УДК 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ СКОРОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: lab4nemir@rambler.ru

Построена численно-аналитическая модель вязкоупругопластического поведения гибких пологих оболочек с учетом зависимости пластических свойств их материалов от скорости деформирования. Неупругое поведение материалов описывается теорией течения с изотропным упрочнением. Функции нагружения зависят от параметра упрочнения и интенсивности скоростей деформаций. Вязкоупругое поведение описывается линейными определяющими уравнениями модели многоконстантного тела. Поперечные сдвиги конструкций при изгибном деформировании учитываются в рамках теории Амбарцумяна, а геометрическая нелинейность — в приближении Кармана. Для численного интегрирования поставленной начально-краевой задачи используется явная схема типа "крест". Исследовано динамическое деформирование цилиндрической удлиненной панели из полимерного материала. Конструкция нагружается в поперечном направлении давлением, создаваемым воздушной взрывной волной. Показано, что неучет зависимости пластических свойств материала от скорости деформирования приводит к существенному (в несколько раз) занижению максимального по модулю значения прогиба и наибольшего значения интенсивности деформаций в процессе осцилляций, а также к завышению максимума интенсивности остаточных деформаций. Кроме того, полученные в результате такого расчета эпюры остаточных прогибов конструкции не согласуются с эпюрами, полученными в расчете с учетом указанной зависимости.

Ключевые слова: вязкоупругопластичность, теория вязкоупруго-вязкопластического деформирования, гибкая пологая оболочка, теория Амбарцумяна, нагрузка взрывного типа, численная схема типа "крест".

DOI: 10.15372/PMTF20220213

Введение. Современные инженерные конструкции часто подвергаются интенсивному нагружению [1–3], при котором материал конструкции деформируется пластически. Поэтому актуальной является проблема моделирования неупругого динамического деформирования конструкций [2–12]. Упругопластическое деформирование конструкций и материалов численно исследовалось в работах [2, 6, 9], вязкоупругопластическое поведение материала моделировалось в [4, 5, 11, 12]. Однако известно, что неупругое динамическое поведение ряда материалов зависит от скорости их деформирования [7, 8, 13], поэтому в работах [5, 7, 8, 10] моделировалось вязкопластическое и упруговязкопластическое поведение

Работа выполнена в рамках государственного задания (номер государственной регистрации 121030900260-6).

таких материалов. В работе [5] используются соотношения теории вязкоупругопластического деформирования сплошной среды с учетом зависимости ее пластических свойств от скорости деформирования — теория вязкоупруго-вязкопластического деформирования (теория ВУВП-деформирования).

Как отмечалось в работе [7], при моделировании неупругого поведения материала актуальной является не только проблема получения адекватных определяющих соотношений, но и проблема разработки численных методов интегрирования возникающих при этом начально-краевых задач [1–3, 6, 8–12].

Для учета поперечных сдвигов изгибаемых пластин и оболочек, как правило, используются неклассические теории Рейсснера [2, 14, 15] или Амбарцумяна [9–11, 16], позволяющие описывать волновые процессы при динамическом нагружении таких конструкций.

В данной работе с использованием теории ВУВП-деформирования моделируется динамическое поведение гибких пологих оболочек в рамках теории Амбарцумяна. Численное интегрирование соответствующей начально-краевой задачи проводится с использованием явной схемы типа “крест”.

1. Численно-аналитическая модель ВУВП-деформирования материала. Будем считать, что малые деформации ε_{ij} представляются в виде суммы вязкоупругих e_{ij} и пластических p_{ij} составляющих [2, 4–12]. Вязкопластическое течение материала полагается ассоциированным с поверхностью нагружения, которая задается в форме, соответствующей условию текучести Мизеса [8, 10]:

$$T = \tau_s(\chi, H), \tag{1}$$

а вязкоупругое поведение описывается моделью пятиконстантного тела:

$$\begin{gathered}
\dot{\bar{e}}_{ij} + \alpha\ddot{\bar{e}}_{ij} + \beta\bar{e}_{ij} = \frac{\ddot{s}_{ij}}{2\eta} + \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\mu}, \qquad i,j = 1,2,3, \\
\dot{\varepsilon}_0 + \alpha_0\ddot{\varepsilon}_0 + \beta_0\varepsilon_0 = \frac{\ddot{\sigma}_0}{3\eta_0} + \frac{\dot{\sigma}_0}{3K} + \frac{\sigma_0}{3\mu_0}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
T = \sqrt{\frac{s_{ij}s_{ij}}{2}}, \quad H = \sqrt{2\xi_{ij}\xi_{ij}}, \quad \chi = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{2\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}}\,dt, \quad \xi_{ij} \equiv \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\bar{e}}_{ij} + \dot{p}_{ij}, \quad \dot{p}_{ll} = 0, \\
s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_{ll}}{3}, \quad \bar{e}_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{ll}}{3}, \quad i,j = 1,2,3,
\end{gathered} \tag{3}$$

ξ_{ij} — девиатор скоростей деформаций; σ_{ij} — тензор напряжений; χ — параметр Одквиста; τ_s — предел текучести при чистом сдвиге; t_0 — начальный момент времени t; α, β, η, G, μ — вязкие и упругие характеристики при сдвиге; α_0, β_0, η_0, K, μ_0 — те же характеристики при объемном растяжении-сжатии; δ_{ij} — символ Кронекера; точка означает производную по времени t; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3, за исключением особо оговоренных случаев; константы G, K — модуль сдвига и объемный модуль упругости; μ, μ_0 — коэффициенты линейной вязкости при сдвиге и объемном растяжении-сжатии. Из соотношений (2) как частные случаи следуют определяющие уравнения вязкоупругих моделей тела Максвелла — Больцмана, тела Фойгта — Кельвина и стандартного вязкоупругого тела. При $\alpha = \alpha_0 = 0$ или $\eta = \eta_0 \to \infty$ уравнения (2) описывают ограниченное упругонаследственное деформирование и неограниченное вязкое течение [12].

