

УДК 532.517.4

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА ЗА САМОДВИЖУЩИМСЯ ТЕЛОМ

Н. В. Гаврилов, А. Г. Деменков\*, В. А. Костомаха, Г. Г. Черных\*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

\* Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

Выполнено экспериментальное и численное моделирование развития турбулентного осесимметричного следа за самодвижущимся телом. Экспериментально режим самодвижения реализовывался в следе за телом вращения, гидродинамическое сопротивление которого полностью компенсировалось импульсом выдуваемой из его кормовой части закрученной струи, а вносимая струей закрутка уравнивалась вращением части поверхности тела в противоположном направлении. Для математического описания такого следа применялась полуэмпирическая модель турбулентности второго порядка, включающая дифференциальные уравнения движения, переноса нормальных рейнольдсовых напряжений, скорости диссипации и неравновесные алгебраические соотношения для определения касательных напряжений. Получено удовлетворительное согласие результатов расчетов с данными эксперимента. Численно исследовано вырождение дальнего турбулентного следа.

1. Рассматривается задача об эволюции турбулентного следа за телом вращения, движущимся равномерно и прямолинейно в безграничной однородной несжимаемой жидкости. Тело снабжено двигателем, тяга которого компенсирует силу гидродинамического сопротивления, так что продольная компонента суммарного избыточного импульса  $J$  в следе равна нулю. В общем случае двигатель может закручивать жидкость в следе, поэтому, для того чтобы тело не вращалось вокруг своей продольной оси, закрутка должна быть тем или иным способом также скомпенсирована. При этом суммарный момент количества движения  $M$  в следе равен нулю. Такой режим движения тела называют режимом самодвижения.

Во всех ранее выполненных экспериментальных работах, в которых моделировался и изучался след за самодвижущимся телом, в качестве двигателя использовалась незакрученная [1–7] или закрученная [8, 9] струя либо необходимая тяга создавалась винтом [10–12]. В отсутствие закрутки основное внимание уделялось выполнению условия  $J = 0$ , достаточного для создания режима самодвижения. Однако при наличии вращательного движения в следе окружная компонента скорости не только дает вклад в величину суммарного импульса, но и приводит к появлению в следе момента количества движения.

Из анализа приведенной литературы следует, что во всех выполненных экспериментах с двигателями, закручивающими поток, соответствующие усилия воспринимались той или иной конструкцией, поддерживающей модель (например, растяжками, если опыты проводились в аэродинамической трубе), а величина  $M$ , рассчитанная для следа за такой моделью, не равна нулю. В данной работе указанный недостаток экспериментального моделирования самодвижения устранен за счет создания модели, позволяющей независимо менять силу тяги двигателя и компенсировать создаваемую им закрутку потока.

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95-01-01339, 98-01-00736).

Обзор ранних работ по численному моделированию закрученных турбулентных следов представлен в [10]. Там же изложены результаты расчетов с применением упрощенной  $\epsilon$ -модели турбулентности и указаны недостатки использования алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений и более общих дифференциальных моделей второго порядка, которые, возможно, обусловлены неполнотой экспериментальных данных. Расчетно-теоретическому моделированию закрученных следов посвящены также работы [13–15], в которых исследовались автомодельность и законы вырождения для следов с различной степенью компенсации по импульсу и моменту количества движения, а также влияние фоновой турбулентности на эволюцию течения в следе. В этих работах используется классическая  $(\epsilon-\epsilon)$ -модель турбулентности. Вырождение рейнольдсовых напряжений не анализируется. Продемонстрирована сильная чувствительность дефекта продольной компоненты скорости к первоначальному дисбалансу импульса и слабая зависимость от него окружной компоненты скорости, энергии турбулентности и ширины следа. Анализ асимптотического поведения возмущений средней скорости позволил установить, что наличие даже небольшой тангенциальной составляющей скорости заметно влияет на картину течения.

Численное моделирование закрученного безимпульсного турбулентного следа с ненулевым моментом количества движения, основанное на применении иерархии полуэмпирических моделей турбулентности второго порядка, осуществлено в [16, 17]. Показано, что удовлетворительное согласие с экспериментальными данными [9] может быть получено при использовании математической модели, включающей дифференциальные уравнения переноса нормальных и одного из касательных рейнольдсовых напряжений и неравновесных алгебраических соотношений для остальных касательных напряжений.

