УДК 532.516

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОРНАДОПОДОБНОГО ВИХРЯ С ТВЕРДЫМИ ГРАНИЦАМИ

В. В. Никулин

(*Новосибирск*)

Интерес к изучению вертикальных концентрированных вихрей во многом обусловлен стремлением выяснить структуру, механизм образования и источники энергии таких явлений природы, как торнадо [1, 2] и пыльные «дьяволы» [1, 3—5]. Экспериментально торнадоподобные вихри получаются различными способами (например, при наличии стока во вращающейся жидкости [6—10]). В такой постановке обходится вопрос об источниках энергии реальных вихрей, а исследуется лишь структура течения. В [11—13] вихри были получены по механизму, возможно, напоминающему реальный. Источником концентрации завихренности служила неустойчивая стратификация смеси воды с воздухом [11] или воздуха, нагреваемого снизу [12, 13]. Теоретические модели, учитывающие неустойчивую стратификацию, построены в [12, 14], причем в [12] считается неустойчивым лишь тонкий слой вблизи нижней поверхности, а в [14] — вся атмосфера. При этом получаются качественно разные результаты. Так, если за радиус вихря взять расстояние, на котором достигается максимум вращательной скорости, то из [12] следует, что его величина растет с высотой z вдоль вихря, а согласно [14] не зависит от z.

1. Установка для получения и исследования торнадоподобных вихрей представляет собой цилиндрический стакан из термостойкого стекла. Высота стакана 130 мм, диаметр — 100 мм. Сосуд устанавливается вертикально, наполняется водой и подогревается снизу. Жидкость приводится в движение вращающимся прозрачным диском, установленным со стороны верхней открытой части сосуда. Диаметр диска 90 мм. Течение, получающееся в эксперименте, обладает осевой симметрией. Введем цилиндрическую систему координат (r φ z), r — радиус, φ — азимутальный угол. Ось z совпадает с осью симметрии течения. Обозначим через u, v, w компоненты скорости, соответствующие координатам r, φ, z. Скорости течения измеряются методом водородных пузырьков [15]. Для этого используются медные проволочки диаметром 50 мкм. Определяются функции: $v(r)$, $w(r)$ при фиксированных z и $v(z)$ при фиксированных r. Для нахождения $v(r)$ и $w(r)$ производились съемки линии пузырьков, порождаемых горизонтальной проволочкой. Проволочка натягивалась по диаметру сосуда на высоте 1 и 3 см над дном. В первом случае пузырьки фотографировались сверху под углом 10° к оси z, во втором — сбоку по нормали к проволочке. Функция $v(z)$ находилась путем съемки пузырьков от вертикальной проволочки. Последняя отстояла от центра сосуда на расстоянии 20 и 30 мм. Пузырьки фотографировались сбоку вдоль радиуса, проходящего через проволочку. Во всех случаях линия пузырьков снималась на фотопленку с некоторым временем задержки τ после их образования. Съемки производились при различных значениях частоты вращения диска f и глубины воды в сосуде l.

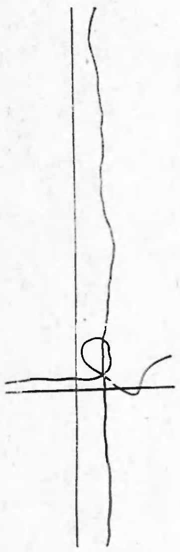
В отсутствие нагрева жидкость вне тонких пограничных слоев на твердых поверхностях вращалась, почти как твердое тело. Частота вращения равнялась примерно 0,2 f. Аналогичный результат получен в [9]. При нагреве в центре сосуда образовывался вертикальный вихрь. На фиг. 1 представлена фотография этого вихря, визуализированного введением краски в нижний граничный слой ($f = 0{,}9$ об/с), на фиг. 2 — типичная фотография пузырьков от вертикальной проволочки ($\tau = 0{,}53$ с, $f = 0{,}9$ об/с), на фиг. 3 — фотография линии пузырьков от горизонтальной проволочки при съемках сверху. Верхний кадр соответствует $f = 0{,}9$ об/с, нижний — $f = 1{,}54$ об/с. В обоих случаях $l = 12$ см, $\tau = 0{,}11$ с. Фиг. 4 представляет собой снимок линии пузырьков, показывающей зависимость $w(r)$ на высоте 1 см ($\tau = 0{,}53$ с, $f = 0{,}9$ об/с).

