УДК 517.95

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОТОКИ НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Н. Монахов, М. И. Жидкова*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
* Дальневосточная академия государственной службы, 680682 Хабаровск
E-mail: monakhov@hydro.nsc.ru

Работа посвящена теоретическому анализу процесса переноса реагирующих примесей открытыми и фильтрационными потоками вязкой несжимаемой жидкости. В первом разделе работы исследуется хорошо зарекомендовавшая себя в метеорологии и океанологии модель неоднородной вязкой несжимаемой жидкости, в которой дополнительно учитываются силы сопротивления магнитного поля или пористой среды. Другим объектом исследования в работе является предложенная В. Н. Монаховым (1977) модель фильтрации неоднородной несжимаемой жидкости в пористых средах (раздел 2). В обеих моделях гидродинамические потоки определяют движение смеси в целом, а распределения температуры и концентраций компонент неоднородной жидкости описываются общей нелинейной системой уравнений диффузионного тепломассопереноса.

Ключевые слова: вязкая жидкость, примеси, температура, теоремы существования.

1. Диффузионная модель неоднородной вязкой несжимаемой жидкости. 1.1. *Уравнения модели.* Для описания плоских течений неоднородной жидкости привлекаются следующие уравнения типа Навье — Стокса для вектора скорости $\boldsymbol{u}$, давления p и плотности ρ смеси [1]:

$$\rho\Big(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - \gamma\boldsymbol{u}\Big) - \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \rho\boldsymbol{f}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0; \qquad \frac{d\rho}{dt} = 0, \tag{1}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)$; $\mu = \mathrm{const} > 0$ — динамическая вязкость; $\rho\boldsymbol{f}$ — вектор внешних сил. Последнее уравнение в (1) является условием несжимаемости жидкости, а соотношение $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$ — следствием этого условия и уравнения $\rho_t + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{u} = 0$ неразрывности потока.

Слагаемое $\rho\gamma\boldsymbol{u}$ в (1) моделирует силу сопротивления магнитного поля [2, с. 232] или пористой среды (модель Жуковского [3, с. 23]). Коэффициент $\gamma = \gamma(x,\boldsymbol{s})$ является заданной функцией координат $x = (x_1, x_2)$ и вектора $\boldsymbol{s} = (s_0,\ldots,s_m)$, компоненты которого — температура s_0 и концентрации компонент смеси — $s_i = \rho_i/\rho$, $i = \overline{1,m}$ (ρ_i — плотности компонент).

Нелинейные уравнения конвективной диффузии для $\boldsymbol{s} = (s_0,\ldots,s_m)$ имеют вид [4, 5]

$$\rho\,\frac{ds_i}{dt} - \nabla\cdot\sum_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\nabla s_j = h_i(x,\rho,\boldsymbol{s}), \qquad i = \overline{0,m}. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00645).

Здесь h_i, $i=\overline{1,m}$ — скорости химических реакций; $h_0=\sum\limits_{i=1}^{m}c_ih_i$ — потенциал источников тепла; $\boldsymbol{q}_i=-\sum\limits_{j=0}^{m}\lambda_{ij}\nabla s_j$, $i=\overline{0,m}$ — диффузионные потоки [5]. Часто h_i, $i=\overline{1,m}$ представляются в дивергентной форме через химические потенциалы φ_i: $h_i=\nabla\cdot\varphi_i$ [4, 5].

Отметим, что при $\gamma\equiv 0$ и $\partial\boldsymbol{f}/\partial s_i=0$ уравнения диффузии (2) отделены от системы (1) и решаются после нахождения скорости $\boldsymbol{u}$, плотности ρ и давления p.

Согласно [5] матрица диффузии $D=\{\lambda_{ij}\}$, $(i,j)=\overline{1,m}$ должна подчиняться физически обоснованному равенству $\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{q}_i=0$ $(\det D=0)$. Условия химического равновесия процесса диффузии приводят к соотношению $\sum\limits_{i=1}^{m}h_i=0$ [4]. Поскольку при $s_k\ll 1$ влияние остальных компонент s_l, $l\neq k$ на процесс распространения k-й примеси пренебрежимо мало, $(\lambda_{ij},h_i)|_{s_k=0}=0$, $i\neq j$, $k=\overline{1,m}$.

Итак, коэффициенты (λ_{ij},h_i) уравнений (2) подчиняются предположениям: (i) $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_{ij}=\lambda_{ij}\big|_{s_k=0}=0$, $j\neq i$; $\sum\limits_{i=1}^{m}h_i=h_l\big|_{s_k=0}=0$, $(l,k)=\overline{1,m}$. Как будет показано позднее, условия (i) обеспечивают справедливость необходимого соотношения $\sum\limits_{i=1}^{m}s_i=1$. Кроме того, первое условие (i) позволяет после определения решения $\boldsymbol{s}(x,t)$ системы (2) найти скорости $\boldsymbol{u}_i$ компонент смеси по формулам [4]: $\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q}_i\rho_i^{-1}$, $i=\overline{1,m}$. Указанные свойства являются достоинствами принятого вида (i) диффузионных потоков. Применяемый часто упрощенный вид диффузионных потоков в форме законов Фика $(-\boldsymbol{q}_i=d_i\nabla s_i,\ i=\overline{1,m})$, вообще говоря, не обеспечивает выполнения соотношения $\sum\limits_{i=1}^{m}s_i=1$ за исключением случая $d_i=d$, $i=\overline{1,m}$, как это имеет место для бинарной смеси [4, 5].