На основе анализа результатов расчетно-теоретического моделирования закрученных турбулентных следов можно сделать вывод об отсутствии удовлетворительных численных моделей закрученных турбулентных следов за самодвижущимися телами. Настоящая работа выполнена с целью восполнить пробелы, имеющиеся в исследовании данной задачи.

2. Для описания течения используется следующая система осредненных уравнений движения, неразрывности и переноса нормальных рейнольдсовых напряжений  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle v'^2 \rangle$ ,  $\langle w'^2 \rangle$  в приближении тонкого сдвигового слоя:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^\infty \frac{W^2 + \langle w'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle}{r} dr - \frac{\partial (\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle)}{\partial x}; \quad (1)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle v'w' \rangle - \frac{\langle v'w' \rangle}{r} - \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial x}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 0; \quad (3)$$

$$U \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} = -2(1-\alpha) \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{3} \epsilon - C_1 \frac{\epsilon}{e} \left( \langle u'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{2}{3} \alpha P + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{re \langle v'^2 \rangle}{\epsilon} \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} \right); \quad (4)$$

$$U \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - 2 \frac{W}{r} \langle v'w' \rangle = 2(1-\alpha) \langle v'w' \rangle \frac{W}{r} - \frac{2}{3} \epsilon - C_1 \frac{\epsilon}{e} \left( \langle v'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{re}{\epsilon} \left( \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - \frac{2 \langle v'w' \rangle^2}{r} \right) \right] - \frac{2C_s e}{r\epsilon} \left( \langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle}{r} \right) + \frac{2}{3} \alpha P; \quad (5)$$

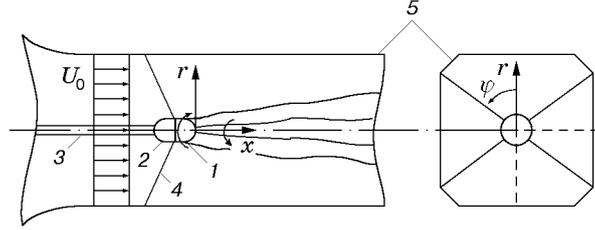


Рис. 1

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} + 2 \frac{W}{r} \langle v'w' \rangle &= -2(1 - \alpha) \langle v'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{2}{3} \varepsilon - \\
 - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle w'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{re}{\varepsilon} \left( \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} + \frac{2 \langle v'w' \rangle^2}{r} \right) \right] + \\
 + \frac{2C_s e}{r\varepsilon} \left( \langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle}{r} \right) + \frac{2}{3} \alpha P. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Здесь  $(x, r, \varphi)$  — цилиндрическая система координат с началом на задней кромке тела (рис. 1); ось  $x$  направлена противоположно направлению движения тела;  $U, V, W, u', v', w'$  — соответствующие компоненты скорости осредненного и пульсационного движения;  $\langle u'v' \rangle, \langle u'w' \rangle, \langle v'w' \rangle$  — касательные рейнольдсовы напряжения;  $e = (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle)/2$  — энергия турбулентности. Угловые скобки означают осреднение. Слагаемые с молекулярной вязкостью отброшены в предположении малости.

Касательные турбулентные напряжения определяются из неравновесных алгебраических соотношений Роди [18]:

$$\langle u'v' \rangle = \alpha_1 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial r}; \quad (7)$$

$$\langle u'w' \rangle = \alpha_1 \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} + \langle v'w' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} \right); \quad (8)$$

$$\langle v'w' \rangle = \alpha_1 \left( \langle v'^2 \rangle r \frac{\partial (W/r)}{\partial r} + \frac{W}{r} (\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) \right), \quad (9)$$

где  $\alpha_1 = -\lambda_1 e/\varepsilon$ ;  $\lambda_1 = (1 - C_2)/(C_1 + P/\varepsilon - 1)$ .

Скорость диссипации  $\varepsilon$  находилась путем решения дифференциального уравнения переноса

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{C_\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{re \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon}{e} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon). \quad (10)$$

В уравнениях (4)–(6), (10) и соотношениях (7)–(9) величина порождения энергии турбулентности за счет осредненного движения имеет вид

$$P = - \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} + \langle v'w' \rangle r \frac{\partial (W/r)}{\partial r} \right).$$

В формулах (1)–(10) эмпирические постоянные  $C_s = 0,22$ ,  $C_\varepsilon = 0,17$ ,  $\alpha = 0,93$ ,  $C_1 = 0,6$ ,  $C_2 = 2,2$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1,45$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ . Переменные задачи обезразмеривались с применением в качестве масштабов скорости невозмущенного потока  $U_0$  и характерной длины  $D$  (диаметра тела). В основу представленной выше математической модели положена модель [19]. Структура математической модели обусловлена опытом численного моделирования незакрученных безимпульсных турбулентных следов в линейно стратифицированной жидкости [20]. Расчеты настоящей работы представляют собой начальный этап задачи численного моделирования закрученных турбулентных следов за самодвижущимися телами в стратифицированной жидкости.

