УДК 539.375

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА СИММЕТРИЧНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ МАТЕРИАЛА

В. В. Глаголев, А. А. Маркин, Т. А. Мерцалова

Тульский государственный университет, 300600 Тула
E-mails: vadim@tsu.tula.ru, markin@uic.tula.ru, tania@tula.ru

Приведена постановка задачи о начале движения выреза конечной ширины в линейно-упругой плоскости под действием внешней симметричной нагрузки. Материал, лежащий на продолжении выреза, образует слой (слой взаимодействия). Постулируется, что напряженно-деформированное состояние материала слоя однородно по его толщине. Получена система граничных интегральных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния, на основе которой строится дискретная модель разделения материала слоя в предположении постоянства напряженно-деформированного состояния в элементе слоя взаимодействия. Определено распределение напряжений в зоне предразрушения.

Ключевые слова: характерный размер, граничное интегральное уравнение, линейная упругость.

При моделировании образования новых материальных поверхностей в механике разрушения можно выделить два основных подхода: разрушение рассматривается как движение математического разреза в твердом теле либо как движение физического разреза на определенном масштабном уровне [1–5]. В модели с математическим разрезом используются гипотезы сплошности при исследовании окрестности особой точки с помощью различных критериев [6]. Введением определенного масштабного уровня разрушение моделируется как дискретный процесс [5, 7]. В этом случае тело аппроксимируется набором структурных элементов, взаимодействующих по законам в соответствии с выбранным масштабным уровнем. Одним из существенных недостатков этого подхода являются большие вычислительные затраты. Следовательно, представляется актуальной разработка подходов, в которых используются представления механики сплошной среды (фундаментальных решений) для областей, не подвергающихся разрушению, и дискретное описание разрушающейся области.

При решении задачи разделения в рамках дискретно-континуального (полудискретного) подхода [7–10] рассмотрим задачу о начале движения выреза шириной δ_0 [8] в линейно-упругой плоскости согласно схеме, соответствующей разрушению типа нормального отрыва (рис. 1).

Предположим, что траектория разделения соответствует прямолинейному движению выреза в направлении, совпадающем с направлением оси OX_2 (см. рис. 1). Материал плоскости, ограниченный линиями $x_1 = \pm\delta_0/2$ в координатах начального состояния, формирует слой взаимодействия с однородным распределением напряженно-деформированного состояния по толщине. Величина δ_0 характеризует зернистую структуру материала при неупругом деформировании.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 06-01-00047, 07-01-96402).

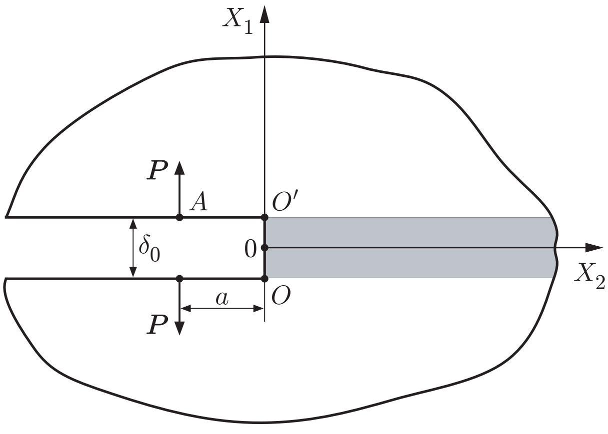

Рис. 1

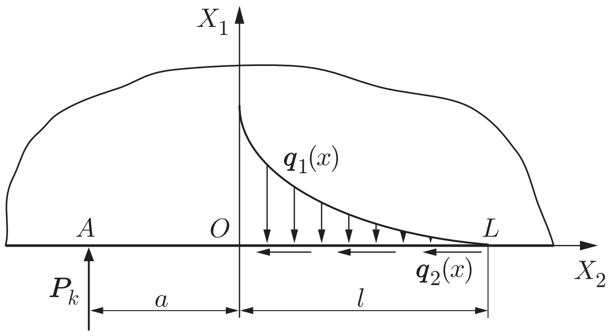

Рис. 2

Рис. 1. Схема разрушения

Рис. 2. Распределение нагрузок на полуплоскость

В отличие от постановки задачи в [8] в данной постановке наряду с напряжением $\sigma_{11}(x_2)$ в слое учитывается напряжение $\sigma_{22}(x_2)$, обусловленное наличием касательных напряжений $\sigma_{21}(x_2)$ вдоль границы с полуплоскостью.