Используя данные эксперимента, отметим важные качественные особенности течения. Сразу после выхода из пограничного слоя происходит взрыв вихря [9] (фиг. 1). На основании данных фиг. 2 заключаем, что в первом приближении v не зависит от высоты z. Согласно фиг. 3, в вихре можно выделить ядро, внутри которого вращение близко к твердотельному, а вне — к потенциальному. Фиг. 3 и таблица иллюстрируют эффект, наблюдаемый в эксперименте. При увеличении f (для $f \geqslant 0{,}9$ об/с, $l = 12$ см) или при уменьшении l($f = 0{,}9$ об/с, $l \leqslant 12$ см) радиус ядра резко возрастает, а при уменьшении f($f \leqslant 0{,}9$ об/с, $l = 12$ см) — практически не меняется. В таблице r_0 — радиус ядра, A_∞ — значение vr при $r = r_0$. Согласно фиг. 4, профиль вертикальной скорости близок к ступенчатой функции. Радиус области восходящего потока r_* примерно равен радиусу ядра. Течение внутри ядра направлено вверх.

Фиг. 1

Помимо определения поля скорости, производились измерения температуры. Для этого использовался ртутный термометр. Измерения показали, что температура в ядре на 1—3°С выше, чем вне его. В области вне ядра наблюдалось повышение последней примерно на 1°С при опускании термометра с высоты 10 см до 1 см. Кроме того, температура воды в стакане повышалась примерно со скоростью 1°С за 30 с. Измерения в ядре и на разных высотах показывают, что характерной температурой является 1°С. В свою очередь, характерное время *процесса*, если его считать по частоте вращения ядра или по времени всплывания жидкости в ядре, составляет несколько секунд. Таким образом, изменение температуры воды за характерное время процесса мало по сравнению с характерной температурой. Отметим, что во всех экспериментах течение было ламинарным, а условия нагрева фиксированы.

2. На основе данных эксперимента построим теоретическую модель наблюдаемого явления. Основной целью является получение выражения для радиуса ядра и объяснение эффекта его утолщения. Схема поля течения в стакане в осевом сечении приведена на фиг. 5. Область I занимает пограничный слой, в области II поток из пограничного слоя вытекает вверх в виде узкой закрученной струи, в III происходит взрыв вихря, IV — ядро вихря, в V течение близко к потенциальному. Будем рассматривать области IV и V. Начало координат поместим в точку O. Сформулируем основные предположения:



Фиг. 2

а) течение ламинарно, стационарно и цилиндрически симметрично;

б) справедливо приближение Буссинеска;

в) азимутальная компонента скорости в первом приближении не зависит от z, тогда

$$vr = A(r) + \varepsilon A_1(r, z), \tag{2.1}$$

где $\varepsilon \ll 1$; $A \sim A_1$;

г) поскольку $r_0 \approx r_*$, полагаем $r_0 = r_*$;

д) область V (фиг. 5) в радиальном направлении простирается до бесконечости;

е) в каждом сечении $z = \mathrm{const}$ профиль аксиальной скорости $w(r)$ и величину $\theta(r) = T - T_*$, где T — температура; T_* — температура на бесконечном удалении от оси вихря, можно аппроксимировать ступенчатыми функциями по r

$$w(r) = \begin{cases} W(z), \\ 0, \end{cases} \quad \theta(r) = \begin{cases} \Theta(z), & 0 \leqslant r \leqslant r_0, \\ 0, & r > r_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

(отметим, что если при аппроксимации θ вместо r_0 взять $r_1 \neq r_0$, то качественные результаты не изменятся, лишь при некоторых коэффициентах в уравнениях появятся множители типа r_1^2/r_0^2 порядка 1);

ж) так как $r_0 \ll l$ и изменения величины скорости по высоте и по радиусу ядра одного порядка, то в дальнейшем используем приближение аксиального пограничного слоя.

