УДК 517.946

# СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

*Л. А. Выговская, А. М. Макаров*

*(Москва)*

Рассмотрена сферически симметричная задача Стефана с граничным условием второго рода. Для распределения температуры в исследуемой области получено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, для решения которого применен метод последовательных приближений. Определение времени, в течение которого искомая граница достигает заданного положения, сведено к вычислению квадратуры.

Задача с искомой границей для уравнения теплопроводности находит широкое применение в технологии литейного производства и термической обработки металлов, выращивания кристаллов, при расчете нестационарных процессов в десублиматорах и т. д. Решение задачи в достаточной общей постановке сопряжено со значительными математическими трудностями. Известны различные подходы к решению рассматриваемой задачи. В работах [1, 2] решение задачи Стефана сведено к решению некоторой функциональной системы уравнений, в [3] рассмотрено применение к решению задачи Стефана двустороннего преобразования Лапласа — Карсона по пространственной переменной, в результате чего функциональная система уравнений оказалась тождественной системе, полученной в [4] методом продолжения начальных условий. Весьма эффективным при решении задачи Стефана оказался метод разложения в ряд по «мгновенным» или «локальным» собственным функциям задачи [5-7]. В работе [8] для решения плоской однофазной задачи Стефана применен метод последовательных приближений, который используется ниже для решения сферически симметричной однофазной задачи о промерзании с граничным условием второго рода.

Математическая формулировка рассматриваемой задачи после введения соответствующим образом выбранных безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x} x^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 1 < x < \Delta(t); \quad 0 < t < M < \infty \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad (x=1) \tag{2}$$

$$u = 0 \qquad (x = \Delta(t)) \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{d\Delta}{dt} \qquad (x=\Delta(t)) \tag{4}$$

$$\Delta(0) = 1 \tag{5}$$

Задача (1) — (5) соответствует внешнему обмерзанию шара, от поверхности которого отводится постоянный тепловой поток, причем температура окружающей среды в начальный момент времени равнялась температуре фазового перехода. Результатом решения задачи является определение безразмерной температуры среды $u(x, t)$ в промерзшем слое и нахождение для каждого момента времени $t$ положения границы фазового перехода $x = \Delta(t)$ в зависимости от безразмерной величины теплоты фазового перехода $\alpha$.

Проинтегрируем уравнение (1) по пространственной переменной $x$ в пределах от 1 до $x$ и учтем граничное условие (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_1^x x^2 \frac{\partial u}{\partial t}\, dx \tag{6}$$

Запишем полученное соотношение при $x = \Delta(t)$ и учтем условие на искомой границе (4). Принимая $\Delta = \Delta(t)$ в качестве независимой переменной, получаем

$$\frac{d\Delta}{dt} = \left[\alpha\Delta^2 - \int_1^\Delta x^2 \frac{\partial u}{\partial \Delta}\, dx\right]^{-1} \tag{7}$$

Интегрируя (7) с учетом начального условия (5), находим выражение для времени, в течение которого искомая граница достигает заданного положения в пространстве

$$t = \frac{\alpha}{3}(\Delta^3 - 1) - \int\limits_1^\Delta \int\limits_1^\Delta x^2 \frac{\partial u}{\partial \Delta}\, dx\, d\Delta \tag{8}$$

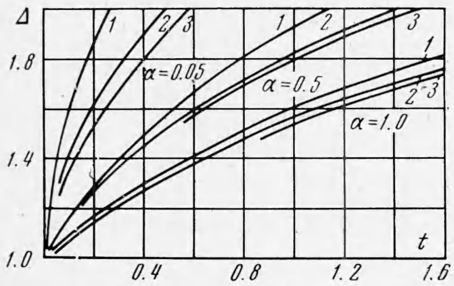
Интегрируя уравнение (6) по переменной $x$ в пределах от $\Delta$ до $x$ с учетом условия на искомой границе (3) и используя соотношение (7), получаем для $u = u(x, \Delta)$ функциональное уравнение

$$u(x, \Delta) = \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{x} + \int\limits_\Delta^x \frac{1}{x^2} \int\limits_1^x x^2 \frac{\partial u}{\partial \Delta}\, dx\, dx \left[\alpha\Delta^2 - \int\limits_1^\Delta x^2 \frac{\partial u}{\partial \Delta}\, dx\right]^{-1} \tag{9}$$

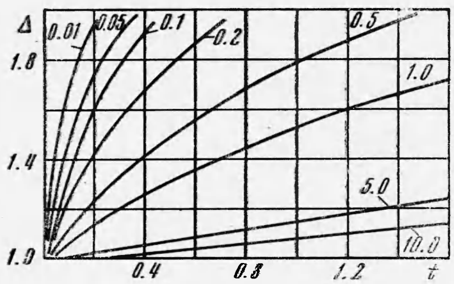
решение которого может быть получено методом последовательных приближений по схеме

$$u_0 = \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{x}, \qquad u_{k+1} = u_0 + \int\limits_\Delta^x x^2 \frac{\partial u_k}{\partial \Delta}\, dx\, dx \left[\alpha\Delta^2 - \int\limits_1^\Delta x^2 \frac{\partial u_k}{\partial \Delta}\, dx\right]^{-1} \tag{10}$$

Нулевое приближение для $u(x, \Delta)$ соответствует предельному случаю бесконечно малой удельной теплоемкости среды, что можно было бы получить, следуя методу Л. С. Лейбензона приближенного решения задачи Стефана [9], применение которого к




Фиг. 1




Фиг. 2

решению задачи о затвердевании шара рассмотрено С. С. Ковнером [10]. Подставляя $u_k(x, \Delta)$ в (8), получаем соответствующие приближения для $t_k = t_k(\Delta)$.