В качестве начальных условий при  $x = x_0$  задавались поперечные распределения  $U$ ,  $W$ ,  $\varepsilon$ ,  $\langle u'_i u'_i \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ), согласованные с экспериментальными данными. При  $r \rightarrow \infty$  ставились условия невозмущенного потока, при  $r = 0$  — условия симметрии для  $U$ ,  $\langle u'_i u'_i \rangle$ ,  $\varepsilon$  и антисимметрии для  $V$ ,  $W$ :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial \langle u'_i u'_i \rangle}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = V = W = 0.$$

Из математической модели и соответствующих начальных и граничных условий следуют законы сохранения суммарного избыточного импульса и момента количества движения

$$J(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty r \left( UU_1 + \langle u'^2 \rangle - \frac{W^2 + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle}{2} \right) dr = J(x_0); \quad (11)$$

$$M(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty (UW + \langle u'w' \rangle) r^2 dr = M(x_0), \quad (12)$$

где  $U_1 = U - U_0$  — дефект продольной компоненты скорости;  $\rho_0 = \text{const}$  — плотность жидкости.

Численная реализация модели основана на применении конечно-разностного алгоритма первого порядка аппроксимации на подвижных сетках, консервативного по отношению к законам сохранения (11), (12). Алгоритм и его тестирование подробно изложены в [16, 21], поэтому отметим только, что при аппроксимации уравнения (2) значения коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_{tw} = \alpha_1 \langle v'^2 \rangle$  в полуцелых узлах сетки по переменной  $r$  вычислялись по формуле [22]

$$(\nu_{tw})_{i\pm 1/2} = \frac{2(\nu_{tw})_{i\pm 1}(\nu_{tw})_i}{(\nu_{tw})_{i\pm 1} + (\nu_{tw})_i}.$$

Из разностной аппроксимации (2) следует конечно-разностный аналог закона сохранения

$$J_1(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty \left[ UU_1 - \int_r^\infty \frac{W^2 + \langle w'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle}{r'} dr' + \langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle \right] r dr = J_1(x_0),$$

эквивалентного (11). При этом предполагается, что все соответствующие математические операции правомерны.

**3.** Опыты проводились в низкотурбулентной аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью длиной 4 м и характерным размером поперечного сечения  $0,4 \times 0,4$  м. Схема расположения модели показана на рис. 1. Модель изготовлена из алюминиевого сплава и представляет собой тело вращения, составленное из половины эллипсоида вращения с полуосями 25 и 35 мм в лобовой части, кругового цилиндра длиной 40 мм в центральной части и второй половины эллипсоида в кормовой части. Общая длина модели 110 мм, диаметр  $D = 50$  мм.

Модель состоит из двух частей: подвижной 1 и неподвижной 2 (рис. 1). В неподвижной части модели, опирающейся на подводющую сжатый воздух трубку 3 и растяжки 4, смонтированы форсунка и электрический микродвигатель постоянного тока. Диаметр выходного отверстия форсунки 6 мм. Подвижная часть модели приводится во вращение микродвигателем через внутреннее фрикционное зацепление. Модель установлена по оси симметрии рабочей части 5 трубы под нулевым углом атаки к набегающему потоку.

Подбор необходимого режима форсунки и скорости вращения поверхности модели осуществлялся изменением расхода воздуха через форсунку и напряжения питания микроэлектродвигателя. Условие самодвижения ( $J = 0$ ,  $M = 0$ ) считалось выполненным, если отношение положительной части подинтегрального выражения в (11), (12) к отрицательной составляло  $1,00 \pm 0,05$ . Опыты проводились при скорости движения воздуха в рабочей части аэродинамической трубы  $U_0 = 15$  м/с, что соответствовало числу Рейнольдса  $Re = U_0 D / \nu = 5 \cdot 10^4$  ( $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости).

Измерения осуществлялись термоанемометром с линейризатором. Использовались одноточечные и двухточечные датчики, изготовленные из золоченого вольфрама диаметром 5 мкм и длиной 1,25 мм. В соответствии с методикой измерений [9] датчик в каждой измерительной точке ориентировался по вектору средней скорости. Обработка экспериментальной информации выполнялась на компьютере.