Перейдем к выводу системы уравнений. Воспользуемся предположениями «а», «б», «д», «ж», уравнением состояния в виде $\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$ и соотношениями $T_* = T_*(z)$, $P_* = P_*(z)$. Здесь α — удельный коэффициент теплового расширения; P_* — давление вдали от оси вихря; ρ_0, T_0 — плотность и температура при $z = 0$, $r \to \infty$. В результате уравнения неразрывности, движения и энергии в цилиндрической системе координат примут вид

$$\partial Q/\partial r = \partial(wr)/\partial z; \tag{2.3}$$

$$u\frac{\partial(vr)}{\partial r} + w\frac{\partial(vr)}{\partial z} = \nu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(vr)}{\partial r}\right), \tag{2.4}$$

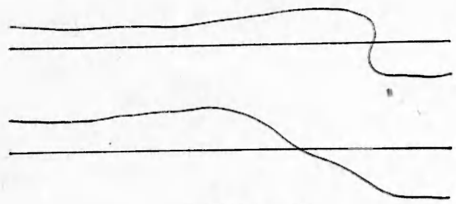
$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ur)}{\partial r}\right),$$

$$-\frac{\partial(wQ)}{\partial r} + \frac{\partial(rw^2)}{\partial z} = -r\frac{\partial p}{\partial z} + \alpha g r\theta + \nu\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right),$$

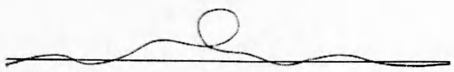
$$-\frac{\partial(\theta Q)}{\partial r} + \frac{\partial(rw\theta)}{\partial z} = \beta rw + \varkappa\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right),$$

где $Q = -ur$; ν — кинематическая вязкость жидкости; $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности; g — ускорение силы тяжести; $\beta = -\partial T_*/\partial z$; $p = (P - P_*)/\rho_0$; P — давление. Из (2.3) и первого уравнения (2.4) получим выражение для радиуса ядра. Определим

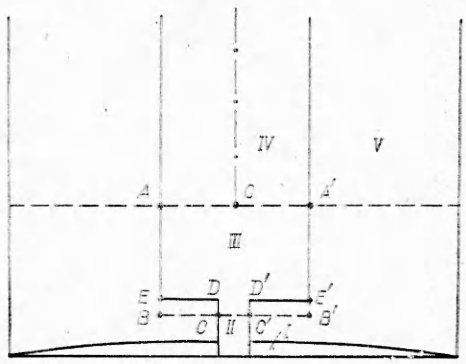
f, об/с	0,9	1,2	1,54	0,9
l, см	12	12	12	8,5
A_∞, см²/с	1,3	2,55	5,3	1,9
r_0, см	0,3	0,55	1,1	0,55
$A_\infty/r_0 l$, 1/с	0,36	0,39	0,4	0,4



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

r_0 по максимуму азимутальной скорости. Тогда в силу «в» r_0 в первом приближении не зависит от z. Заменим первое уравнение системы (2.4) его первым приближением. Для этого оценим возможность пренебрежения вторым слагаемым в его левой части. Для оценки считаем, что внутри ядра вращение твердотельное. Оценивая u из уравнения неразрывности, найдем

$$u\partial(vr)/\partial r \sim \Delta W \Gamma_0 r^2/(r_0^2 l), \tag{2.5}$$

$$w\partial(vr)/\partial z \sim W \Delta\Gamma_0 r^2/(r_0^2 l),$$

где Γ_0 — значение (vr) на границе ядра; ΔW, $\Delta\Gamma_0$ — изменение величин на высоте l. Согласно (2.5), пренебрежение возможно, если $\Delta W\Gamma_0 \gg W\Delta\Gamma_0$. Последнее верно, так как, согласно (2.1), $\Gamma_0 \gg \Delta\Gamma_0$ и, как будет показано ниже, $\Delta W \sim W$.