Полагаем, что связь между напряжениями и деформациями описывается соотношениями линейной теории упругости для случая плоского деформирования. В силу симметрии задачи рассмотрим только верхнюю полуплоскость ($x_1 \geqslant \delta_0/2$) (рис. 2), а действие слоя на полуплоскость заменим нагрузкой на нее:

$$\boldsymbol{q}(x) = -(\hat{\sigma}_{11}\boldsymbol{e}_1 + \hat{\sigma}_{21}\boldsymbol{e}_2).$$

Здесь $x \equiv x_2/\delta_0$ — безразмерная координата; $\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}\beta$ $(i, j = 1, 2)$ — безразмерные напряжения; $\beta = 2(1-\nu^2)/(\pi E)$ — параметр материала; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

Соотношения Фламана [11] связывают внешние нагрузки $\hat{\sigma}_{11}$ и $\hat{\sigma}_{12}$ с перемещениями границы безразмерными выражениями

$$\hat{u}_1(x) = -\hat{P}\ln\left(\frac{x+a}{l+a}\right) + \int\limits_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi; \tag{1}$$

$$\hat{u}_2(x) = \int\limits_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi. \tag{2}$$

Здесь $\hat{u}_i = u_i/\delta_0$ $(i = 1, 2)$ — безразмерные перемещения; $\hat{P} = P\beta/\delta_0$ — безразмерная сила на единицу толщины; l — расстояние от начала координат до удаленной точки L с нулевым перемещением.

Поведение материала слоя взаимодействия будем описывать в рамках дискретной модели, представляя его в виде набора взаимодействующих квадратных в плане δ_0-элементов. Основным постулатом данной модели является положение об однородности напряженно-деформированного состояния в каждом элементе. В силу однородности напряженно-деформированного состояния по толщине слоя из условия равновесия следует

$$\frac{\partial\hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}. \tag{3}$$

Перемещения границ слоя определяются из условий

$$\hat{u}_1(x) = \varepsilon_{11}(x)/2; \tag{4}$$

$$\hat{u}_2(x) = \int_l^x \frac{1}{2}\,\varepsilon_{22}(x)\,dx. \tag{5}$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука

$$\varepsilon_{11} = \hat{A}\hat{\sigma}_{11} - \hat{B}\hat{\sigma}_{22}; \tag{6}$$

$$\varepsilon_{22} = \hat{A}\hat{\sigma}_{22} - \hat{B}\hat{\sigma}_{11}, \tag{7}$$

где $\hat{A}$, $\hat{B}$ — безразмерные постоянные: $\hat{A} = (1-\nu^2)/(\beta E) = \pi/2$, $\hat{B} = \nu(1+\nu)/(\beta E) = \nu\pi/(2(1-\nu))$.

Подставляя в формулу (1) выражения (4), (6), получим уравнение относительно $\hat{\sigma}_{11}$ и $\hat{\sigma}_{22}$:

$$\frac{1}{2}\,(\hat{A}\hat{\sigma}_{11} - \hat{B}\hat{\sigma}_{22}) = -\hat{P}\ln\Big(\frac{x+a}{l+a}\Big) + \int_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi. \tag{8}$$

Продифференцируем по x выражение (2):

$$\varepsilon_{22} = \frac{d\hat{u}_2}{dx} = \int_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi. \tag{9}$$

Подставляя (7) в левую часть (9), имеем

$$\hat{A}\hat{\sigma}_{22} - \hat{B}\hat{\sigma}_{11} = \int_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi. \tag{10}$$

С помощью (10) из уравнения (8) исключим $\hat{\sigma}_{22}$. В результате получим уравнение относительно $\hat{\sigma}_{11}$ и $\hat{\sigma}_{12}$:

$$(2\hat{A}^2 - \hat{B}^2)\hat{\sigma}_{11} = -2\hat{P}\hat{A}\ln\Big(\frac{x+a}{l+a}\Big) + 2\hat{A}\int_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi + \hat{B}\int_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi. \tag{11}$$