В этой работе требуется выполнение следующих дополнительных условий: (ii) расширенная матрица диффузии $D_0(\delta)=\{\lambda_{ij}\}$, $(i,j)=\overline{0,m}$ является квазитреугольной, т. е. $\sup|\lambda_{ij}|=\delta\ll 1$ при $j>i$, $\lambda_{ii}\geqslant d>0$, $i=\overline{0,m-1}$, причем $\lambda_{mj}=-\lambda_{m-1m-1}$, $j=\overline{1,m-1}$.

Согласно этим условиям матрица $D_0(0)$ треугольная. Б. В. Боярским [6] доказано, что стационарный процесс диффузии с общей регулярной матрицей диффузии $D_0=\{\lambda_{ij}\}$, $(i,j)=\overline{0,m}$ может быть приведен к диффузионной модели с квазитреугольной матрицей $D_0(\delta)=R_\delta D_0R_\delta^{-1}$ $\forall\delta\ll 1$, где R_δ — обратимая матрица. Поэтому в стационарном случае условия (ii) можно считать выполненными автоматически.

1.2. *Начально-краевая задача.* Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ — область с гладкой границей $\partial\Omega\subset C^{2+\alpha}$, $\alpha>0$, $Q=\Omega\times(0,T)$, (γ_i^1,γ_i^2) $(i=\overline{1,l})$ — смежные дуги на $\partial\Omega$, $\Gamma_i^k=\gamma_i^k\times(0,T)$ $(k=1,2,\ i=\overline{1,l})$, $\Gamma^k=\cup_1^l\Gamma_i^k$, $\Omega_0=\{x\in\Omega,\ t=0\}$, $\partial_0Q=\Gamma\cup\Omega_0$, $\Gamma=\Gamma^1\cup\Gamma^2$, $\Gamma_0=\Gamma\cap\Omega_0$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{U})_{\partial_0Q}=(\rho-\rho^0)_{\Omega_0}=0;\qquad \boldsymbol{U}\big|_\Gamma=(\nabla\cdot\boldsymbol{U})_Q=0;\tag{3}$$

$$(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{S})_{\Omega_0\cup\Gamma^1}=(\nabla s_k\cdot\boldsymbol{n}-G_k)_{\Gamma^2}=0,\qquad k=\overline{0,m}.\tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{U}(x,t)$, $\boldsymbol{S}(x,t)$, $\boldsymbol{G}(x,t,\rho,\boldsymbol{s})=(G_0,\dots,G_m)$ — продолжения в Q векторов, заданных на $\partial_0 Q$, причем по физическому смыслу имеем $S_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,m}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} S_i = 1$; $0 < r^0 \leqslant \rho^0(x) \leqslant r^1 < \infty$, $x \in \Omega$.

Предполагается, что векторы $(\gamma, \lambda_{ij}, h_i, \boldsymbol{f})(x, \boldsymbol{s})$ коэффициентов уравнений (1), (2) и граничных функций $(\rho^0, \rho^0_t, \nabla\rho^0)(x)$, $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{S})(x,t)$, $\boldsymbol{G}(x,t,\rho,\boldsymbol{s})$ в (3), (4) равномерно непрерывны по Гельдеру относительно всех аргументов:

$$\|(\gamma, \lambda_{ij}, \nabla\lambda_{ij}, h_i, \rho^0, \rho^0_t, \nabla\rho^0, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{G})\|_{C^\alpha(E)} = M, \qquad \alpha > 0, \tag{5}$$

где $E = \{(x,t) \in Q,\ \rho \in (r^0, r^1),\ s_0 \in (\theta^0, \theta^1),\ s_k \in (0,1),\ k = \overline{1,m}\,\}$, θ^k, $k = 0, 1$ — заданные постоянные.

Отметим, что предположения (5) обеспечивают, в частности, выполнение для задачи (1)–(4) условий согласования нулевого порядка. Дополнительно к предположениям (i) о коэффициентах (2), потребуем выполнения следующих соотношений для граничных функций в (4):

$$\sum_{k=1}^{m} G_k\big|_{\Gamma^2} = G_i\big|_{s_j=0} = 0, \qquad (i,j) = \overline{1,m}. \tag{6}$$

1.3. *Регуляризованная задача.* Продолжим векторы $(\gamma, \lambda_{ij}, h_k, \boldsymbol{f})$ коэффициентов уравнений (1), (2) и $(\rho^0, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{G})$ граничных функций в (3), (4), заданные на множестве $E = Q \times (r^0, r^1) \times (\theta^0, \theta^1) \times (0,1)^m$, на все пространство $\mathbb{R}^n$, $n = m + 5$: по переменным $(\rho, \boldsymbol{s})$ крайними значениями их компонент, а по (x,t) — с сохранением гладкости до финитных при $|(x,t)| \gg 1$ функций.