Отбросим указанное слагаемое и используем предположение «в». Получим уравнение первого приближения

$$\frac{d^2A}{d\eta^2} + \frac{Q}{2\nu\eta}\frac{dA}{d\eta} = 0, \quad \eta = r^2/r_0^2. \tag{2.6}$$

Наложим граничные условия $A(0) = 0$, $A(\infty) = A_\infty$. С помощью уравнений (2.3), (2.6) выясним структуру Q, откуда найдем выражение для r_0. Из (2.6) следует, что в первом приближении $Q = Q(r)$. Тогда, согласно (2.3), w есть линейная функция z

$$w \sim z. \tag{2.7}$$

Решая (2.3) с учетом (2.2), (2.7), получим

$$Q = \begin{cases} Q_0\eta, & 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \\ Q_0 = r_0^2 \Delta W/(2l), & \eta \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

По определению в точке r_0 достигается максимум азимутальной скорости. Проинтегрируем (2.6) с учетом (2.8). Полученное выражение исследуем на экстремум азимутальной скорости. В результате найдем, что Q_0 удовлетворяет уравнению $\exp(Q_0/(2\nu)) - 1 = Q_0/\nu$. Отсюда $Q_0 \approx 2\nu$. Положим в первом приближении $Q_0 = 2\nu$. Тогда из (2.8) находим искомое выражение для r_0

$$r_0^2 = 4\nu l/(\Delta W). \tag{2.9}$$

Таким образом, чтобы выяснить зависимость r_0 от параметров модели, нужно найти ΔW. Последнюю определим из уравнения движения для аксиальной компоненты скорости и уравнения энергии. Решаем их, используя предположения «г», «е». Введем безразмерные величины

$$W_0 = W/\sqrt{\alpha\beta g l},\ \Theta_0 = \Theta/\beta l,\ \xi = z/l. \tag{2.10}$$

Проинтегрируем уравнение для w от 0 до r_0 по r и от 0 до l по z, уравнение энергии от 0 до r_0 по r. В найденные выражения подставим (2.10) и возьмем в качестве β среднее по высоте значение.

Получим

$$W_0^2(1) - W_0^2(0) = -\Delta p_0 + \int\limits_0^1 \Theta_0 d\xi + \frac{2\nu}{r_0\alpha\beta g l}\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_0 d\xi, \tag{2.11}$$

$$\frac{d(W_0\Theta_0)}{d\xi} = W_0 + \frac{2\varkappa}{r_0\beta\sqrt{\alpha\beta g}\, l}\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_0;$$

$$\Delta p_0 = \frac{2}{r_0^2\alpha\beta g l^2}\int\limits_0^{r_0}(p(1) - p(0))\, r dr. \tag{2.12}$$

Нижний индекс 0 означает, что производные берутся при $r = r_0$. Оценим порядок величин производных

$$(\partial w/\partial r)_0 \approx -W/r_0,\ (\partial\theta/\partial r)_0 \approx -\Theta/r_0. \tag{2.13}$$

С учетом (2.7) решение (2.11) ищем в виде линейных функций по ξ

$$W_0 = a_1\xi + b_1,\ \Theta_0 = a_2\xi + b_2. \tag{2.14}$$

Величины a_1, b_1, a_2, b_2 не зависят от ξ. Их физический смысл следует непосредственно из (2.10), (2.14). Подставим (2.10), (2.14) в (2.9). Получим

$$r_0^2 = 4\nu/a_1\sqrt{\alpha\beta g}. \tag{2.15}$$

Подставляя (2.13), (2.14) в (2.11) и заменяя r_0^2, согласно (2.15), получаем

$$5a_1^2/4 + 5a_1b_1/2 = -\Delta p_0 + a_2/2 + b_2,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4\Pr}\right)^{-1},\quad b_1 = 2a_1b_2\left(1 + \frac{1}{4\Pr}\right),$$

