ЗАДАЧА ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ МГНОВЕННО ПОСТУПАЮЩЕЙ ПРИМЕСИ

О. Н. Прокофьев (*Ленинград*)

Рассматривается нестационарная одномерная задача турбулентной диффузии консервативной примеси в среде, занимающей полупространство ($z \geqslant 0$), ограниченное плоскостью $z = 0$. Поступление примеси на поверхность среды предполагается мгновенным. Распространение примеси под действием турбулентной диффузии происходит в направлении оси z при экспоненциальном законе затухания.

Распределение концентрации примеси $c_1(z, t)$ будет решением одномерного уравнения турбулентной диффузии [1]

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K(z)\frac{\partial c_1}{\partial z}\right], \qquad K(z) = Ke^{-\nu z} \tag{1}$$

где t — время диффузии, ν — интенсивность затухания.

Начальное и граничные условия имеют вид

$$c_1(z,t)\Big|_{t=0} = 0 \quad (z > 0), \qquad -K(z)\frac{\partial c_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = \delta(t), \qquad \lim_{z\to\infty} c_1(z, t) = 0 \tag{2}$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Начальное условие устанавливает отсутствие примеси в полупространстве $z > 0$ при $t = 0$. Первое граничное условие означает, что примесь мгновенно поступает на поверхность среды $z = 0$, занимающей полупространство $z \geqslant 0$, в момент $t = 0$, а в дальнейшем $t > 0$, не выходит из среды за плоскость $z = 0$, т. е. имеет место отражение диффундирующей примеси на границе $z = 0$. Второе граничное условие означает исчезновение концентрации примеси на бесконечном удалении от плоскости $z = 0$. Введем безразмерную координату x и безразмерное время τ

$$x = e^{\nu z}, \qquad \tau = \nu^2 K t \tag{3}$$

Задача (1), (2) примет вид

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = x\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(x,\tau)\Big|_{\tau=0} = 0, \qquad -\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=1} = \frac{1}{\nu K}\,\delta\left(\frac{\tau}{\nu^2 K}\right), \ \lim_{x\to\infty} c(x,\tau) = 0 \tag{4}$$

Задачу решаем операционным методом. После преобразования (p — комплексная переменная)

$$C(x, p) = p\int_0^\infty c(x,\tau)\,e^{-p\tau}\,d\tau \qquad \left(c(x,\tau) = c_1\left(\frac{\ln x}{\nu}, \frac{\tau}{\nu^2 K}\right)\right)$$

имеем

$$\frac{d^2C}{dx^2} - \frac{pC}{x} = 0, \qquad -\frac{dC}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{p\nu}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty} C(x, p) = 0 \tag{5}$$

Решение уравнения (5), ограниченное на бесконечности, имеет вид [2]

$$C(x, p) = A\sqrt{x}K_1(2\sqrt{px}), \quad \text{или} \quad C(x, p) = \frac{\nu\sqrt{p}}{2K_0(2\sqrt{p})}\sqrt{x}K_1(2\sqrt{px}) \tag{6}$$

Здесь $K_0(2\sqrt{p})$, $K_1(2\sqrt{px})$ — модифицированные функции Бесселя второго рода нулевого и первого порядка; постоянная A определяется из первого граничного условия (5). При помощи формулы обращения из (6) имеем

$$c(x,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\nu\sqrt{x}}{2\sqrt{p}}\,\frac{K_1(2\sqrt{px})}{K_0(2\sqrt{p})}\,e^{p\tau}\,dp \tag{7}$$