Таким образом, имеем систему интегральных уравнений (10), (11), дополняемую зависимостью (3). Полученную систему интегродифференциальных уравнений запишем в виде

$$\hat{\sigma}_{11} + \lambda_1\int_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi)\ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi + \lambda_2\int_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\ln\frac{1}{x-\xi}\,d\xi = \lambda_1\hat{P}\ln\Big(\frac{x+a}{l+a}\Big); \tag{12}$$

$$\hat{A}\hat{\sigma}_{22} - \hat{B}\hat{\sigma}_{11} - \int_0^l \hat{\sigma}_{12}\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi = 0; \tag{13}$$

$$\frac{\partial\hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{12}. \tag{14}$$

Здесь $\lambda_1 = -2\hat{A}/(2\hat{A}^2 - \hat{B}^2)$; $\lambda_2 = -\hat{B}/(2\hat{A}^2 - \hat{B}^2)$.

С учетом условия постоянства напряжений в каждом δ_0-элементе обобщенные напряжения в i-м элементе на отрезке $i-1 \leqslant x \leqslant i$ определяются выражениями

$$\sigma_{11}^{(i)} = \int\limits_{i-1}^{i} \hat{\sigma}_{11}(x)\,dx, \qquad \sigma_{12}^{(i)} = \int\limits_{i-1}^{i} \hat{\sigma}_{12}(x)\,dx, \qquad \sigma_{22}^{(i)} = \int\limits_{i-1}^{i} \hat{\sigma}_{22}(x)\,dx.$$

Построим дискретные выражения для интегральных операторов в уравнениях (12), (13). Рассмотрим следующие операторы:

$$A_1 = \int\limits_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi = \int\limits_0^n \hat{\sigma}_{11} \ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi = \sum_{i=1}^{i=n} \int\limits_{i-1}^{i} \hat{\sigma}_{11} \ln\frac{|x-\xi|}{l-\xi}\,d\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{11}^{(i)} \Big(\int\limits_{i-1}^{i} \ln|x-\xi|\,d\xi - \int\limits_{i-1}^{i} \ln(l-\xi)\,d\xi \Big) = \sum_{i=1}^{i=n} \psi^{(i)}(x)\sigma_{11}^{(i)} - \sum_{i=1}^{i=n} C^{(i)}\sigma_{11}^{(i)}.$$

Здесь

$$\psi^{(i)}(x) = \int\limits_{i-1}^{i} \ln|x-\xi|\,d\xi, \qquad C^{(i)} = \int\limits_{i-1}^{i} \ln|l-\xi|\,d\xi,$$

$$A_2 = \int\limits_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi)\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi = \int\limits_0^n \hat{\sigma}_{12}\,\frac{1}{x-\xi}\,d\xi = \sum_{i=1}^{i=n} \psi_1^{(i)}(x)\sigma_{12}^{(i)}, \qquad \psi_1^{(i)}(x) = \int\limits_{i-1}^{i} \frac{1}{x-\xi}\,d\xi.$$

Перейдя к дискретным операторам, проинтегрируем левую и правую части рассматриваемой системы по j-му отрезку ($j-1 \leqslant x \leqslant j$). В результате операторы A_1, A_2 принимают вид

$$A_1^j[\sigma_{11}^{(i)}] = \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{11}^{(i)} \int\limits_{j-1}^{j}\int\limits_{i-1}^{i} \ln|x-\xi|\,d\xi\,dx - \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{11}^{(i)} \int\limits_{j-1}^{j}\int\limits_{i-1}^{i} \ln|l-\xi|\,d\xi\,dx,$$

$$A_2^j[\sigma_{12}^{(i)}] = \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{12}^{(i)} \int\limits_{j-1}^{j}\int\limits_{i-1}^{i} \frac{1}{x-\xi}\,d\xi\,dx.$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi^{(ji)} = \int\limits_{j-1}^{j}\int\limits_{i-1}^{i} \ln|x-\xi|\,d\xi\,dx, \quad \psi_1^{(ji)} = \int\limits_{j-1}^{j}\int\limits_{i-1}^{i} \frac{1}{x-\xi}\,d\xi\,dx, \quad C^{(ji)} = \int\limits_{j-1}^{j}\int\limits_{i-1}^{i} \ln(l-\xi)\,d\xi\,dx.$$