где $\Pr = \nu/\varkappa$. Так как $4\Pr \gg 1$, то в первом приближении находим

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{5}\left(1 - \frac{4\Delta p_0}{1 + 4b_2}\right)}. \tag{2.16}$$

Таким образом, для решений вида (2.14) из четырех величин a_1, b_1, a_2, b_2 лишь одна задается независимо, а остальные определяются путем решения системы (2.11). Физически ясно, что можно задавать b_1 или b_2, т. е. значение скорости или температуры на нижней границе (при $\xi = 0$). Однако задание b_1 затруднено, поскольку в процессе взрыва вихря может происходить неконтролируемое вовлечение жидкости в ядро из внешней области или, наоборот, ее выброс [9]. Поэтому в качестве свободного параметра берем величину b_2. Из (2.16), (2.15) заключаем, что, чтобы найти значение r_0, нужно задать b_2, β и определить Δp_0. В настоящем эксперименте условия нагрева фиксированы, поэтому можно считать, что b_2 и β примерно постоянны. Тогда изменения r_0 полностью определяются изменениями Δp_0.

Найдем Δp_0 и с целью объяснения эффекта утолщения ядра проанализируем зависимость Δp_0 от A_∞ и l. Уравнение движения для радиальной компоненты скорости в первом приближении имеет вид

$$\partial p/\partial r = A^2/r^3. \tag{2.17}$$

Считая, что внутри ядра вращение твердотельное, а вне его — потенциальное, с помощью (2.17) находим

$$\int_0^{r_0} p(1)\, r dr = -3A_\infty^2/8. \tag{2.18}$$

Для определения Δp_0 нужно найти разность между (2.18) и интегралом

$$\int_0^{r_0} p(0)\, r dr.$$

Последний определим, учитывая условия на нижней границе, а именно явление взрыва вихря. Рассмотрим область $AA'B'B$ (фиг. 5). Обозначим через r_1 радиус вихря до взрыва, u_1 — среднюю скорость в сечении CC'. Запишем интегральный закон сохранения аксиальной компоненты импульса для $AA'B'B$

$$\int_0^{r_0} p(0)\, r dr = -\frac{3}{8}A_\infty^2 - \frac{A_\infty^2}{2}\ln\frac{r_0}{r_1} + \frac{u_1^2 r_1^2}{2}. \tag{2.19}$$

При выводе (2.19) сделаны следующие предположения. Вне области $CDEAA'E'D'C'$ жидкость имеет пренебрежимо малую вертикальную скорость. Отрезок CD достаточно короткий, чтобы можно было пренебречь трением и подъемной силой, действующими на него. Внутри CC' вращение твердотельное, вне его — потенциальное. Уравнение (2.17) справедливо и в области $BEE'B'$. Помимо этого, в (2.19) на основании данных эксперимента отброшены члены, соответствующие потоку импульса в сечении AA', подъемной силе и силе трения, действующими на $AA'E'E$. Для их оценки использованы табличные данные, а также величины $W(0) = 1{,}6$ см/с, $AE = 1$ см. Найдем выражение для $u_1^2 r_1^2$. Величина $u_1 r_1^2$ равна потоку массы в пограничном слое, деленному на π. В [16] для ламинарного движения дана оценка $u_1 r_1^2 \sim (\nu A_\infty)^{1/2} R$, где R порядка радиуса сосуда. В [17] показано, что диаметр вихря до взрыва по порядку величины равен толщине пограничного слоя δ. Этот же факт отмечен в [9]. Согласно [16], $\delta \sim (\nu/A_\infty)^{1/2} R$. Тогда $u_1^2 r_1^2 = kA_\infty^2$, где k — некий постоянный коэффициент. Используя последнее выражение, подставим (2.18), (2.19) в (2.12). Получим

$$\Delta p_0 = \frac{A_\infty^2}{\alpha\beta g l^2 r_0^2}\left(\ln\frac{r_0}{r_1} - k\right). \tag{2.20}$$

Покажем, что если выражение в скобках положительно, то r_0 будет возрастающей функцией A_∞ и убывающей функцией l. Предположим противное. Тогда Δp_0 возрастет с увеличением A_∞ или уменьшением l. Последнее выполнено, так как, согласно эксперименту, $r_0/r_1 \gtrsim 10$, а согласно [16], r_1 — убывающая функция A_∞. Возрастание Δp_0 приведет к увеличению r_0, что противоречит предположению.