4. В опытах измерялись поперечные распределения трех компонент вектора средней скорости, а также нормальных и касательных напряжений Рейнольдса в сечениях следа  $x/D = 5; 7,5; 10; 20; 30; 46$ . Профиль скорости диссипации энергии турбулентности  $\epsilon$  находился только при  $x/D = 10$ . В то же время до проведения основной серии опытов, в которых величины  $J$  и  $M$  поддерживались нулевыми, были измерены профили  $U_1$  и  $\langle u'^2 \rangle^{1/2}$  в условиях, когда подвижная часть модели не вращалась и струя в кормовой части не выдувалась. Эти данные использовались на этапе установки модели под нулевым углом атаки и для расчета коэффициента сопротивления тела  $c_x = 8F_x / (\pi \rho_0 D^2 U_0^2)$ , где

сила гидродинамического сопротивления вычислялась по формуле  $F_x = 2\pi \rho_0 \int_0^{\infty} U_0 U_1 r dr$ .

Получено  $c_x = 0,2$ , что свидетельствует о достаточно хорошей обтекаемости модели.

В режиме самодвижения распределения  $U_1(r, x)$  всегда имеют характерную особенность — обязательное наличие областей с  $U_1 < 0$  и  $U_1 > 0$ . Отрицательные значения  $U_1$ , наблюдающиеся на приведенных на рис. 2 профилях, обусловлены заторможенной в пограничном слое на теле жидкостью, тогда как положительные значения  $U_1$  обеспечиваются струйным движителем. Сплошными кривыми 1–3 на рис. 2 показаны результаты расчетов для  $x/D = 20; 30; 46$ . Начальные данные задавались при  $x/D = 10$ .

При проведении расчетов граничные условия для  $U_1$ ,  $W$ ,  $e$ ,  $\epsilon$ ,  $\langle u_i'^2 \rangle$  из бесконечности переносились на линию  $r = r_* = 4D$  ( $r_*$  определялась в ходе численных экспериментов). Основные результаты расчетов получены на равномерной по переменной  $r$  сетке с шагом  $h_r/D = 0,02$ . Шаг сетки  $h_x/D$  по продольной координате возрастал и изменялся от 0,01 по формуле члена геометрической прогрессии со знаменателем 1,006. Для контроля точности осуществлялся расчет с  $h_r/D = 0,04$  и начальным значением  $h_x/D = 0,02$ . Отклонения сеточных решений в норме, являющейся сеточным аналогом нормы пространства непрерывных функций, не превышали 1 %.

Видно, что построенная численная модель достаточно точно описывает поведение  $U_1(r, x)$  в приосевой зоне следа и менее точно — в периферийной. Последнее связано с общим недостатком математических моделей турбулентности второго порядка, не учитывающих перемежаемость течения во внешних областях следа.

В качестве устройства, закручивающего поток и создающего компенсирующую сопротивление тела струю, использовалась та же форсунка, что и в опытах со сферой [9]. Вращение в струе происходило против часовой стрелки. Для достижения равенства нулю суммарного момента количества движения осуществлялось вращение части поверхности тела в противоположную сторону. Измеренные распределения окружной компоненты вектора средней скорости  $W(r, x)$ , представленные на рис. 3, показывают, что в приосевой области следа жидкость вращается в одном направлении, а в периферийной кольцевой