При $j > i$

$$\varphi_{(+)}^{(ji)} = -(j-i)^2\ln(j-i) + (1/2)(j-i-1)^2\ln(j-i-1) + (1/2)(j-i+1)\ln(j-i+1) - 3/2,$$

$$\psi_{(+)}^{(ji)} = -2(j-i)\ln(j-i) + (j-i-1)\ln(j-i-1) + (j-i+1)\ln(j-i+1).$$

При $j = i$ интеграл $\int\limits_{j-1}^{j}\int\limits_{j-1}^{j} \ln|x-\xi|\,d\xi\,dx$, $x \in [j-1;j]$ представим в следующем виде:

$$\int\limits_{j-1}^{j}\Big(\int\limits_{j-1}^{x} \ln(x-\xi)\,d\xi + \int\limits_{x}^{j} \ln(\xi - x)\,d\xi\Big)\,dx.$$

Выполнив интегрирование, получим $\varphi_{(0)}^{(ji)} = -3/2$. Для $\psi_1^{(ji)}$ в случае $j = i$ имеем $\psi_1^{(ji)} = 0$.

При $j < i$

$$\varphi_{(-)}^{(ji)} = (i-j)^2\ln(i-j) - (1/2)(i-j+1)^2\ln(i-j+1) - (1/2)(i-j-1)^2\ln(i-j-1) - 1/2,$$

$$\psi_{(-)}^{(ji)} = 2(i-j)\ln(i-j) - (i-j-1)\ln(j-i-1) - (i-j+1)\ln(i-j+1).$$

Для всех i, j имеем

$$C^{(ji)} = -(n-i)\ln(n-i) + (n-i+1)\ln(n-i+1) - 1,$$

$$D^{(j)} = \int\limits_{j-1}^{j} \ln\frac{x+a}{l+a}\,dx = (j+a)\ln\Big(\frac{j+a}{n+a}\Big) - (j+a-1)\ln\Big(\frac{j+a-1}{n+a}\Big) - 1.$$

Поскольку на отрезке $[j-1, j]$ $\sigma_{12} = \sigma_{12}^{j}$, из (3) получаем

$$\sigma_{22}^{(j)} - \sigma_{22}^{(j-1)} = -2\sigma_{12}^{(j)}.$$

В результате с учетом введенных обозначений полная дискретная модель разделения материала сосредоточенными силами принимает вид

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^{(j)} + \lambda_1 A_1^j[\sigma_{11}^{(i)}] + \lambda_2 A_2^j[\sigma_{12}^{(i)}] = \lambda_1 \hat{P} D^{(j)},\\ A\sigma_{22}^{(j)} - B\sigma_{11}^{(j)} - A_2^j[\sigma_{12}^{(i)}] = 0, \qquad \sigma_{22}^{(j)} - \sigma_{22}^{(j-1)} = -2\sigma_{12}^{(j)}.\end{gathered} \tag{15}$$

Дискретная модель (15) содержит бесконечное количество линейных уравнений ($n \to \infty$), дополненных граничным условием на торце $x = 0$: $\sigma_{22}^{(0)} = 0$. Однако для анализа области предразрушения с достаточной степенью точности можно ограничиться конечным числом элементов. Так, при $n = 50$ и $n = 100$ отношение $K = \sigma_{11}^{(1)}/\sigma_{11}^{(0)}$ для первого элемента составило $K = 1{,}005$; при $n = 100$ и $n = 500$ $K = 1{,}003$; при $n = 500$ и $n = 800$ $K = 1{,}000\,04$; при $n = 800$ и $n = 1000$ значение K практически не меняется.