Подставим (2.20), (2.16) в (2.15). Полученное выражение решим относительно r_0^2. Найдем

$$r_0^2 = \frac{4\sqrt{5}\nu}{\sqrt{\alpha\beta g}}\left(\sqrt{c^2+1}+c\right), \tag{2.21}$$

где

$$c = \frac{(\ln(r_0/r_1) - k)A_\infty^2}{2\sqrt{5}(1+4b_2)\sqrt{\alpha\beta g}\, l^2\nu}.$$

Подстановка (2.21) в (2.15) дает

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}\left(\sqrt{c^2+1}+c\right)}. \tag{2.22}$$

С помощью (2.10), (2.14), (2.22) можно определять $W(0)$ и ΔW.

Таким образом, получены формулы для оценок параметров вихрей. Из их вывода следует, что, согласно модели, пограничный слой на нижней поверхности оказывает существенное влияние на внешнее течение. Главную роль в таком влиянии играет взрыв вихря.

Отметим отличие моделей [12, 14] от рассматриваемой. В [12] течение считается турбулентным, а жидкость внутрь ядра вовлекается из-за процессов турбулентного перемешивания на его границе. Получающееся при этом уравнение неразрывности не имеет решений, в которых $W \sim z$, r_0 не зависит от z. Напротив, согласно [12], r_0 растет с высотой z. Модель, предложенная в [14], более близка к настоящей. В [14] получено, что r_0 не зависит от z. Для данной стратификации среды r_0 зависит только от вязкости, $r_0 \sim \nu^{1/2}$. Существование пограничного слоя на нижней поверхности в [14] практически не учитывается. Отметим, что формула (2.21) при $c \to 0$ с точностью до коэффициента порядка 1 совпадает с выражением для r_0^2 из [14]. Как в [12], так и в [14] высота вихря не входит в параметры задачи.

3. Сравним рассматриваемую модель с экспериментом. 1. В рамках модели качественно объясняется эффект утолщения ядра при увеличении A_∞ или уменьшении l, если условия нагрева фиксированы. Поскольку r_0 возрастает с увеличением A_∞ или уменьшением l, величина $A_\infty/(r_0\, l)$ должна меняться слабее, чем A_∞, r_0, l каждая в отдельности. Данный вывод согласуется с экспериментом (см. таблицу).

Исследуем возможность применения формул (2.21), (2.22) для вычисления параметров вихрей. Согласно (2.21), (2.22) единственной неизвестной величиной является $\ln(r_0/r_1) - k$. Так как в эксперименте r_0/r_1 менялось не более чем на порядок и минимальное значение r_0/r_1 имеет порядок 10, то в первом приближении величину $\ln(r_0/r_1) - k$ считаем постоянной. Для ее нахождения воспользуемся тем фактом, что для $f \leqslant 0{,}9$ об/с, $l = 12$ см r_0 практически не изменяется. Последнее означает, что данные первого столбца таблицы отвечают малым c. С целью лучшего соответствия эксперименту положим для первого столбца $c = 0{,}2$.

2. Найдем теоретические значения $W(0)$, ΔW, r_0 для $c = 0{,}2$. Положим $\rho_0 = 1$ г/см^3, $\alpha = 2\cdot 10^{-4}$ 1/град, $\nu = 0{,}7\cdot 10^{-2}$ см^2/с, $\beta = 0{,}1$ град/см, $b_2 = 1$. Тогда из (2.10), (2.14), (2.21), (2.22) получим $W(0) \approx 1{,}4$ см/с, $\Delta W \approx 0{,}7$ см/с, $r_0 \approx 0{,}7$ см.

