К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ю. А. Демьянов, К. Г. Омельченко (Москва)

Решение уравнения нестационарной теплопроводности при произвольных граничных условиях, как известно, может быть выражено через функцию Грина. Однако такое представление решения оказывается малоэффективным при использовании в практических расчетах. В связи с этим ниже указывается способ получения иной формы решения, основанный на использовании методов теории размерностей и подобия. Последние в сочетании с принципом суперпозиции позволяют получить решения задач теплопроводности при произвольном законе изменения температуры поверхности со временем в телах, не имеющих характерного размера (полуплоскость, полубесконечный клин и конус и т. д.).

Напомним, что для одномерного случая решение уравнения теплопроводности

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

с постоянными граничными и начальными условиями

$$u(0, t) = u_0, \qquad u(x, 0) = 0 \tag{2}$$

согласно анализу размерностей [1] должно зависеть от одной переменной

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{t}} \tag{3}$$

При этом уравнение (1) становится обыкновенным. Решение этого уравнения

$$u(x, t) = u_0 \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\chi} e^{-z^2}\, dz\right] \qquad \left(\chi = \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

Рассмотрим случай, когда задаются граничные и начальные условия специального вида

$$u(0, t) = At^n, \qquad u(x, 0) = 0 \qquad (A = \text{const}, \ n = \text{const}) \tag{4}$$

Покажем, что и в этом случае метод подобия позволяет свести уравнение (1) к обыкновенному. Введем в рассмотрение функцию f, определяемую равенством

$$u(x, t) = At^n f \tag{5}$$

С учетом замены (5) уравнение (1) и граничные условия (4) преобразуются

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + n\frac{f}{t}, \qquad f(0, t) = 1, \qquad f(x, 0) = 0 \tag{6}$$

Проводя анализ размерностей для уравнения и граничных условий (6) аналогично тому, как это делается в работе [2], заключаем, что f есть функция одной переменной ξ, определенной (3), удовлетворяющая обыкновенному уравнению

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi \frac{df}{d\xi} - nf = 0 \tag{7}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$f = CP_{2n}(\xi) \int_{\infty}^{\xi} \exp\frac{-\xi^2}{4} \frac{d\xi}{P_{2n}^2(\xi)} \qquad (P_{2n}(\xi) \text{ — полином Эрмита})$$

Наконец, рассмотрим случай, когда граничные условия (2) задаются в более общем виде

$$u(0, t) = \sum_1^m A_n t^{\alpha_n}, \qquad u(x, 0) = 0$$

В силу принципа суперпозиции решение поставленной задачи сводится к решению m обыкновенных дифференциальных уравнений, подобных уравнению (7), где $n = \alpha_n$. Аналогично можно проиллюстрировать применение анализа размерностей к решению указанных пространственных задач теплопроводности.

Поступила
23 IV 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953.