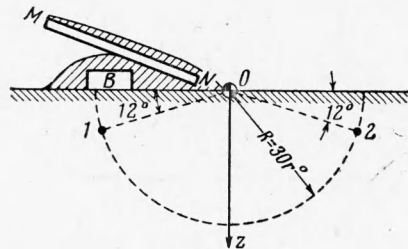
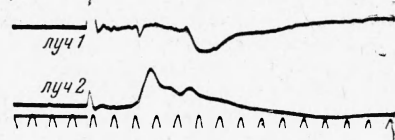


ударной волной, в точке 2 зарегистрированы два максимума напряжений. На обоих лучах первые максимумы напряжений совпадают во времени.

На фиг. 7 приводится схема эксперимента с отсечением воздушной ударной волны. Так же, как и в предыдущем опыте, имелись две симметричные точки измерения 1 и 2. На свободной поверхности над точкой 1 устанавливался ящик *B* (размер $0.8 \times 0.8 \times 0.4$ м), который обваловывался грунтом. Кроме того, на этот ящик устанавливался большой деревянный короб *MN* размером $2.5 \times 2.5 \times 0.25$ м, который также обваловывался грунтом сверху и с боков, чтобы исключить затекание воздушной ударной волны.



Фиг. 7



Фиг. 8

На фиг. 8 приведена относящаяся к этому опыту осциллограмма, из которой видно, что на луче 1, соответствующем точке 1, имеется лишь один максимум напряжения, совпадающий во времени со вторым максимумом напряжения на луче 2, относящемся к точке 2. Следовательно, второй максимум напряжения создается волной, распространяющейся по грунту из центра взрыва. Все изложенное выше позволяет сделать вывод, что регистрируемые на осциллограммах максимумы напряжений создаются двумя фронтами продольных волн.

Эксперименты показали, что в случае, когда полупространство состоит из мягкого неводонасыщенного грунта, разница в скоростях распространения фронта воздушной ударной волны и фронта волн в грунте довольно существенная, особенно на небольших расстояниях от центра взрыва ($R \leq 40r^0$). В результате этого угол наклона фронтов продольной и тем более поперечной волн, порожденных воздушной ударной волной, по отношению к свободной поверхности мал.

Поэтому интенсивность поперечной волны *DE* мала, и она не регистрируется датчиками. Что же касается фронтов *AB* и *СВО*₁, то их интенсивность, по-видимому, мала в силу того, что в рассматриваемом диапазоне расстояний движение грунта сопровождается значительными пластическими деформациями, так что скорость поперечной волны *СВО*₁ оказывается малой по сравнению со скоростью продольной волны *АГО*₂. Вследствие этого наклон фронта *AB* к свободной поверхности оказывается малым, что делает интенсивность этой волны незначительной и поэтому не регистрируемой датчиками.

Высказанные соображения относительно фронтов поперечных волн в пластически деформируемых средах являются предположительными и требуют специального изучения.

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность С. С. Григоряну и З. В. Нарожной за оказанную помощь при выполнении этой работы.

Поступила 26 XII 1962

ОБ УСЛОВИИ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СОСТОЯНИЯ

Д. Д. Ивлев, Т. Н. Мартынова (Воронеж)

При рассмотрении задач пластического течения идеально-пластических тел большое упрощение при решении достигается за счет использования кусочно-линейных аппроксимаций условий текучести (условие Треска, условие максимального приведенного напряжения и др.). Генки [1] показал, что если напряженное состояние соответствует ребру призмы, интерпретирующей в пространстве главных напряжений условие пластичности Треска (условие полной пластичности), то задача определения напряжений является статически определенной. Решения ряда задач при условии полной пластичности даны в работах А. Ю. Ишлинского [2], Р. Шилда [3] и др.

Ниже рассматриваются соотношения осесимметричной задачи жестко-пластических несжимаемых тел, когда напряженное и деформированное состояния соответствуют ребру произвольной кусочно-линейной поверхности текучести, интерпретирующей условие пластичности в пространстве главных напряжений. Показано, что и в этом случае задача определения напряжений является статически определимой.

1. Рассмотрим пространство главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 . Уравнения ребра поверхности текучести в этом пространстве имеют вид

$$a_1\sigma_1 + b_1\sigma_2 + c_1\sigma_3 = k_1, \quad a_2\sigma_1 + b_2\sigma_2 + c_2\sigma_3 = k_2 \quad (a, b, c, k = \text{const}) \quad (1.1)$$

Предположим, что условие пластичности не зависит от первого инварианта тензора напряжений, тогда для коэффициентов уравнений (1.1) имеем условия

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0, \quad a_2 + b_2 + c_2 = 0 \quad (1.2)$$

Из уравнений (1.1) при условии (1.2) получим

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k_c, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2k_a, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = 2k_b \quad (1.3)$$

Здесь

$$k_a = \frac{1}{2m}(k_1a_2 - k_2a_1), \quad k_b = \frac{1}{2m}(k_1b_2 - k_2b_1) \\ k_c = \frac{1}{2m}(k_1c_2 - k_2c_1), \quad m = a_1c_2 - a_2c_1, \quad k_a + k_b + k_c = 0$$

Отметим, что величина m не равна нулю, в противном случае плоскости (1.1) будут параллельны между собой.

Условие пластичности (1.1) окончательно может быть записано в виде

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k_c, \quad \sigma_3 = p + k_b - k_a, \quad p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (1.4)$$

Рассмотрим осесимметричное состояние тела при условии пластичности (1.4) в цилиндрических координатах ρ, θ, z .