Следуя [10, 12], с использованием равенств (1)–(3) получаем

$$\dot p_{ij} = \tau_s^{-2}(1+g)^{-1}[s_{ml}\dot\varepsilon_{ml} + (\alpha - \tau_H/G)s_{ml}\ddot\varepsilon_{ml} + \beta s_{ml}(\varepsilon_{ml} - p_{ml}) - \\ - \alpha s_{ml}\ddot p_{ml} - s_{ml}\ddot s_{ml}/(2\eta) - s_{ml}s_{ml}/(2\mu)]s_{ij}/2, \qquad i,j = 1,2,3, \qquad (4)$$

где

$$g = g(\chi, H) \equiv \frac{\tau_\chi}{G}, \qquad \tau_\chi(\chi, H) \equiv \frac{\partial \tau_s}{\partial \chi}, \qquad \tau_H(\chi, H) \equiv \frac{\partial \tau_s}{\partial H}. \qquad (5)$$

Как отмечено выше, для численного интегрирования исследуемой задачи будем использовать метод шагов по времени [1–3, 6, 9–12], определяя решение в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где $\Delta = \mathrm{const} > 0$ — шаг по времени. При этом двумерные уравнения движения пологой оболочки, как и в [9–12], будем численно интегрировать с помощью явной схемы типа “крест” на трехточечном шаблоне по времени $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, имеющей второй порядок точности по Δ [2]. Для того чтобы вывести определяющие уравнения в форме, предложенной в [10–12], и обеспечить устойчивость разрабатываемой численной схемы [11], для произвольной функции $f(t)$ используем формулу трапеций с шагом назад, также имеющую второй порядок точности по Δ. Из этой формулы следует [12]

$$f^{(n)} = \Delta \dot f^{(n)}/2 + f^{(n-1/2)}, \qquad \dot f^{(n)} = 2(f^{(n)} - f^{(n-1/2)})/\Delta, \qquad (6)$$

где

$$f^{(n-1/2)} \equiv f^{(n-1)} + \Delta \dot f^{(n-1)}/2, \qquad f^{(n)} \equiv f(t_n), \qquad \dot f^{(n)} \equiv \dot f(t_n). \qquad (7)$$

Как и в [10–12], используя разложения $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$, $\bar\varepsilon_{ij} = \bar e_{ij} + p_{ij}$ и соотношения (6), выразим в (2), (4) деформации ε_{ij}, e_{ij}, $\bar e_{ij}$, p_{ij} и их вторые производные по t через скорости этих деформаций, тогда преобразованное равенство (4) с учетом преобразованных соотношений (2) в текущий момент времени t_n можно записать в матричной форме

$$A^{(n)}\dot{\boldsymbol\varepsilon}^{(n)} = Z\dot{\boldsymbol\sigma}^{(n)} + W^{(n)}\ddot{\boldsymbol\sigma}^{(n)} + V^{(n)}\boldsymbol\sigma^{(n)} + \boldsymbol q^{(n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (8)$$

где

$$\boldsymbol\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)^{\text{т}} \equiv (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12})^{\text{т}}, \\ \boldsymbol\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6)^{\text{т}} \equiv (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12})^{\text{т}}, \qquad (9)$$

$A^{(n)}, Z, W^{(n)}, V^{(n)}$ — матрицы размером 6×6; $\boldsymbol q^{(n)}$ — шестикомпонентный вектор-столбец:

$$A^{(n)} = \bar A - (\zeta - 2\tau_H^{(n)}/(\Delta G))Y^{(n)}, \qquad W^{(n)} = \bar W - Y^{(n)}/(2\eta),$$

$$\boldsymbol q^{(n)} = Y^{(n)}[\beta(\boldsymbol\varepsilon^{(n-1/2)} - \boldsymbol p^{(n-1/2)}) - 2\alpha(\dot{\boldsymbol\varepsilon}^{(n-1/2)} - \dot{\boldsymbol p}^{(n-1/2)})/\Delta + 2\tau_H^{(n)}\dot{\boldsymbol\varepsilon}^{(n-1/2)}/(\Delta G)] - \\ - J(\beta\bar{\boldsymbol e}^{(n-1/2)} - 2\alpha\dot{\bar{\boldsymbol e}}^{(n-1/2)}/\Delta)/\zeta + (2\alpha_0\dot\varepsilon_0^{(n-1/2)}/\Delta - \beta_0\varepsilon_0^{(n-1/2)})\boldsymbol i, \qquad (10)$$

$$\boldsymbol p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)^{\text{т}} \equiv (p_{11}, p_{22}, p_{33}, 2p_{23}, 2p_{31}, 2p_{12})^{\text{т}},$$

$$\bar{\boldsymbol e} = (\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3, \bar e_4, \bar e_5, \bar e_6)^{\text{т}} \equiv (\bar e_{11}, \bar e_{22}, \bar e_{33}, 2\bar e_{23}, 2\bar e_{31}, 2\bar e_{12})^{\text{т}}, \qquad \boldsymbol i = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^{\text{т}}.$$

С учетом (5), (7) ненулевые элементы матриц $\bar A = (\bar a_{ij})$, $Y^{(n)} = (y_{ij}^{(n)})$, $Z = (z_{ij})$, $\bar W = (\bar w_{ij})$, $V^{(n)} = (v_{ij}^{(n)})$, $J = (J_{ij})$ размером 6×6 представляются в виде

$$\bar a_{ij} = \delta_{ij} - (1-\zeta)/3, \qquad \bar a_{ll} = 1/2, \qquad z_{ij} = \delta_{ij}(2\zeta G)^{-1} + [(3K)^{-1} - (2\zeta G)^{-1}]/3,$$

$$z_{ll} = (2\zeta G)^{-1}, \qquad \bar w_{ij} = \delta_{ij}(2\zeta\eta)^{-1} + [(3\eta_0)^{-1} - (2\zeta\eta)^{-1}]/3, \quad \bar w_{ll} = (2\zeta\eta)^{-1},$$