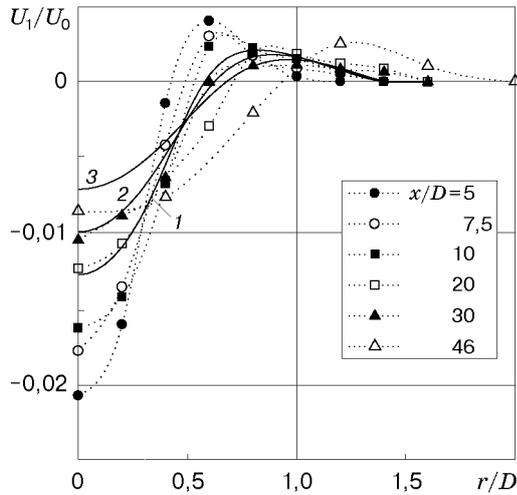


Рис. 2

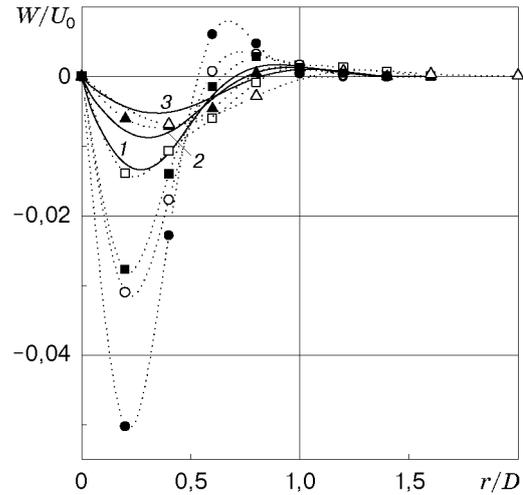


Рис. 3

области следа — в другом. Наличие этого дополнительного вращательного движения и определяет основные отличия реализованного режима самодвижения от ранее изученных. При малых значениях  $r$  выполняется соотношение  $W(r, x) \approx r$ , т. е. жидкость вращается как твердое тело.

Максимальные значения окружной составляющей скорости одного порядка с величиной дефекта продольной компоненты скорости и много меньше скорости набегающего потока, что соответствует случаю слабой закрутки. Тем не менее вклад вращательного движения в следе в величину  $J$  учитывался и при  $x/D = 5$  составлял 8%, при  $x/D = 10$  — 2% положительной части первого слагаемого подынтегрального выражения в (11).

На рис. 3 видно, что рассчитанные профили  $W(r, x)$  согласуются с данными эксперимента во всей области следа. Обозначения на рис. 3, 4 те же, что на рис. 2.

Радиальная компонента вектора средней скорости оказалась пренебрежимо малой, как и в опытах со сферой [9].

В безымпульсных следах без закрутки уже на небольших расстояниях от тела основная часть кинетической энергии сосредоточена в турбулентных флуктуациях [23]. Аналогичная ситуация имеет место и в данном случае (след с закруткой). Так, отношение

полной кинетической энергии пульсационного движения  $\int_0^{\infty} \epsilon r dr$  к полной кинетической

энергии осредненного движения  $\int_0^{\infty} (U_1^2/2 + W^2/2)r dr$  в сечении следа  $x/D = 5$  составля-

ет 4,9, а при  $x/D = 30$  равно 6,6. С ростом  $x$  эта величина растет и согласно результатам расчетов составляет 49,2 при  $x/D = 200$ . Значительный уровень энергии турбулентности на небольшом расстоянии от тела поддерживается радиальными градиентами как продольной, так и окружной компонент скорости и соответствующими касательными напряжениями. Из результатов экспериментов следует, что обе составляющие порождения в уравнении баланса энергии турбулентности значимы, причем вблизи тела большую роль играет вращательная компонента средней скорости. Об этом свидетельствует отношение

$$\int_0^{\infty} \langle u'v' \rangle \frac{\partial U_1}{\partial r} r dr / \int_0^{\infty} \langle v'w' \rangle \frac{\partial (W/r)}{\partial r} r^2 dr,$$