В силу предполагаемой симметрии напряженного состояния напряжение σ_θ будет главным, в дальнейшем примем $\sigma_\theta = \sigma_3$. Между компонентами напряжения $\sigma_\rho, \sigma_z, \tau_{\rho z}$ и главными напряжениями σ_1, σ_2 имеют место соотношения

$$\sigma_\rho = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi, \quad \sigma_z = \sigma_1 \sin^2 \varphi + \sigma_2 \cos^2 \varphi \\ \tau_{\rho z} = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi, \quad \sigma_\theta = \sigma_3 \quad (1.5)$$

где φ — угол между первым главным направлением и осью ρ .

Используя выражения (1.4) и (1.5), будем иметь

$$\sigma_\rho = p + k_c \cos 2\varphi, \quad \sigma_z = p - k_c \cos 2\varphi \\ \tau_{\rho z} = -k_c \sin 2\varphi, \quad \sigma_\theta = p + k_b - k_a \quad (1.6)$$

Из (1.6) условие пластичности (1.4) можно записать в виде

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4k_c^2, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) + k_b - k_a \quad (1.7)$$

Подставляя соотношения (1.6) в уравнения равновесия, получим систему двух дифференциальных уравнений гиперболического типа относительно функций p и φ

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} - 2k_c \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - 2k_c \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{k_b - k_a - k_c \cos 2\varphi}{\rho} \\ \frac{\partial p}{\partial z} - 2k_c \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + 2k_c \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{k_c \sin 2\varphi}{\rho} \quad (1.8)$$

Уравнения характеристик системы (1.8) имеют вид

$$\frac{dz}{d\rho} = -\operatorname{tg}\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \quad (1.9)$$

где верхний знак здесь и ниже соответствует первому семейству характеристик, нижний — второму. Из уравнений (1.9) видно, что характеристики взаимно ортогональны между собой. Вдоль характеристик (1.9) имеют место соотношения

$$dp \mp 2k_c d\varphi = \frac{(k_b - k_a) d\rho \mp k_c dz}{\rho} \quad (1.10)$$

Принимая условие пластичности за пластический потенциал, запишем соотношения ассоциированного закона течения в виде

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta = 0, \quad \frac{\varepsilon_\rho - \varepsilon_z}{\varepsilon_{\rho z}} = \frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{\tau_{\rho z}} \quad (1.11)$$

Подставляя в уравнения (1.11) значения скоростей деформации через скорости перемещения и используя (1.6), будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{\rho} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sin 2\varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \cos 2\varphi = 0 \quad (1.12)$$

где u, w — скорости перемещения вдоль осей ρ, z соответственно.

Уравнения (1.12) относительно двух неизвестных функций u и w принадлежат к гиперболическому типу и имеют характеристики, совпадающие с характеристиками поля напряжений (1.9). Вдоль характеристик имеют место соотношения

$$du \pm dw \operatorname{tg} \left(\varphi \pm \frac{\pi}{4} \right) \pm \frac{u}{\rho} dz = 0 \quad (1.13)$$

Рассмотрим условие пластичности Треска (шестиугольник $ABCDEF$ на фиг. 1). Ребро A является пересечением граней

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2k$$

В этом случае $k_a = 2k, k_b = -2k, k_c = 0$ и соотношения (1.10) могут быть проинтегрированы [3]

$$\rho + 4k \ln \rho = \text{const}$$

Для ребер B, C, E, F из (1.10) вытекают известные соотношения при условии полной пластичности [1-3]

$$dp + 2kd\varphi = \frac{2k(d\rho \mp dz)}{\rho}$$

В случае условия максимального приведенного напряжения (шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ на фиг. 1) ребро A_1 образовано пересечением граней

$$\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_3 = 2k, \quad -\sigma_3 + \frac{1}{2}\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_1 = 2k$$

В этом случае $k_a = k_c = 4/3k, k_b = -8/3k$ и соотношения (1.10) принимают вид

$$dp \pm \frac{4}{3}kd\varphi = -\frac{4}{3}k \frac{3d\rho \pm dz}{\rho}$$

Аналогичные выражения имеют место для ребер C_1, D_1 и F_1 .

Ребро B_1 образовано пересечением граней

$$\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_3 = 2k, \quad -\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_3 = 2k$$

В этом случае $k_a = k_b = -4/3k, k_c = 8/3k$ и соотношения (1.10) принимают вид

$$dp \mp \frac{8}{3}kd\varphi = \mp \frac{8}{3}k \frac{dz}{\rho}$$

Аналогичные выражения имеют место для ребра E_1 . Найденные решения существенно зависят от выбора ребра.

Эти результаты могут быть распространены на идеально пластические среды, условия текучести которых зависят от первого инварианта тензора напряжений.

Условия пластичности Треска и максимального приведенного напряжения ограничивают все возможные условия текучести [4, 5].

Таким образом, решения осесимметричных задач при условии полной пластичности (условия соответствия напряженного и деформированного состояний ребрам кусочно-линейных условий текучести) может позволить найти верхнюю и нижнюю границы решений.

Поступила 21 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

- Генки Г. О некоторых статических определимых случаях равновесия в пластических телах. Сб. «Теория пластичности», М., ИЛ, 1948.
- Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бринелля. ПММ, 1944, т. VIII, вып. 3.
- Шилд Р. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии. Сб. пер. «Механика», ИЛ, 1957, № 11.
- Ивлеев Д. Д. К построению теории идеальной пластичности. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 6.
- Хейзорнсвейт Р. М. Диапазон изменения условий текучести для устойчивых идеально-пластических тел. Сб. пер. «Механика», ИЛ, 1961, № 5.