Соответствующие экспериментальные значения равны $W(0) \approx$ $\approx 1{,}6$ см/с, $\Delta W \approx 0{,}6$ см/с, $r_0 \approx 0{,}3$ см (здесь $W(0)$ — значение максимума w на высоте 1 см, ΔW рассчитано по разности максимумов w на высотах 1 и 3 см, r_0 — из первого столбца таблицы).

3. Используя формулу (2.22), вычислим отношения радиусов ядер, соответствующих значениям A_∞, l из 2—4 столбцов таблицы, к r_0, соответствующему A_∞, l из 1, радиуса r_0, соответствующего A_∞, l из 3 к r_0 из 2,4. Получим 1,3; 2,4; 1,3; 1,8; 1,8.

Аналогичные отношения для радиусов r_0, взятых из таблицы, равны 1,8; 3,7; 1,8; 2; 2.

Таким образом, теоретические результаты качественно согласуются с экспериментальными, расчеты параметров вихря по формулам модели по порядку величины совпадают с их экспериментальными значениями.

Автор выражает благодарность Б. А. Луговцову за обсуждение результатов работы и ряд ценных замечаний по поводу ее теоретической части, В. Ф. Тарасову, С. П. Хачатуряну и В. И. Якушеву за помощь в создании экспериментальной установки.

Поступила 15 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Наливкин Д. В.** Ураганы, бури и смерчи. Л., Наука, 1969.
2. **Hoecker W. H.** Wind speed and air flow patterns in the Dallas Tornado of April 2, 1957.— Mon. Wea. Rev., 1960, vol. 88, N 5.
3. **Ives R. L.** Behavior of dust devil.— Bull. Amer. Met. Soc., 1947, vol. 28, N 4.
4. **Williams N. R.** Development of dust whirls and similar small-scale vortices.— Bull. Amer. Met. Soc., 1948, vol. 29, N 3.
5. **Sinclair P. C.** Some preliminary dust devil measurements.—Mon. Wea. Rev., 1964, vol. 92, N 8.
6. **Ying S. J., Chang C. C.** Exploratory model study of tornado-like vortex dynamics.— J. Atmos. Sci., 1970, vol. 27, N 1.
7. **Wan C. A., Chang C. C.** Measurement of the velocity field in the simulated tornado-like vortex using a three-dimensional velocity probe.— J. Atmos. Sci., 1972, vol. 29, N 3.
8. **Ward N. B.** Exploration of certain features of tornado dynamic using a laboratory model.— J. Atmos. Sci., 1972, vol. 29, N 6.
9. **Maxworthy T.** On the structure of concentrated columnar vortices.— Astron. Acta, 1972, vol. 17, N 4—5.
10. **Hsu C. T., Fattahi.** Mechanism of tornado funnel formation.— Phys. Fluids, 1976, vol. 19, N 12.
11. **Turner J. S.** The constraints imposed on tornado-like vortices by the top and bottom boundary conditions.— J. Fluid Mech., 1966, vol. 25, N 2.
12. **Barcilon A.** A theoretical and experimental model for a dust devil.— J. Atmos. Sci., 1967, vol. 24, N 5.
13. **Владимиров В. А.** Формирование вихревых шнуров из восходящих потоков над испаряющейся жидкостью.— ДАН СССР, 1977, т. 236, № 2.
14. **Гутман Л. Н.** Теоретическая модель смерча.— Изв. АН СССР. Серия геофизическая, 1957, № 1.
15. **Schraub F. A., Kline S. J., Henry H., Runstadler P. W., Littell A.** Use of hydrogen bubbles for quantitative determination of time-dependent velocity fields in low-speed water flows.— Trans. ASME, 1965, Ser. D, vol. 87, N 2. Рус. пер.— Теор. основы инж. расчетов, 1965, т. 87, № 2.
16. **Rott N., Lewellen W. S.** Boundary layers in rotating flow.— Prog. Aeronaut. Sci., 1966, vol. 7, p. 111.
17. **Barcilon A.** Vortex decay above a stationary boundary.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, N 1.