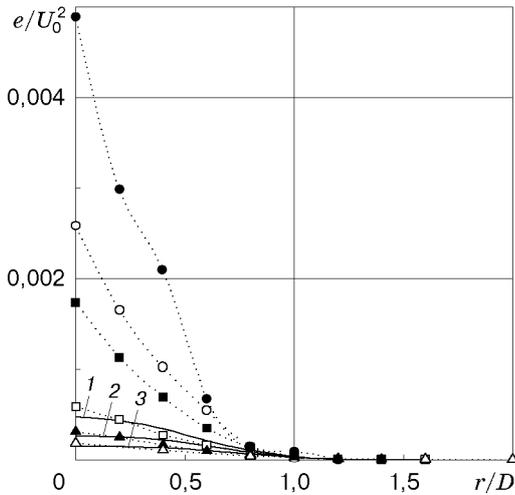


Рис. 4

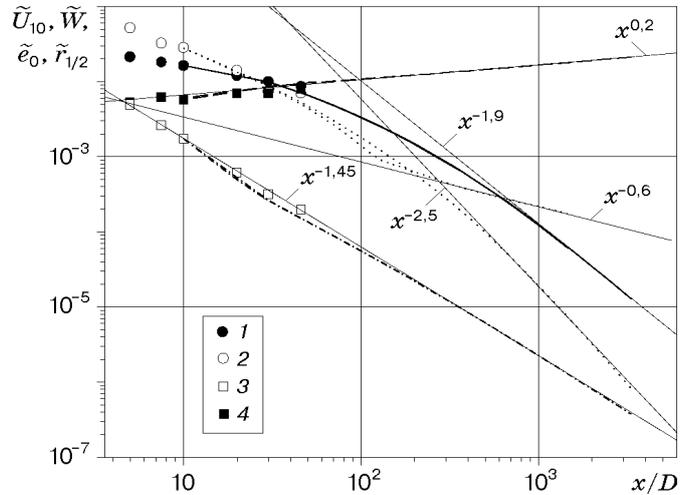


Рис. 5

которое при  $x/D = 5$  равно 0,08, однако уже в сечении следа  $x/D = 30$  влияние продольной компоненты скорости становится более заметным и эта величина составляет 1,3, а при  $x/D = 200$  равна 2,3.

В ходе расчетов анализировалась также зависимость отношения порождения энергии турбулентности  $P$  за счет градиентов осредненного движения к скорости диссипации  $\varepsilon$  от  $x/D$ . Оказалось, что величина  $P/\varepsilon < 0,3$  для  $x/D \in [10, 46]$ . Известно, что классическая  $(e-\varepsilon)$ -модель турбулентности применима лишь для течений, характеризуемых величиной  $P/\varepsilon \approx 1$ , поэтому в настоящей работе используется более сложная математическая модель турбулентности.

Работа струйного движителя приводит к повышенному уровню энергии турбулентности в окрестности оси следа, что видно на рис. 4, где изображены поперечные распределения пульсационной энергии на различных расстояниях от тела. В отличие от аналогичных профилей за буксируемым телом в данном случае максимальные значения  $e$  достигаются на оси следа. Результаты расчетов для  $x/D = 20; 30; 46$  (сплошные линии 1–3) хорошо согласуются с данными эксперимента.

Рис. 5 иллюстрирует изменение рассчитанных и измеренных характерных масштабов турбулентности в зависимости от расстояния от тела. Здесь  $\tilde{U}_{10} = |U_{10}|/U_0$  — осевое значение дефекта продольной компоненты скорости (сплошная линия);  $\tilde{W} = |W|_{\max}/U_0$  — максимальное в данном сечении следа значение окружной компоненты скорости (пунктирные линии);  $\tilde{e}_0 = e_0/U_0^2$  — энергия турбулентности на оси следа (штрихпунктирная линия);  $\tilde{r}_{1/2} = (r_{1/2}/D) \cdot 10^{-2}$  — характерный масштаб ширины следа (штриховая линия), определенный из условия  $\langle u'^2 \rangle^{1/2}(r_{1/2}, x) = 0,5 \langle u'^2 \rangle^{1/2}(0, x)$  ( $\langle u'^2 \rangle^{1/2}(0, x)$  — среднеквадратическое значение флуктуаций продольной компоненты скорости на оси следа); точки 1–4 — соответствующие экспериментальные данные.

Для корректности результатов расчетов на больших расстояниях от тела необходимо обеспечить близость к нулю исходных значений  $J$  и  $M$ . С этой целью экспериментальные распределения аппроксимировались кубическими сплайнами, а затем небольшими вариациями полученных функций при больших  $r$  достигалась нужная малость значений  $J$  и  $M$ . Выполнены два варианта расчетов: в первом  $J = 5,5 \cdot 10^{-13}$ ,  $M = 5,4 \cdot 10^{-11}$  (вычисления проведены для  $10 \leq x/D \leq 3315$ ), во втором  $J = 2,2 \cdot 10^{-12}$ ,  $M = 4,2 \cdot 10^{-4}$  (для  $10 \leq x/D \leq 1464$ ).

Результаты расчетов для обоих вариантов согласуются с экспериментальными данными, практически совпадая для масштабных функций  $U_{10}(x)$ ,  $e_0(x)$  и  $r_{1/2}(x)$  во всем рассмотренном диапазоне значений  $x/D$ . Основное различие наблюдается в поведении функции  $W_{\max}(x)$  при  $x/D > 50$ .

На больших расстояниях от тела зависимость всех масштабных функций от  $x$  степенная (сплошные тонкие прямые на рис. 5), что в рамках использованной математической модели является одним из необходимых признаков достижения автомодельности турбулентного движения в следе. Отметим следующие особенности. Если в турбулентных следах за буксируемыми телами, как правило, автомодельность достигается уже на небольших расстояниях вниз по потоку и прежде всего для моментов первого порядка, то в рассматриваемом безымпультном и “безмоментном” следе вначале асимптотическое поведение наблюдается для характерного поперечного размера следа, затем для энергии турбулентности, характерного масштаба окружной скорости  $W_{\max}$  и лишь при  $x/D > 1000$  для дефекта продольной компоненты скорости  $U_{10}$ .