$$
\begin{gathered}
v_{ij}^{(n)} = (6\mu)^{-1}(\zeta^{-1} - \bar{z}^{(n)})(3\delta_{ij} - 1) + (9\mu_0)^{-1}, \qquad v_{ll}^{(n)} = (2\mu)^{-1}(\zeta^{-1} - \bar{z}^{(n)}), \\
J_{ii} = 1, \qquad J_{ll} = 1/2 \qquad (i, j = \overline{1,3}, \quad l = \overline{4,6}\,), \\
y_{rm}^{(n)} = (\sqrt{2}\,T^{(n)})^{-2}\bar{z}^{(n)} s_r^{(n)} s_m^{(n)} \qquad (r, m = \overline{1,6}\,), \\
(\sqrt{2}\,T^{(n)})^2 = \sum_{j=1}^{3} s_j^{(n)} s_j^{(n)} + 2\sum_{j=4}^{6} s_j^{(n)} s_j^{(n)}, \qquad \bar{z}^{(n)} = c^{(n)}(\zeta + g^{(n)})^{-1}, \\
\zeta \equiv 1 + 2\alpha/\Delta + \beta\Delta/2 = \mathrm{const}, \qquad g^{(n)} \equiv \tau_\chi^{(n)}/G, \\
c^{(n)} = \begin{cases} 0, & T^{(n)} < \tau_s^{(n)} \quad \text{или} \quad T^{(n)} = \tau_s^{(n)}, \quad S^{(n)} \leqslant 0, \\ 1, & T^{(n)} = \tau_s^{(n)}, \quad S^{(n)} > 0, \end{cases} \\
S^{(n)} \equiv \boldsymbol{s}^{(n)\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{s}}^{(n)} + \sum_{i=4}^{6} s_i^{(n)} \dot{s}_i^{(n)} - \frac{4}{H^{(n)}}\tau_s^{(n)}\tau_H^{(n)}\xi^{(n)\mathrm{T}}\ddot{\varepsilon}^{(n)}, \qquad \tau_s^{(n)} = \tau_s(\chi^{(n)}, H^{(n)}), \\
\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)^{\mathrm{T}} \equiv (s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{23}, s_{31}, s_{12})^{\mathrm{T}}, \\
\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6)^{\mathrm{T}} \equiv (\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12})^{\mathrm{T}},
\end{gathered}
\tag{11}
$$

c — параметр переключения ($c = 0$ при вязкоупругом деформировании, разгрузке или нейтральном нагружении, $c = 1$ при активном ВУВП-деформировании). Выражение для c в (11) получено в [10]. В соотношениях (11) по повторяющимся индексам i, l суммирование не проводится.

Для того чтобы преобразовать (8) к форме, удобной для использования схемы типа “крест”, вычислим вектор-функцию напряжений $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ (см. (9)) и ее вторую производную $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)})^{\cdot}$ по формулам (6). Тогда с учетом (7) окончательно получаем

$$
\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} = B^{(n)}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)} + \bar{\boldsymbol{p}}^{(n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}
$$

где

$$
\begin{gathered}
B^{(n)} = \bar{\bar{Z}}^{(n)} A^{(n)}, \qquad \bar{\boldsymbol{p}}^{(n)} = \bar{\bar{Z}}^{(n)} \bar{\boldsymbol{q}}^{(n)}, \qquad \bar{\bar{Z}}^{(n)} = (\bar{Z}^{(n)})^{-1}, \\
\bar{Z}^{(n)} = Z + 2W^{(n)}/\Delta + \Delta V^{(n)}/2, \qquad \bar{\boldsymbol{q}}^{(n)} = 2W^{(n)}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(n-1/2)}/\Delta - V^{(n)}\boldsymbol{\sigma}^{(n-1/2)} - \boldsymbol{q}^{(n)},
\end{gathered}
\tag{13}
$$

$(\bar{Z}^{(n)})^{-1}$ — матрица, обратная матрице $\bar{Z}^{(n)}$ размером 6×6; $\bar{\boldsymbol{p}}^{(n)}$, $\bar{\boldsymbol{q}}^{(n)}$ — шестикомпонентные вектор-столбцы.

Как и в [10–12], при $t = t_n$ матрицы $A^{(n)}$, $W^{(n)}$, $V^{(n)}$, $\bar{Z}^{(n)}$, $\bar{\bar{Z}}^{(n)}$ и вектор-столбцы $\bar{\boldsymbol{q}}^{(n)}$, $\boldsymbol{q}^{(n)}$ (см. (10), (11), (13)) полагаются линеаризованными с использованием метода, аналогичного методу переменных параметров упругости, поэтому согласно (13) в равенстве (12) линеаризованными являются элементы матрицы $B^{(n)}$ размером 6×6 и вектора $\bar{\boldsymbol{p}}^{(n)}$.

Замечание. Если в предыдущий момент времени t_m величины $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$, $\boldsymbol{p}^{(m)}$, $\bar{\boldsymbol{e}}^{(m)}$, $\varepsilon_0^{(m)}$, $\boldsymbol{\sigma}^{(m)}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}$, $\dot{\boldsymbol{p}}^{(m)}$, $\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{(m)}$, $\dot{\varepsilon}_0^{(m)}$, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)}$, $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}$, $\ddot{\boldsymbol{p}}^{(m)}$, $\ddot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{(m)}$, $\ddot{\varepsilon}_0^{(m)}$, $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)}$ ($m = n - 1$) известны, то согласно первой формуле (7) в соотношениях (10), (13) известны также величины $\boldsymbol{\varepsilon}^{(l)}$, $\boldsymbol{p}^{(l)}$, $\bar{\boldsymbol{e}}^{(l)}$, $\varepsilon_0^{(l)}$, $\boldsymbol{\sigma}^{(l)}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(l)}$, $\dot{\boldsymbol{p}}^{(l)}$, $\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{(l)}$, $\dot{\varepsilon}_0^{(l)}$, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}$ ($l = n - 1/2$) при $t = t_n$.

Определяющие уравнения в форме (12) использовались при численном интегрировании неупругих динамических задач об изгибе композитных пластин [10–12].

2. Метод расчета ВУВП-поведения пологих оболочек. Рассмотрим криволинейную панель толщиной $2h$. Введем ортогональную систему координат x_i, так чтобы отсчетная поверхность $x_3 = 0$ была срединной ($|x_3| \leqslant h$), а координатные линии x_1, x_2 — линиями главных кривизн на этой поверхности. В предположении, что внешними касательными силами на лицевых поверхностях конструкции можно пренебречь, выражения для деформаций пологой оболочки ε_{ij} в рамках неклассической теории Амбарцумяна имеют вид [9, 16]

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{ij}(t,\boldsymbol{r}) = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2 - x_3\,\partial_i\,\partial_j w + h^{-2} x_3 (h^2 - x_3^2/3)(\partial_i \varepsilon^0_{j3} + \partial_j \varepsilon^0_{i3}) + \\
+ \delta_{ij} R_i^{-1} w + \partial_i w\,\partial_j w/2, \\
\varepsilon_{i3}(t,\boldsymbol{r}) = h^{-2}(h^2 - x_3^2)\varepsilon^0_{i3}(t,\boldsymbol{x}), \qquad j = 1,2, \\
\boldsymbol{x} \in \Omega, \qquad |x_3| \leqslant h, \qquad t \geqslant t_0, \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \qquad \boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3),
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где w — прогиб; u_i — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности; R_i — главные радиусы кривизны этой поверхности; ε^0_{i3} — деформации поперечных сдвигов в точках срединной поверхности; ∂_i — оператор частного дифференцирования по переменной x_i ($i = 1, 2$); Ω — область, занимаемая панелью в плане. В соотношениях (14) функции w, u_i и ε^0_{i3} ($i = 1, 2$) являются неизвестными.

