НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТИКСОТРОПНОЙ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПЛАСТИНКАМИ

С. Е. Агаева

(Баку)

Многочисленные исследования показали, что глинистые и цементные растворы относятся к тиксотропным вязко-пластичным жидкостям и не подчиняются закону трения Ньютона. Деформационное поведение таких жидкостей с аномальной вязкостью характеризует формула Шведова — Бингама, при этом механические свойства таких систем характеризуются двумя параметрами: структурной вязкостью и предельным напряжением сдвига.

Для систем с аномальной вязкостью характерно явление, при котором система после механического перемешивания становится жидкой, а после выдерживания в спокойном состоянии вновь загустевает. Это явление изотермически обратимого превращения геля в золь при механическом перемешивании было впервые названо Фрейндлихом тиксотропией.

Явление тиксотропии имеет большое значение в практике бурения газовых и нефтяных скважин, так как оно характеризует способность раствора удерживать во взвешенном состоянии более тяжелые частицы и выбуренную породу при остановках циркуляции.

Изменение предельного напряжения сдвига и структурной вязкости, в зависимости от времени, характеризует свойство тикстопии вязко-пластичной жидкости.

В данной заметке для удовлетворения автомодельности решения предполагается, что структурная вязкость вязко-пластичной жидкости является линейной функцией времени, т. е. $\eta = \alpha t$, а предельное напряжение сдвига $\tau_0 = \text{const}$.

Известно, что при нестационарном движении вязко-пластичной жидкости имеют место вязко-пластичная и упругая области течения, границы которых являются функциями времени.

В общем случае нестационарного движения вязко-пластичной жидкости имеем краевую задачу с подвижной границей. Рассматривается обратная задача: при решении обратных задач задается закон изменения подвижных границ и определяется соответствующее этому закону распределение скорости движения.

Рассмотрим прямолинейное нестационарное движение тиксотропной вязко-пластичной жидкости между параллельными пластинками. Примем, что движение происходит в направлении оси z со скоростью v между двумя пластинками, расположенными на расстоянии $2h$.

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\Delta p}{l} \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant h) \tag{1}$$

где x_0 — размер ядра.

Граничные условия будут

$$v_z(h, t) = 0 \qquad \left(\frac{\partial v_z(x, t)}{\partial x}\right)_{x_0} = 0 \tag{2}$$

$$2lx_0\rho \left(\frac{\partial v_z(x, t)}{\partial t}\right)_{x_0} + 2l\tau_0 = 2x_0\Delta p$$

Пусть движение подвижных частиц задано в виде

$$x_0 = \beta t, \ \ h = \gamma t$$

Здесь β — константа, подлежащая определению; γ — некоторая заданная величина.

При $l^{-1}\Delta p = A_1 / t$, используя теорию размерностей, нетрудно установить, что решение сформированной задачи автомодельно и имеет вид

$$v = Af(\xi), \qquad A = \sqrt{\tau_0 / \rho} \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получим

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{\xi}{B}\frac{df}{d\xi} + \frac{Q}{B} = 0 \qquad (\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_*) \qquad \left(B = \frac{\alpha}{\rho A^2}, \ Q = \frac{A_1}{\rho A}\right) \tag{4}$$

При этом граничные условия примут вид

$$f(\xi_*) = 0, \qquad \frac{df}{d\xi}\Big|_{\xi=\xi_0} = 0 \tag{5}$$

Решение уравнения (3) при условии (5) имеет вид

$$f(\xi) = -\frac{Q}{B}\int_{\xi_*}^{\xi} \exp\frac{-\xi^2}{2B} F(\xi)\, d\xi, \qquad F(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \exp\frac{\xi^2}{2B}\, d\xi \tag{6}$$

Для скорости движения получим

$$V = -\frac{Q}{B}\int_{\xi^*}^{\xi} F(\xi)\exp\frac{-\xi^2}{2B}\, d\xi, \qquad V = \frac{v}{A} \tag{7}$$

Напряжение силы трения определяется формулой

$$T = -\frac{Q}{B} F(\xi)\exp\frac{-\xi^2}{2B} + T_0 \qquad \left(T = \frac{\tau}{\alpha},\ T_0 = \frac{\tau_0}{\alpha}\right) \tag{8}$$

Автомодельное решение данной задачи имеет значение для проверки правильности различных приближенных способов. Например, оценим применимость приближенного способа Слезкина — Тарга. Для этого в уравнение (1) и в условия (2) введем вместо

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)_{x_0}$$

среднее значение по вязко-пластичной области движения, т. е.

$$\varphi(t) = \frac{1}{h - x_0}\int_{x_0}^{h} \frac{\partial v_z}{\partial t}\, dx \tag{9}$$

Решение приближенного уравнения движения с учетом граничных условий (2) будет

$$V = \frac{\tau_0}{\alpha}\xi\left(1 - \frac{A\xi}{2\beta}\right) + \frac{\tau_0\gamma}{\alpha A}\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \tag{10}$$

Здесь β определяется (в обоих решениях) из условия равновесия ядра. Для напряжения силы трения получим

$$T = 2 - \xi\frac{A}{\beta}, \qquad T = \frac{\tau}{\tau_0} \tag{11}$$

Приводим результаты вычислений V для некоторых значений по формулам (7) и (9)

$\xi\ 10^2 =$	6	7	8	9	10	11	
$V\ 10^6 =$	2368	2263	2043	1706	1254	685	(7)
$V\ 10^6 =$	2401	2298	2079	1745	1290	727	(8)

Результаты вычислений по обеим формулам почти совпадают. Это показывает практическую приемлемость приближенного способа.

Поступила 4 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластических и вязких жидкостей в нефтедобыче. Изд. Азернефтнешр, 1959.
2. Гасанов Г. Т., Мирзаджанзаде А. Х. Решение обратных задач нестационарного движения вязко-пластической жидкости. ПМТФ, 1962, № 5.