Для первого варианта расчета окружная компонента скорости при больших  $x/D$  убывает как  $W_{\max}(x) \sim x^{-2,5}$ , т. е. быстрее, чем осевой дефект скорости  $U_{10}(x) \sim x^{-1,9}$ , так что с некоторого момента закруткой можно пренебречь.

Следует отметить, что анализ автомодельности турбулентного следа при  $J = M = 0$  чрезвычайно сложен (см., например, [15]). Проведенный в настоящей работе простейший численный анализ асимптотического вырождения основан на обработке результатов численных экспериментов. Интересно также отметить, что при теоретическом изучении [24] закрученного ламинарного течения за самодвижущимся шаром на основе точных уравнений Навье — Стокса получены асимптотические представления  $U_{10}(x) \sim x^{-2}$ ,  $W_{\max} \sim x^{-2,5}$ , близкие к приведенным на рис. 5.

Несмотря на близость указанных законов вырождения на всех изученных расстояниях, течение в следе было развитым турбулентным. Об этом свидетельствует величина турбулентного числа Рейнольдса  $Re_\lambda = \sqrt{2e}\lambda/\nu$ , вычисляемого по тейлоровскому микромасштабу  $\lambda = \sqrt{10e\nu/\varepsilon}$ . Из расчетов следует, что в диапазоне  $x/D \in [10; 2000]$  осевые значения  $Re_\lambda \in [37; 80]$ , при этом для больших  $x/D$  имеем  $Re_\lambda \sim x^{-0,25}$ .

Во втором варианте расчета на больших расстояниях от тела реализуется автомодельный след с конечным, отличным от нуля моментом количества движения. При  $x/D > 300$   $W_{\max} \sim x^{-0,6}$ , что согласуется с условием  $M = \text{const}$  (см. формулу (12)) и полученным значением показателя в законе расширения следа  $r_{1/2} \sim x^{0,2}$ .

По сравнению с экспериментами со следом за буксируемым телом в выполненных опытах на одном и том же расстоянии  $x/D = 5$  ширина следа оказалась на  $1/3$  меньше, что обусловлено созданием струйным движителем разрежения на оси следа и затягиванием отрыва пограничных слоев на кормовой поверхности тела. Учитывая это обстоятельство и заметно меньшую скорость нарастания поперечных размеров следа (для осесимметричных турбулентных следов за буксируемыми телами  $r_{1/2}(x) \sim x^{0,33}$ ), можно сделать вывод о значительной стабилизирующей способности закрутки в безымпультном следе.

Другим необходимым признаком достижения автомодельности является аффинное подобие поперечных профилей безразмерных характеристик турбулентности в следе. Примером реализации такого режима движения в следе служат представленные на рис. 6 автомодельные профили дефекта продольной и окружной компонент скорости и энергии турбулентности (пунктирная линия — расчет для  $x/D = 338$ , штрихпунктирная — для  $x/D = 2000$ , сплошная — для  $x/D = 3315$ ). При достижении асимптотического вырождения (см. рис. 5) на участке  $x/D > 1000$  в следе наблюдается подобие распределений.

Таким образом, в настоящей работе выполнено экспериментальное моделирование динамики осесимметричного следа за самодвижущимся телом. Построена основанная на по-

