}^*\,ds\mathbf{B}^{-1}$;

$$\mathbf{T}' = (\overline{\mathbf{B}}^0)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^*\overline{\mathbf{B}}^0 + (\overline{\mathbf{B}}^0)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^*\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^*(\overline{\mathbf{B}}^0) + \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^*\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{T}^*;$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^*\overline{\mathbf{B}}^0 + \mathbf{D}^*\overline{\mathbf{B}}.$$

Подставляя (3.2) в (3.1), с учетом (2.5), (3.3), граничных условий и условий совместности [2] получаем

$$\overline{\mathbf{H}}\Delta = \overline{\mathbf{Q}} - \overline{\mathbf{K}}(\mathbf{u})^n \tag{3.4}$$

($\overline{\mathbf{H}}$ — гессиан системы ленточной структуры, который определяется суммированием элементов матрицы $\mathbf{H} = \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_4 + \mathbf{K}_4^{\mathrm{T}} + \mathbf{K}_5$).

Дополняя (3.2) уравнением

$$(\mathbf{u})^{n+1} = (\mathbf{u})^n + \Delta, \tag{3.5}$$

отыскиваем решение системы нелинейных алгебраических уравнений равновесия следующим способом. Задается небольшое значение параметра нагрузки. За нулевое приближение берется решение линейной задачи. Выполняется итерационный процесс по схеме (3.4), (3.5), в котором $\overline{\mathbf{H}}$ насчитывается один раз после первой итерации и не изменяется на других итерациях. Далее нагрузка увеличивается, за нулевое приближение берется решение с предыдущего уровня нагрузки. Выполняется итерационный процесс. На каждой итерации система линейных алгебраических уравнений решается методом Краута с использованием разложения $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{L}$ [4]. Решив систему (2.5), найдем все компоненты нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния.

4. Устойчивость оболочки. Для оценки устойчивости исходного состояния оболочки возьмем энергетический критерий устойчивости, согласно которому равновесное состояние устойчиво, если $\delta^2\Pi > 0$, и неустойчиво, если $\delta^2\Pi < 0$. Отсюда вытекает, что для устойчивого состояния, согласно критерию Сильвестера, требуется положительная определенность матрицы $\overline{\mathbf{H}}$, что в свою очередь означает положительность всех миноров $\overline{\mathbf{H}}$. Изменение знака минора равносильно изменению знака элемента матрицы $\mathbf{D}$ в разложении $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{L}$ матрицы $\overline{\mathbf{H}}$, что легко контролируется в вычислительном алгоритме без дополнительных затрат машинного времени.

После того как найдено значение параметра нагрузки, при котором равновесное состояние неустойчиво, отыскивается форма потери устойчивости оболочки из решения системы $\overline{\mathbf{H}}\delta = 0$. Для этого определяется одна

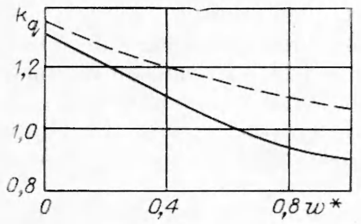

Рис. 1

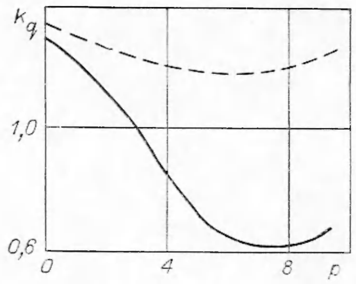

Рис. 2

из линейно зависимых строк матрицы $\overline{\mathbf{H}}$, для которой минор становится отрицательным. Эта строка и соответствующий столбец матрицы $\overline{\mathbf{H}}$ зануляются. На место диагонального элемента заносится единица, а в правую часть переносится столбец, умноженный на заданное перемещение. Алгоритм реализован комплексом программ на ЭВМ БЭСМ-6 и позволяет стандартно изучать устойчивость несовершенных оболочек при различных нагрузках и граничных условиях.

5. Пример. Исследована устойчивость шарнирно опертой по торцам несовершенной круговой цилиндрической оболочки при неосесимметричном внешнем давлении, изменяющемся по закону $q = q_0\ (1 + \cos\varphi)$, оболочка имела $\overline{L} = L/R = 2$, $R/h = 100$, начальные неправильности $w^0 = (\overline{w}\cos \pi x/L)\cos p\varphi$.

На рис. 1 представлена зависимость безразмерного параметра $k_q = q/q_{\text{в}}$ от $w^* = \overline{w}/h$ для $p = 2$, где q — критическая амплитуда неоднородного давления, $q_{\text{в}}$ — верхнее критическое однородное давление [5]. Сплошные кривые здесь и на других рисунках соответствуют решению при нелинейном исходном напряженно-деформированном состоянии, штриховые — при линейном исходном состоянии. Видно, что с увеличением амплитуды начального прогиба значение k_q падает как для линейного, так и для нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния. С ростом w^* влияние нелинейности исходного состояния увеличивается и достигает 20 % при $w^* = 1$.