Характер сходимости итерационного процесса по схеме (10) легко видеть на фиг. 1, где для $\alpha = 0.05$, 0.50 и 1.0 приведены результаты расчетов для нулевого (1), первого (2) и второго (3) приближений для положения границы фазового перехода. На фиг. 2 приведены результаты второго приближения искомой границы для некоторых значений безразмерной теплоты фазового перехода $\alpha$.

Поступила 1 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. К о л о д н е р. Краевая задача с искомой границей для уравнения теплопроводности с приложениями к задачам фазовых превращений. Механика. Сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1957, № 1.
2. Ф р и д м а н А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.
3. П о р т н о в И. Г. Точное решение задачи о промерзании с произвольным изменением температуры на неподвижной границе. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 3.
4. М а р т ы н о в Г. А. О распространении тепла в двухфазной среде при заданном законе движения границы фаз. Ж. техн. физ., 1955, т. 25, вып. 10.
5. Г р и н б е р г Г. А. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.

6. Гринберг Г. А. О решении обобщенной задачи Стефана о промерзании жидкости, а также родственных задач теории теплопроводности, диффузии и других. Ж. техн. физ., 1967, т. 37, вып. 9.
7. Косс В. А. Приближенное решение задачи Стефана. Ж. техн. физ., 1970, т. 40, вып. 7.
8. Savino I. M., Siegel R. An analytical solution for solidification of a moving warm liquid onto an isothermal cold wall. Internat. J. Heat. and Mass Trans., 1969, vol. 12, No. 7.
9. Лейбензон Л. С. Руководство по нефтепромысловой механике. М.—Л., Гос. научн.-техн. изд-во, 1931.
10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1968.

---

УДК 536.247 536.423.1+04

# О ВЛИЯНИИ СКОРОСТИ ПАРА НА ТЕПЛООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ

*Л. Д. Берман*

*(Москва)*

Анализ опубликованных недавно результатов экспериментального исследования теплоотдачи при пленочной конденсации движущегося пара на горизонтальной трубе [1] подтверждает, как это показано ниже, отмечавшееся раньше [2,3] расхождение между опытными и теоретическими данными для этого случая конденсации. Приближенные теоретические формулы, учитывающие зависимость касательного напряжения на поверхности раздела жидкой и паровой фаз, а соответственно, и коэффициента теплоотдачи от плотности поперечного потока массы, могут, однако, использоваться в качестве первого приближения в тех случаях, когда отсутствуют прямые опытные данные.

Асимптотические решения уравнений движения для ламинарного и турбулентного пограничных слоев с отсосом [4–7] приводят к следующей зависимости для касательного напряжения трения на продольно обтекаемой проницаемой пластине:

$$\tau = jU \tag{1}$$

где $j$ — плотность поперечного потока массы и $U$ — скорость среды за пределами пограничного слоя.

Если принять, что при пленочной конденсации движущегося насыщенного пара касательное напряжение на поверхности раздела фаз определяется уравнением (1), то можно получить [2,3,8]

$$\frac{\alpha}{\alpha_{\text{н}}} = f\left(\frac{F}{PK}\right) \tag{2}$$

Здесь $\alpha$, $\alpha_{\text{н}}$ — коэффициент теплоотдачи при конденсации движущегося и неподвижного пара; $F = U^2/(gl)$ — число Фруда для парового потока; $P = \nu\rho c_p/\lambda$ — число Прандтля для конденсата; $K = r/(c_p\vartheta)$ — число фазового перехода; $g$ — ускорение свободного падения; $l$ — характерный размер (для вертикальной поверхности — высота, для горизонтальной трубы — наружный диаметр); $\nu$, $\lambda$, $c_p$, $\rho$ — кинематический коэффициент вязкости, коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность конденсата; $r$ — теплота конденсации; $\vartheta$ — температурный напор пар — стенка.

Уравнение (1) не удовлетворяет предельному условию $\tau \to \tau_c$ при $j \to 0$ (где $\tau_c$ — касательное напряжение «сухого» трения при отсутствии поперечного потока массы). Но при конденсации движущегося чистого пара величина $j$, как правило, относительно велика и остается достаточно большой также и при $U \to 0$.

Численное решение задачи о теплоотдаче при пленочной конденсации движущегося пара на вертикальной поверхности (плоской пластине или поверхности малой кривизны), предложенное Нуссельтом [9], основывалось на предположении, что $\tau = \tau_c$, т. е. не учитывало влияния поперечного потока массы на касательное напряжение. Однако и при определении $\tau$ с помощью уравнения (1) можно воспользоваться резуль-