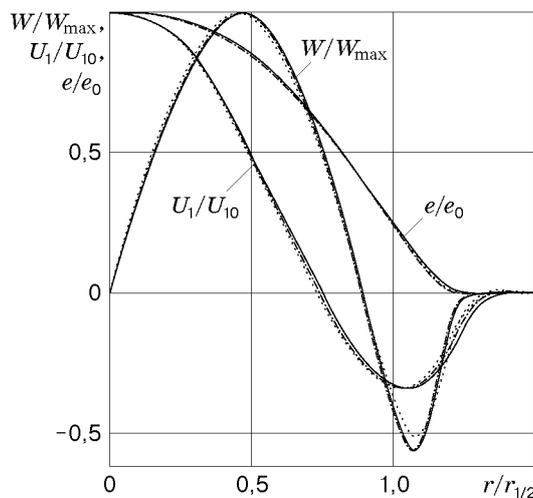


Рис. 6

луэмпирической модели турбулентности второго порядка численная модель течения. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными. Осуществлен численный анализ вырождения дальнего турбулентного следа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Naudascher E.** Flow in the wake of self-propelled body and related sources of turbulence // J. Fluid Mech. 1965. V. 22, N 4. P. 625–656.
2. **Гиневский А. С.** Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969.
3. **Higuchi H., Kubota T.** Axisymmetric wakes behind a slender body including zero-momentum configurations // Phys. Fluids. 1990. V. A2, N 9. P. 1615–1623.
4. **Алексенко Н. В., Костомаха В. А.** Экспериментальное исследование осесимметричного безымпulsive турбулентного струйного течения // ПМТФ. 1987. № 1. С. 65–69.
5. **Cimbala J. M., Park M. J.** An investigation of the turbulent structure in a two-dimensional momentumless wake // J. Fluid Mech. 1990. V. 213. P. 479–509.
6. **Уханова Л. Н., Франкфурт М. О.** Экспериментальное исследование двумерных безымпulsive струйных течений // Инж.-физ. журн. 1984. Т. 47, № 6. С. 906–911.
7. **Дмитренко Ю. М., Ковалев И. И., Лучко Н. Н., Черепанов П. Я.** Исследование плоского турбулентного следа с нулевым избыточным импульсом // Инж.-физ. журн. 1987. Т. 52, № 5. С. 743–751.
8. **Войтович Л. Н.** Экспериментальное исследование закрученных турбулентных струйных течений // Промышленная аэродинамика. Аэродинамика лопаточных машин, каналов и струйных течений. М.: Машиностроение, 1986. Вып. 1/33. С. 224–238.
9. **Костомаха В. А., Леснова Н. В.** Турбулентный закрученный след за сферой с полной или частичной компенсацией силы сопротивления // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 88–98.
10. **Шетц Дж.** Турбулентные течения. Процессы вдува и перемешивания. М.: Мир, 1984.
11. **Sirviente A., Patel V. C.** Experiments in the swirling wake of a self-propelled axisymmetric body // Proc. of the 21st Symp. on naval hydrodynamics, Trondheim (Norway), 24–28 June, 1996. Trondheim, 1996. P. 74–86.
12. **Faure T., Robert G.** Turbulent kinetic energy balance in the wake of a self-propelled body // J. Exp. Fluids. 1996. V. 21, N 4. P. 268–274.

13. **Гумилевский А. Г.** Исследование безимпульсных закрученных следов на основе двухпараметрической модели турбулентности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 3. С. 35–41.
14. **Гумилевский А. Г.** Нарушение автомодельности в турбулентных осесимметричных следах с закруткой // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 1. С. 41–47.
15. **Гумилевский А. Г.** Автомодельность и законы вырождения в следах с компенсацией по импульсу и моменту количества движения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 5. С. 35–41.
16. **Chernykh G. G., Demenkov A. G., Kostomakha V. A.** Numerical model of a swirling momentumless turbulent wake // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1998. V. 13, N 4. P. 279–288.
17. **Kostomakha V. A., Chernykh G. G., Demenkov A. G.** Experimental and numerical modelling of a swirling turbulent wake // Proc. of the 9th Intern. conf. on methods of aerophys. res., Novosibirsk, 29 June–3 July, 1998. Novosibirsk: Inst. Theoret. Appl. Mech., 1998. Pt 2. P. 112–117.
18. **Sharif M. A., Wong J. K. E.** Evaluation of the performance of three turbulence closure models in the prediction of confined swirling flows // Comput. and Fluids. 1995. V. 24, N 1. P. 81–100.
19. **Лаундер Б. Е., Морс А.** Численный расчет осесимметричных сдвиговых течений с использованием замыканий для напряжений // Турбулентные сдвиговые течения 1: Пер. с англ. / Под ред. А. С. Гиневского. М.: Машиностроение, 1982. С. 291–310.
20. **Chernykh G. G., Voropaeva O. F.** Numerical modeling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // Comput. and Fluids. 1999. V. 28. P. 281–306.
21. **Деменков А. Г., Черных Г. Г.** О численном моделировании струйных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вычисл. технологии. 1995. Т. 4, № 12. С. 119–131.
22. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
23. **Федорова Н. Н., Черных Г. Г.** О численном моделировании безимпульсного турбулентного следа за сферой // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 1. С. 129–140.
24. **Сенницкий В. Л.** Движение включений в вибрирующей жидкости: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1993.

*Поступила в редакцию 24/IX 1999 г.,  
в окончательном варианте — 5/XI 1999 г.*

---