Поскольку конструкция полагается гибкой тонкостенной механической системой, выражение для поперечного нормального напряжения $\sigma_{33}(t,\boldsymbol{r})$ с приемлемой для приложений точностью можно представить в виде [10–12, 15]

$$
\sigma_{33}(t,\boldsymbol{r}) = [(\sigma_+(t,\boldsymbol{x}) - \sigma_-(t,\boldsymbol{x}))x_3/h + \sigma_+(t,\boldsymbol{x}) + \sigma_-(t,\boldsymbol{x})]/2, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leqslant h, \tag{15}
$$

где $\sigma_\pm(t,\boldsymbol{x}) \equiv \sigma_{33}(t,\boldsymbol{x},\pm h)$ — известные нормальные напряжения на верхней (знак “+”) и нижней (знак “−”) лицевых поверхностях.

К выражениям (14), (15) необходимо добавить уравнения движения гибкой искривленной панели и соответствующие начальные и граничные условия [9, 16].

С учетом соотношений соответствия компонент вектор-столбцов $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ (см. (9)) из третьего уравнения линеаризованной системы определяющих уравнений (12) выразим нормальную компоненту скорости деформации:

$$
\dot\varepsilon^{(n)}_{33} = (\dot\sigma^{(n)}_{33} - \bar p^{(n)}_3 - b^{(n)}_{31}\dot\varepsilon^{(n)}_{11} - b^{(n)}_{32}\dot\varepsilon^{(n)}_{22} - 2b^{(n)}_{34}\dot\varepsilon^{(n)}_{23} - 2b^{(n)}_{35}\dot\varepsilon^{(n)}_{31} - 2b^{(n)}_{36}\dot\varepsilon^{(n)}_{12})/b^{(n)}_{33}, \tag{16}
$$

где $b^{(n)}_{3i}$ ($i = \overline{1,6}$) и $\bar p^{(n)}_3$ — компоненты матрицы $B^{(n)}$ и вектора $\bar{\boldsymbol{p}}^{(n)}$. Величина $\dot\sigma_{33}$ определяется путем дифференцирования по t соотношения (15). Скорости деформаций $\dot\varepsilon_{ij}$, содержащиеся в правой части (16), можно получить путем дифференцирования по времени соотношений (14).

Как отмечено выше, для численного решения исследуемой задачи используется метод шагов по времени [1–3, 6, 9–12]. Поэтому будем считать, что в дискретные моменты времени t_m известны следующие функции (см. замечание):

$$
\begin{gathered}
w^{(m)}(\boldsymbol{x}) \equiv w(t_m,\boldsymbol{x}), \quad u^{(m)}_l(\boldsymbol{x}) \equiv u_l(t_m,\boldsymbol{x}), \quad \gamma^{(m)}_l(\boldsymbol{x}) \equiv \gamma_l(t_m,\boldsymbol{x}), \quad \sigma^{(m)}_\pm(\boldsymbol{x}) \equiv \sigma_\pm(t_m,\boldsymbol{x}), \\
\sigma^{(m)}_{ij}(\boldsymbol{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m,\boldsymbol{r}), \quad \varepsilon^{(m)}_{ij}(\boldsymbol{r}) \equiv \varepsilon_{ij}(t_m,\boldsymbol{r}), \quad \chi^{(m)}(\boldsymbol{r}) \equiv \chi(t_m,\boldsymbol{r}), \quad \dot\varepsilon^{(s)}_{ij}(\boldsymbol{r}) \equiv \dot\varepsilon_{ij}(t_s,\boldsymbol{r}), \\
\ddot\varepsilon^{(s)}_{ij}(\boldsymbol{r}) \equiv \ddot\varepsilon_{ij}(t_s,\boldsymbol{r}), \quad p^{(s)}_{ij}(\boldsymbol{r}) \equiv p_{ij}(t_s,\boldsymbol{r}), \quad \dot p^{(s)}_{ij}(\boldsymbol{r}) \equiv \dot p_{ij}(t_s,\boldsymbol{r}), \quad \ddot p^{(s)}_{ij}(\boldsymbol{r}) \equiv \ddot p_{ij}(t_s,\boldsymbol{r}), \\
\bar e^{(s)}_{ij}(\boldsymbol{r}) \equiv \bar e_{ij}(t_s,\boldsymbol{r}) = \varepsilon^{(s)}_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon^{(s)}_0 - p^{(s)}_{ij}, \quad \dot{\bar e}^{(s)}_{ij}(\boldsymbol{r}) \equiv \dot{\bar e}_{ij}(t_s,\boldsymbol{r}), \quad \ddot{\bar e}^{(s)}_{ij}(\boldsymbol{r}) \equiv \ddot{\bar e}_{ij}(t_s,\boldsymbol{r}),
\end{gathered}
\tag{17}
$$

$$\varepsilon_0^{(s)}(\boldsymbol{r}) \equiv \varepsilon_0(t_s, \boldsymbol{r}) = \varepsilon_{ii}^{(s)}/3, \quad \dot{\varepsilon}_0^{(s)}(\boldsymbol{r}) \equiv \dot{\varepsilon}_0(t_s, \boldsymbol{r}), \quad \ddot{\varepsilon}_0^{(s)}(\boldsymbol{r}) \equiv \ddot{\varepsilon}_0(t_s, \boldsymbol{r}),$$
$$\dot{\sigma}_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{r}) \equiv \dot{\sigma}_{ij}(t_s, \boldsymbol{r}), \qquad \ddot{\sigma}_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{r}) \equiv \ddot{\sigma}_{ij}(t_s, \boldsymbol{r}),$$
$$i, j = \overline{1,3}, \quad l = 1, 2, \quad s = n-1, \quad m = n-1, n, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leqslant h,$$