Подынтегральная функция имеет одну особую точку $p = 0$. Если ввести контур (фиг. 1) типа Ханкеля [3], то он не включит в себя особых точек, и при обходе по этому контуру интеграл будет равен нулю. При стремлении радиуса R контура к бесконечности интегралы по дугам D и E равны нулю. Так как вычет подынтегральной функции в точке $p = 0$ равен нулю, то интеграл при обходе малой окружности ε равен нулю. С учетом сказанного интеграл (7) по прямой, параллельной мнимой оси, выражается через интегралы по нижнему и верхнему краям разреза вдоль отрицательной действительной оси. После перехода к действительной переменной концентрация будет описываться формулой

$$c(x, \tau) = \frac{\nu\sqrt{x}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{J_1(2\sqrt{\rho x})\,Y_0(2\sqrt{\rho}) - Y_1(2\sqrt{\rho x})\,J_0(2\sqrt{\rho})}{J_0^2(2\sqrt{\rho}) + Y_0^2(2\sqrt{\rho})}\,\frac{e^{-\rho\tau}}{\sqrt{\rho}}\,d\rho \qquad (8)$$

где $J_0(2\sqrt{\rho})$, $J_1(2\sqrt{\rho x})$, $Y_0(2\sqrt{\rho})$ и $Y_1(2\sqrt{\rho x})$ — функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядка. Формула (8) для случая $z = 0$ $(x = 1)$ принимает вид

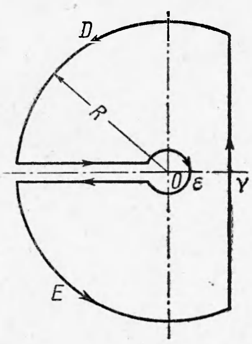
$$c_1(0, t) = \frac{\nu}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\rho\nu^2 Kt}}{J_0^2(2\sqrt{\rho}) + Y_0^2(2\sqrt{\rho})}\,\frac{d\rho}{\rho} \qquad \left(u = 2\sqrt{\rho},\quad t_1 = \frac{\nu^2 Kt}{4}\right) \qquad (9)$$

или

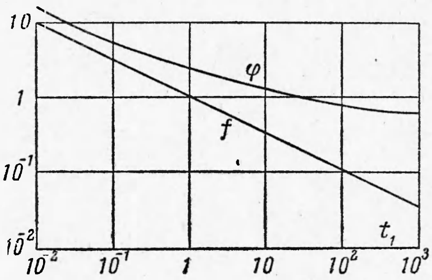
$$c_2(0, t_1) = \frac{\nu}{2\pi}\,\varphi(t_1), \qquad \varphi(t_1) = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2 t_1}}{J_0^2(u) + Y_0^2(u)}\,\frac{du}{u} \qquad (10)$$

Функция $\varphi(t_1)$ табулирована [4], ее график приведен на фиг. 2.

Условия рассмотренной задачи реализуются, например, в море. В верхнем слое моря коэффициент вертикальной турбулентной диффузии, возбуждаемой ветром, затухает с глубиной приблизительно экспоненциально. Однако расчеты концентрации при вертикальной турбулентной диффузии примеси в море обычно ведутся с использованием коэффициента диффузии, не зависящего от глубины.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для постоянного коэффициента диффузии $K(z) = K$ решение задачи приводит к следующим формулам [5]:

$$c_1(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}}\exp\left(-\frac{z^2}{4Kt}\right), \qquad c_2(0, t_1) = \frac{\nu}{4\sqrt{\pi}}\,f(t_1), \qquad f(t_1) = \frac{1}{\sqrt{t_1}} \qquad (11)$$

Здесь безразмерное время t_1 по формуле (10); функция $f(t_1)$ — аналог функции $\varphi(t_1)$, также дана на фиг. 2. Эти функции характеризуют снижение концентрации примеси в поверхностном слое $z = 0$ с течением времени. Формула (10) дает замедление интенсивности снижения концентрации примеси с течением времени, что соответствует явлению насыщения; формула (11) такого замедления не дает.

Поступила 10 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С. Полуэмпирическая теория турбулентной диффузии. Тр. Геофиз. ин-та, 1956, № 33.
2. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, 1959.
3. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Гостехтеоретиздат, 1951.
4. Jaeger J. C. and Clarke M. A. Short Table of... Proc. Roy. Soc. Edinb., 1942—1943, (A), 61.
5. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.