На рис. 2 показана зависимость k_q от p, характеризующего изменяемость начального прогиба в окружном направлении для $w^* = 0{,}4$. Качественно решения при линейном и нелинейном исходном напряженно-деформированном состоянии совпадают, т. е. с увеличением p параметр k_q сначала уменьшается, достигая минимума при $p = p^*$ (p^* — параметр волнообразования при однородном внешнем давлении), потом возрастает, наибольшее влияние нелинейности наблюдается при $p = p^*$ и достигает 100 %.

На рис. 3, 4 для $p = 2$, $w^* = 0{,}4$ приведены форма деформирования оболочки в исходном состоянии и форма потери устойчивости, видно их

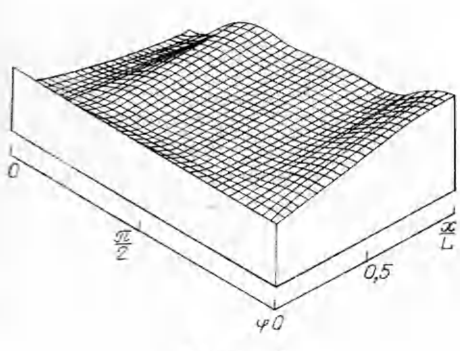

Рис. 3

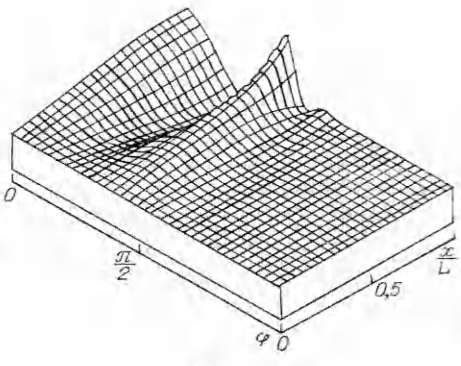

Рис. 4

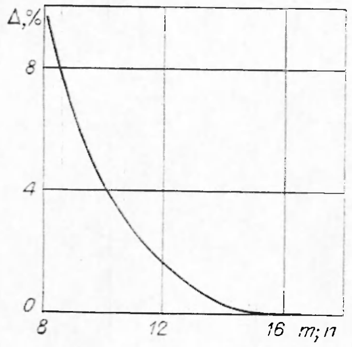

Рис. 5

несовпадение. Оболочка теряет устойчивость в верхней части с образованием шести ярко выраженных продольных складок. В силу плоскостной симметрии оболочки и нагрузки из оболочки вырезалась четвертая часть, которая в продольном и поперечном направлениях разбивалась на n криволинейных прямоугольных конечных элементов естественной кривизны.

На рис. 5 представлен график сходимости решения (определения критической нагрузки) по числу конечных элементов n. Видна достаточно хорошая сходимость решения. Результаты расчетов сравнивались с решением на сетке 16×16. Разработанный алгоритм позволяет стандартно исследовать устойчивость оболочек при произвольных нагрузках и начальных прогибах. При этом форма потери устойчивости не связывается с формой начальных прогибов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кабанов В. В., Железнов Л. П.** К расчету цилиндрической оболочки методом конечных элементов // Прикл. механика.— 1985.— Т. 21, № 9.
2. **Кабанов В. В., Железнов Л. П.** Исследование нелинейного деформирования и устойчивости цилиндрических оболочек при неосесимметричном внешнем давлении методом конечных элементов // Прикл. механика.— 1981.— Т. 17, № 3.
3. **Постнов В. А., Хархурим И. Я.** Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций.— Л.: Судостроение, 1974.
4. **Райнш, Уилкинсон.** Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра.— М.: Машиностроение, 1976.
5. **Григолюк Э. И., Кабанов В. В.** Устойчивость оболочек.— М.: Наука, 1978.

г. Новосибирск

Поступила 6/X 1987 г.,
в окончательном варианте —
16/II 1988 г.

УДК 539.376+539.4

А. Л. Аршакуни

ОБОБЩЕННАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

В [1] предложена обобщенная кинетическая модель ползучести и длительной прочности металлов при отсутствии эффекта упрочнения:

$$\dot{p} = Bf(\sigma)\exp(qa),\ p(0) = 0, \tag{1}$$

$$\dot{a} = L\varphi(\sigma)\exp(\varkappa a),\quad a(0) = a_0,\quad a(t_*) = a_*.$$

Здесь p — деформация ползучести; σ — напряжение; a — структурный параметр; t_* — время до разрушения; B, L, q, $\varkappa$, a_0, a_* — постоянные материала; $q \geqslant 0$; $B \geqslant 0$; $L \geqslant 0$; функции f, φ определены с точностью до постоянного множителя; точка обозначает дифференцирование по времени t; температура предполагается фиксированной.

Модель (1) — обобщение четырех классических моделей второй и третьей стадии ползучести [1]. Она не описывает стадию упрочнения, которая обычно удовлетворительно соответствует теории упрочнения:

$$\dot{p} = f_1(\sigma)p^{-\lambda},\ p(0) = 0 \tag{2}$$

(λ — постоянная материала).