где

$$\gamma_l(t, \boldsymbol{x}) \equiv 8\varepsilon_{l3}^0/5 - \partial_l w, \qquad l = 1, 2. \tag{18}$$

Заменяя в уравнениях движения гибкой пологой оболочки [16] вторые производные по времени t от кинематических переменных w, u_i, γ_i их конечно-разностными аналогами на трехточечном шаблоне, с учетом (18) и обозначений, аналогичных обозначениям в (7), (17), получаем [9]

$$\begin{gathered}
\frac{2h\rho}{\Delta^2}\,(w^{(n+1)} - 2w^{(n)} + w^{(n-1)}) = \\
= \sum_{l=1}^{2}\Big[\partial_l\Big(F_{l3}^{(n)} + \sum_{j=1}^{2} F_{lj}^{(n)}\,\partial_j w^{(n)}\Big) + R_l^{-1}F_{ll}^{(n)}\Big] + \sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)}, \\
\frac{2h\rho}{\Delta^2}\,(u_i^{(n+1)} - 2u_i^{(n)} + u_i^{(n-1)}) = \\
= \sum_{j=1}^{2}\partial_j(F_{ij}^{(n)} - F_{j3}^{(n)}\,\partial_i w^{(n)}) - R_i^{-1}F_{i3}^{(n)} - (\sigma_+^{(n)} - \sigma_-^{(n)})\,\partial_i w^{(n)}, \\
\frac{2h^3\rho}{3\Delta^2}\,(\gamma_i^{(n+1)} - 2\gamma_i^{(n)} + \gamma_i^{(n-1)}) = \sum_{j=1}^{2}\partial_j M_{ij}^{(n)} - F_{i3}^{(n)}, \\
\boldsymbol{x} \in \Omega, \qquad i = 1, 2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,
\end{gathered} \tag{19}$$

где F_{ij}, M_{il} — внутренние силы и моменты:

$$\begin{gathered}
F_{ij}(t, \boldsymbol{x}) = \int_{-h}^{h} \sigma_{ij}(t, \boldsymbol{r})\,dx_3, \qquad M_{il}(t, \boldsymbol{x}) = \int_{-h}^{h} \sigma_{il}(t, \boldsymbol{r})x_3\,dx_3, \\
i, l = 1, 2, \qquad j = \overline{1,3},
\end{gathered} \tag{20}$$

ρ — объемная плотность материала конструкции. Массовые силы в уравнениях (19) не учитываются.

Используя выражения (20) с учетом предположений (17), можно вычислить все силовые факторы и внешние поперечные нагрузки $\sigma_\pm$, входящие в правые части равенств (19), в данный момент времени t_n. Добавляя к (19) требуемые граничные условия [9], из этих уравнений определяем функции $w^{(n+1)}$, $u_i^{(n+1)}$, $\gamma_i^{(n+1)}$ в следующий момент времени t_{n+1}. Далее по формулам (14) с учетом (18) получаем значения деформаций панели $\varepsilon_{ij}^{(n+1)}$. В предыдущий момент времени t_{n-1} согласно (14), (17), (18) деформации $\varepsilon_{ij}^{(n-1)}$ известны, поэтому с использованием формул численного дифференцирования по t и выражения (16) с учетом (15) можно вычислить все скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(n)}$ (или $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)}$) в каждой точке пологой оболочки при $t = t_n$. Затем по формуле (12) определяем скорости напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)}$ (или $\dot{\sigma}_{ij}^{(n)}$). Подставляя во второе равенство (6) с учетом (4), (7) функции $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{p}_{ij}$, $\dot{\sigma}_{ij}$, получаем значения вторых производных $\ddot{\varepsilon}_{ij}^{(n)}$, $\ddot{p}_{ij}^{(n)}$, $\ddot{e}_{ij}^{(n)}$, $\ddot{\varepsilon}_{0}^{(n)}$, $\ddot{\sigma}_{ij}^{(n)}$ $(i,j=\overline{1,3})$. С использованием третьего равенства (3) и формулы трапеций параметр упрочнения χ при $t=t_n$ с точностью порядка Δ^2 можно определить следующим образом:

$$\chi^{(n)}(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{t_0}^{t_n} \sqrt{2\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}}\,dt = \chi^{(n-1)}(\boldsymbol{r}) + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} \sqrt{2\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}}\,dt \approx$$
$$\approx \chi^{(n-1)}(\boldsymbol{r}) + \frac{\Delta}{2}\Big(\sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(n)}\dot{p}_{ij}^{(n)}} + \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(n-1)}\dot{p}_{ij}^{(n-1)}}\,\Big), \qquad (21)$$

где функции $\chi^{(n-1)}$, $\dot{p}_{ij}^{(n-1)}$ и $\dot{p}_{ij}^{(n)}$ известны. Так как величины $\dot{p}_{ij}^{(n)}$ итерационно уточняются методом переменных параметров упругости, то на основе (21) уточняются также значения параметра Одквиста $\chi^{(n)}(\boldsymbol{r})$. При этом в качестве начального приближения можно задать $\chi^{(n)}=\chi^{(n-1)}$.

Таким образом, все функции, указанные в (17), становятся известными при $t=t_{n+1}$ (при замене индекса n на $n+1$). Далее численное решение исследуемой задачи строится аналогично тому, как это сделано в [9–12].

С учетом принятых предположений (17) в рассматриваемой задаче помимо стандартных начальных условий для функций w, u_l, γ_l $(l=1,2)$ при $t=t_0$ необходимо задать значения вторых производных $\ddot{\varepsilon}_{ij}^{(0)}$, $\ddot{p}_{ij}^{(0)}$ и $\ddot{\sigma}_{ij}^{(0)}$. Если до момента времени t_0 конструкция покоилась в естественном состоянии, то $\ddot{\varepsilon}_{ij}^{(0)}(\boldsymbol{r}) = \ddot{p}_{ij}^{(0)}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$, $\ddot{\sigma}_{ij}^{(0)}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$, $i,j=\overline{1,3}$.

После дискретизации области Ω по пространственным переменным x_1 и x_2 получаем явную численную схему типа “крест” [2, 9–12].