На рис. 3 представлено распределение напряжений на первых 21 элементе при значениях расчетных характеристик $n = 1000$, $a = 10$. Видно, что коэффициент Пуассона почти не оказывает влияния на распределение напряжений σ_{11} в зоне предразрушения, но существенно влияет на напряжение σ_{22} и соответственно на отношение максимальных значений напряжений σ_{11} к σ_{22} в слое взаимодействия. В работе [12] при численном анализе растяжения плоскости с эллиптическим вырезом при стремлении минимального значения радиуса кривизны к нулю на продолжении большой полуоси отношение σ_{11}/σ_{22}

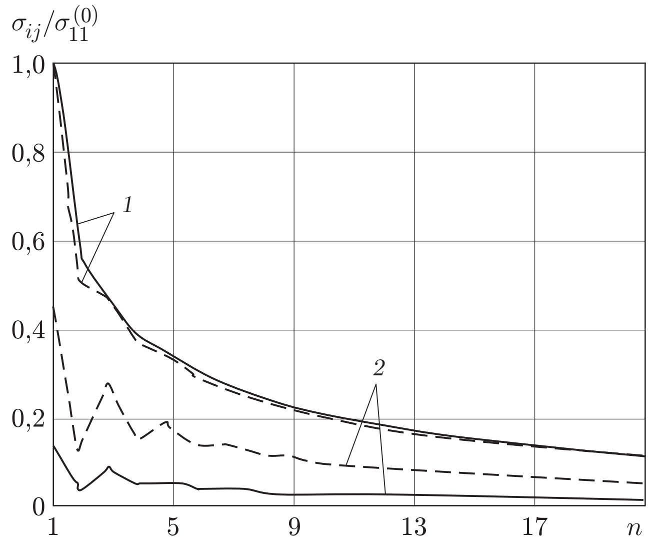

Рис. 3. Распределение напряжений σ_{11} (*1*) и σ_{22} (*2*) на первых 21 элементе при $n = 1000$, $a = 10$:
сплошные кривые — $\nu = 0{,}15$, штриховые — $\nu = 0{,}35$

есть величина постоянная, равная 1/5. Из рис. 3 следует, что напряжение σ_{22} соизмеримо с напряжением σ_{11} и может играть существенную роль при формировании пластической зоны, предшествующем началу разделения материала. Кроме того, в рассматриваемой дискретной модели отношение σ_{11}/σ_{22} существенно зависит от коэффициента Пуассона. Отметим, что при $\nu = 0$ система (15) вырождается в модель, предложенную в работе [3]. Однако в более общем случае, когда $\nu \neq 0$, эта система позволяет учесть распределение напряжений σ_{22} в материале, находящемся на продолжении выреза в линейно-упругой плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Prandtl L.** Ein Gedankenmodell für den Zerreibvorgand spröder Körper // Z. angew. Math. Mech. 1933. Bd 13. P. 129–133.
2. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. № 2. С. 212–222.
3. **Ентов В. М., Салганик Р. Л.** К модели хрупкого разрушения Прандтля // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 87–99.
4. **Корнев В. М.** Обобщенный достаточный критерий прочности. Описание зоны предразрушения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 153–161.
5. **Петров Ю. В.** О “квантовой” природе разрушения хрупких сред // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 1. С. 66–68.
6. **Isupov L. P., Mikhailov S. E.** A comparative analysis of several nonlocal fracture criteria // Arch. Appl. Mech. 1998. V. 68. P. 597–612.
7. **Маркин А. А., Глаголев В. В.** Термомеханическая модель дискретного разделения упругопластических тел // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, вып. 2. С. 103–129.
8. **Глаголев В. В., Кузнецов К. А., Маркин А. А.** Модель процесса разделения деформируемого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 61–68.

9. **Глаголев В. В., Маркин А. А.** Модель установившегося разделения материального слоя // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 121–129.
10. **Глаголев В. В., Маркин А. А.** Об одном способе определения связей между критическими значениями характеристик процесса установившегося разделения материала // Пробл. прочности. 2006. № 2. С. 47–58.
11. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
12. **Cook J., Gordon J. E.** A mechanism for the control of crack propagation in all-brittle system // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1964. V. 282, N 1391. P. 508–520.

Поступила в редакцию 22/III 2007 г.,
в окончательном варианте — 20/XI 2007 г.