3. Обсуждение результатов расчетов. Рассмотрим ВУВП-деформирование и вязкоупругопластическое деформирование относительно тонкой цилиндрической панели толщиной $2h=2$ см, имеющей в плане прямоугольную форму (Ω: $|x_1|\leqslant a$, $|x_2|\leqslant b$, $a=3b$, $b=50$ см, $h/b=1/50$). Оболочка искривлена в направлении x_2 ($1/R_1=0$, $R_2=\mathrm{const}$) и имеет стрелу подъема $f=10$ см. Радиус кривизны конструкции вычисляется по формуле [9] $R_2=(b^2+f^2)/(2f)$, где $0\leqslant f\leqslant 0{,}4b$. Панель жестко закреплена по всей кромке Γ ($w=u_i=0$, $\gamma_i=0$, $t\geqslant t_0$, $\boldsymbol{x}\in\Gamma$) и до начального момента времени $t=t_0$ покоится в естественном состоянии ($w=u_i=0$, $\gamma_i=0$, $t\leqslant t_0$, $\boldsymbol{x}\in\Omega$). Затем конструкция нагружается избыточным давлением $p(t)$, создаваемым воздушной взрывной волной (см. (15), (19)) [1]:

$$\sigma_+ - \sigma_- \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0\leqslant t\leqslant t_{\max}, \\ p_{\max}\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_{\max})}, & t>t_{\max}, \end{cases}$$
$$\alpha = -\ln(0{,}01)/(t_{\min}-t_{\max}) > 0, \qquad t_{\min}\gg t_{\max}. \qquad (22)$$

Величины $p_{\max}$, $t_{\max}$ и $t_{\min}$ определены в [9–11]. Согласно первому выражению (22) при $p_{\max}>0$ давлением нагружается нижняя (вогнутая) лицевая поверхность, а при $p_{\max}<0$ — верхняя (выпуклая) поверхность. На основе экспериментальных данных [1] в расчетах принято $t_{\max}=0{,}1$ мс и $t_{\min}=2$ мс.

Панель изготовлена из полимерного материала, неупругое поведение которого при активном нагружении и фиксированной скорости деформации при растяжении-сжатии описывается линейной зависимостью

$$\sigma = \mathrm{sign}\,(\varepsilon_p)\sigma_s + E_s\varepsilon_p,$$

где σ, ε_p — осевое напряжение и соответствующая пластическая деформация; $E_s = E_s(\dot{\varepsilon})$ — модуль упрочнения; $\sigma_s=\sigma_s(\dot{\varepsilon})$ — условный предел текучести при скорости деформации $\dot{\varepsilon}=\mathrm{const}$. Вязкоупругое поведение материала описывается моделью тела Максвелла — Больцмана [17], объемная вязкость материала не учитывается: $\alpha=\alpha_0=0$, Физико-механические характеристики материала панели [18]

$\dot{\varepsilon}$, с$^{-1}$	ρ, кг/м^3	E, ГПа	ν	σ_s, МПа	E_s, ГПа	μ, МПа$\cdot$с
$5 \cdot 10^{-4}$	1210	2,8	0,33	20	1,114	100
104,0				22	1,238	

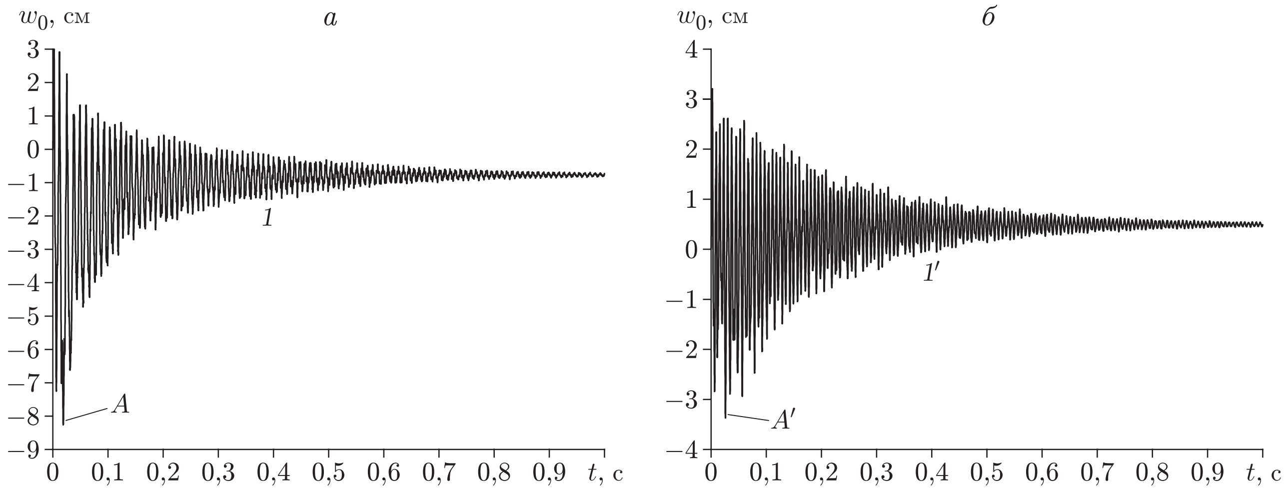

Рис. 1. Зависимости поперечных колебаний цилиндрической панели в центральной точке от времени при $p_{\max} = 1{,}7$ МПа:

а — расчет с учетом ВУВП-деформации, *б* — расчет с учетом вязкоупругопластической деформации

$\beta = \beta_0 = 0$, $\eta = \eta_0 \to \infty$, $\mu_0 \to \infty$ (см. (2)). Физико-механические характеристики материала конструкции приведены в таблице (ν — коэффициент Пуассона). (Зависимости $\sigma_s(\dot{\varepsilon})$, $E_s(\dot{\varepsilon})$ линейно аппроксимировались по величине $\dot{\varepsilon}$, значения которой приведены в таблице.)

На рис. 1 показаны зависимости поперечных колебаний цилиндрической панели в центральной точке ($w_0(t) \equiv w(t,0,0)$) от времени, на рис. 2 — зависимости наибольших значений интенсивности деформаций ε_* от времени ($\varepsilon_m(t) = \max\limits_{\boldsymbol{r}} \varepsilon_*(t, \boldsymbol{r})$, $|x_1| \leqslant a$, $|x_2| \leqslant b$, $|x_3| \leqslant h$), полученные при $p_{\max} = 1{,}7$ МПа (см. (22)), т. е. при нагружении снизу. (При $p_{\max} = -1{,}7$ МПа, т. е. при нагружении конструкции сверху, зависимости $w_0(t)$ и $\varepsilon_m(t)$ качественно аналогичны показанным на рис. 1, 2, поэтому в данной работе не приводятся.) На рис. 3 представлены эпюры прогибов в центральном поперечном сечении $x_1 = 0$, определенные в момент времени $t = 1$ с. Кривые *1′*, *2′* получены без учета зависимости пластических характеристик материала от скорости его деформирования. (Расчеты проводились по данным, приведенным в таблице и соответствующим скорости деформирования $\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$.) Кривые *1*–*3* определены с учетом этой зависимости.

Поведение кривых *1* и *1′* на рис. 1 свидетельствует о том, что в момент времени $t = 1$ с колебания панели практически полностью прекращаются, поэтому кривые на рис. 3 можно рассматривать как эпюры остаточных прогибов.

Сравнение кривых *1* и *1′* на рис. 1 показывает, что в расчете, выполненном без учета зависимости пластических характеристик материала от скорости деформирования (см. рис. 1,*б*), максимальный по модулю прогиб (точки A, A') занижен более чем в два раза. При этом остаточный прогиб в центральной точке панели является положительным (участок $t > 0{,}5$ с на рис. 1,*б*), а в случае учета указанной зависимости остаточный прогиб в этой точке отрицательный (участок $t > 0{,}5$ с на рис. 1,*а*).

Из результатов сравнения кривых *1* и *1′* на рис. 3 следует, что эпюры остаточных прогибов, полученные в расчетах с использованием теорий вязкоупругопластического де-

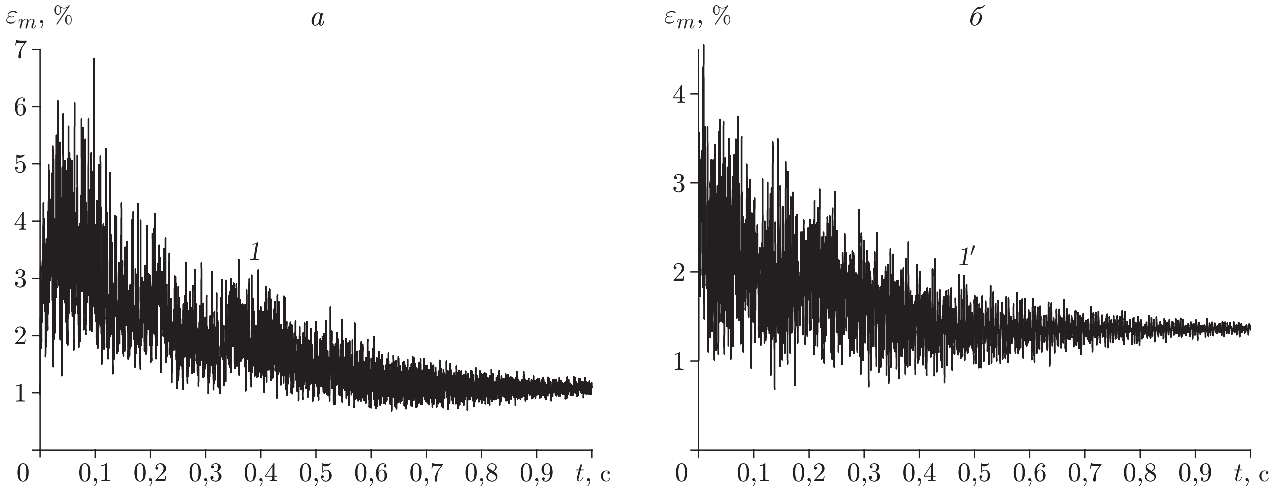

Рис. 2. Зависимость максимального значения интенсивности деформаций панели от времени при $p_{\max} = 1{,}7$ МПа:
а — расчет с учетом ВУВП-деформации, *б* — расчет с учетом вязкоупругопластической деформации

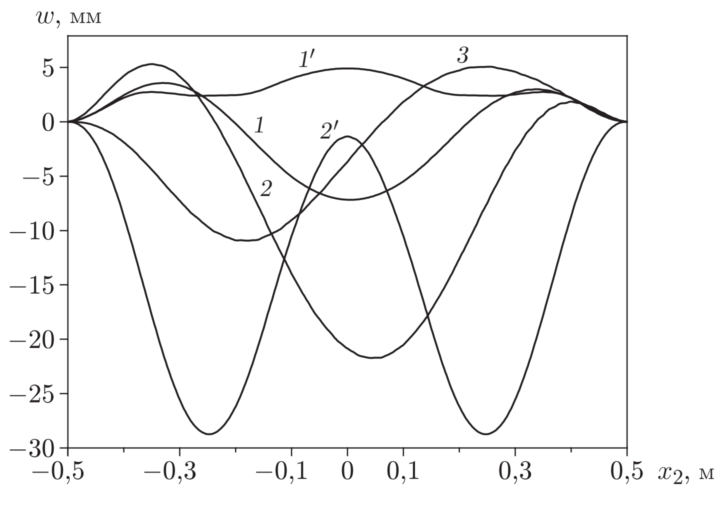

Рис. 3. Эпюры остаточных прогибов в центральном поперечном сечении панели $x_1 = 0$:
1, 1′ — $p_{\max} = 1{,}7$ МПа, *2, 2′* — $p_{\max} = -1{,}7$ МПа, *3* — $p_{\max} = 1{,}3$ МПа; *1–3* — расчет с учетом ВУВП-деформации, *1′*, *2′* — расчет с учетом вязкоупругопластической деформации

формирования (кривая *1*$'$) и ВУВП-деформирования (кривая *1*), качественно различаются. Аналогичные результаты получены в случае нагружения пологой оболочки сверху (кривые *2* и *2*$'$ на рис. 3).

Характер кривых *1*, *1*$'$, *2*, *2*$'$ на рис. 3 свидетельствует о том, что после пластического динамического деформирования в цилиндрической панели образуются складки, ориентированные в продольном направлении x_1. Возникновение складчатой остаточной формы обусловлено тем, что в процессе изгибного динамического деформирования рассматриваемая конструкция прощелкивает (динамическая потеря устойчивости). При этом максимальные по модулю прогибы в центральной точке оболочки могут достигаться после окончания действия внешней нагрузки $t_{\min} = 2$ мс (см. (22)). Так, на рис. 1,*а* максимальный по модулю прогиб достигается в точке A при $t \approx 18{,}8$ мс, а на рис. 1,*б* — в точке A' при $t \approx 25{,}8$ мс. Заметим, что при нагружении панели сверху в расчетах с учетом вязкоупругопластической деформации наибольший по модулю прогиб достигается в момент времени, соответствующий первой осцилляции, а в расчетах с учетом ВУВП-деформации — значительно позднее ($t \approx 55{,}6$ мс).

Сравнение кривых *1* и *1*$'$ на рис. 2 показывает, что в расчете с учетом вязкоупругопластической деформации (см. рис. 2,*б*) наибольшее значение интенсивности деформаций, достигаемое в процессе осцилляций ($\varepsilon_{\max} = \max\limits_t \varepsilon_m(t)$), в 1,5 раза меньше соответствующего значения, полученного в расчете с учетом ВУВП-деформации (см. рис. 2,*а*), а остаточные деформации, наоборот, приблизительно на 24 % больше (участки $t > 0{,}6$ с).

Кривые *1*$'$, *2*$'$ на рис. 3, рассчитанные с использованием вязкоупругопластической теории, являются симметричными относительно вертикальной оси $x_2 = 0$ ($w(x_1, x_2) = w(x_1, -x_2)$). Симметрия кривых *1* и *2*, определенных с помощью теории ВУВП-деформирования, нарушена. Это объясняется тем, что в процессе динамического деформирования цилиндрическая панель может прощелкивать несимметрично. При этом основным фактором, обусловливающим несимметрию, являются, по-видимому, ошибки округления, накопленные к моменту времени прощелкивания конструкции. При других входных данных задачи указанная несимметрия остаточного прогиба может проявляться более отчетливо, чем для кривых *1* и *2* на рис. 3. Кривая *3* на рис. 3 приведена для сравнения и получена с помощью теории ВУВП-деформирования при $p_{\max} = 1{,}3$ МПа (см. (22)). Поведение кривой *3* свидетельствует о том, что при таком нагружении форма остаточного прогиба практически антисимметрична, т. е. $w(x_1, x_2) \approx -w(x_1, -x_2)$, $|x_2| \leqslant b$.

Заключение. Разработанная численно-аналитическая модель неупругого поведения материала позволяет рассчитывать остаточные деформации и перемещения тонкостенных элементов конструкций при их интенсивном кратковременном нагружении с учетом зависимости их пластических характеристик от скорости деформирования.

Расчеты с использованием ВУВП-теории и вязкоупругопластической теории изгибного динамического поведения полимерной цилиндрической панели, пластические свойства которой слабо зависят от скорости деформирования, показали, что в случае неучета этой зависимости (вязкоупругопластическое деформирование) существенно (в несколько раз) занижается максимальный по модулю прогиб, в 1,5 раза — максимальное значение интенсивности деформаций, достигаемых в процессе осцилляций, и, наоборот, более чем на 20 % завышается величина остаточных деформаций конструкции. При этом расчетная форма остаточного прогиба отличается от формы, получаемой в случае учета зависимости пластических свойств материала от скорости его деформирования.

Установлено, что при нагружении цилиндрической удлиненной панели воздушной взрывной волной в процессе осцилляций конструкция прощелкивает (динамическая потеря устойчивости). Максимальный по модулю прогиб достигается в момент прощелкивания, причем, как правило, значительно позднее момента времени, в который прекращается действие внешней нагрузки. Вследствие прощелкивания панели в процессе колебаний она принимает гофрированную форму со складками, ориентированными в продольном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Houlston R., DesRochers C. G.** Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput. Structures. 1987. V. 26, N 1/2. P. 1–15.
2. **Абросимов Н. А.** Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов. Н. Новгород: Изд-во Нижегор. гос. ун-та, 2002.
3. **Kazanci Z.** Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // Intern. J. Non-Linear Mech. 2011. V. 46. P. 807–817.
4. **Нагди П. М., Мерч С. А.** О механическом поведении вязкоупругопластических тел // Прикл. механика. Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. E. 1963. Т. 30, № 3. С. 3–12.
5. **Коларов Д.** Механика пластических сред / Д. Коларов, А. Балтов, Н. Бончева. М.: Мир, 1979.
6. **Иванов Г. В.** Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел / Г. В. Иванов, Ю. М. Волчков, И. О. Богульский, С. А. Анисимов, В. Д. Кургузов. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002.
7. **Пэжина П.** Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968.
8. **Игумнов Л. А., Каримбаев Т. Д., Мамаев Ш.** Модель упругопластического течения при переменной скорости деформирования // Вестн. Нижегор. ун-та им. Н. И. Лобачевского. Механика. 2013. № 1. С. 120–129.
9. **Янковский А. П.** Моделирование динамического упругопластического поведения гибких армированных пологих оболочек // Конструкции из композиц. материалов. 2018. № 2. С. 3–14.
10. **Янковский А. П.** Моделирование упруговязкопластического изгиба пространственно-армированных пластин при учете чувствительности компонентов композиции к изменению скорости деформирования // Прикл. математика и механика. 2019. Т. 83, № 4. С. 660–686.
11. **Янковский А. П.** Вязкоупругопластическое деформирование пластин с пространственными структурами армирования // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 1. С. 118–132.
12. **Янковский А. П.** Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования пластин с пространственными структурами армирования // Вычисл. механика сплошных сред. 2020. Т. 13, № 1. С. 5–22.
13. **Белл Дж.** Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 2. Конечные деформации. М.: Мир, 1984.
14. **Reissner E.** The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12, N 2. P. 69–77.
15. **Богданович А. Е.** Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987.
16. **Амбарцумян С. А.** Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974.
17. **Фрейденталь А.** Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. М.: Физматгиз, 1962.
18. **Справочник** по композитным материалам: В 2 кн. М.: Машиностроение, 1988. Кн. 1.

Поступила в редакцию 30/X 2020 г.,
после доработки — 22/IV 2021 г.
Принята к публикации 28/VI 2021 г.