Введем операцию стекловского усреднения функций $f(y), y \in \mathbb{R}^n$ $(n \leqslant m+5)$:

$$f(y,\varepsilon) = \varepsilon^{-n} \int\limits_{|z-y|<\varepsilon} \omega(|z-y|\varepsilon^{-1}) f(z)\,dz \equiv R^n_\varepsilon(f \mid y), \qquad \varepsilon > 0,$$

где $\omega(\xi)$ — гладкая функция (ядро усреднения), равная нулю при $\xi \geqslant 1$ и $\int\limits_{|\xi|<1} \omega(\xi)\,d\xi = 1$; $R^n_\varepsilon(f \mid y)$ — линейный по f оператор сглаживания, $y = (x, t, \rho, s_0, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^n$, $n = m + 5$. Коэффициент $\gamma = \gamma[x, \boldsymbol{s}(x,t)]$ в (1) рассматривается как сложная функция, продолженная по (x,t) в $\mathbb{R}^3$, по $\boldsymbol{s}$ в $\mathbb{R}^{m+1}$, и полагается $\gamma(x,t,\varepsilon) = R^3_\varepsilon\gamma[x, \boldsymbol{s}(x,t)]$. В уравнении (2) к продолженным в $\mathbb{R}^3$ коэффициентам $\rho(x,t)$ и $\boldsymbol{u}(x,t)$ также применяется операция усреднения: $\rho(x,t,\varepsilon) = R^3_\varepsilon(\rho)$, $\boldsymbol{u}(x,t,\varepsilon) = R^3_\varepsilon(\boldsymbol{u})$. Отметим, что в силу линейности оператора сглаживания $R^n_\varepsilon(f)$ свойства (i) матрицы диффузии $D = \{\lambda_{ij}\}$, $(i,j) = \overline{1,m}$ сохраняются и для $D(\varepsilon) = \{R^n_\varepsilon(\lambda_{ij})\}$. Окончательно завершим регуляризацию задачи (1)–(4) изменением диагональных элементов в $D(\varepsilon)$, полагая

$$\lambda_{ii}(y,\varepsilon) = R^n_\varepsilon(\lambda_{ii}) + \varepsilon, \qquad i = \overline{1,m}.$$

Тогда в (i) будем иметь $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{ij}(y,\varepsilon) = \varepsilon$, $i \neq j$ и измененные таким образом предположения (i) обозначим через $(\mathrm{i})_\varepsilon$. Условимся аргумент ε в коэффициентах регуляризованной задачи (1)–(4) опускать, считая их достаточно гладкими функциями.

Докажем сначала разрешимость регуляризованной задачи (2), (4) для $\boldsymbol{s}$, предполагая пока, что одно из множеств Γ^1 или Γ^2 пусто, т. е. (4) — либо первая ($\Gamma^2 = \varnothing$), либо вторая ($\Gamma^1 = \varnothing$) начально-краевые задачи. Тогда, рассматривая последовательно уравнения (2) для $s_k(x,t)$ и, учитывая квазитреугольность расширенной матрицы диффузии $D_0 = \{\lambda_{ij}\}$,

$(i,j)=\overline{0,m}$ (предположения (ii)) за счет выбора малого параметра $\delta \ll 1$, получим шаудеровские оценки для $\boldsymbol{s}(x,t)$ в пространстве $H^{2+\alpha}(Q)=C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x,t}(Q)$ [8, с. 364]

$$|\boldsymbol{s}|^{(2+\alpha)}_{Q} \equiv \|\boldsymbol{s}\|_{H^{2+\alpha}(Q)} \leqslant M(\varepsilon). \tag{7}$$

В общем случае при $\Gamma^k \neq \emptyset$, $k=1,2$ оценка (7) принимает вид

$$|\boldsymbol{s}|^{(2+\alpha)}_{Q_\tau} \leqslant M(\varepsilon,\tau), \qquad Q_\tau = Q\backslash \mathcal{O}_\tau(\Gamma^1\cap\Gamma^2), \tag{8}$$

где $\mathcal{O}_\tau$ — τ-окрестность линий $\Gamma^1\cap\Gamma^2$ сопряжения граничных условий в (4).

Подставим решение $\boldsymbol{s}(x,t)$ регуляризованной задачи (2), (4) в коэффициент $\gamma(x,\boldsymbol{s})$ уравнения (1) и рассмотрим регуляризованную задачу (1), (3). Для решения $(\boldsymbol{u},p,\rho)$ этой задачи получим

$$|\boldsymbol{u}|^{(2+\alpha)}_{Q} + |\nabla p|^{(\alpha)}_{Q} + |\rho|^{(1)}_{Q} \leqslant M_0(\varepsilon), \qquad |(\rho,\rho_t,\nabla\rho)|^{(\alpha)}_{Q} \leqslant M_0. \tag{9}$$

Первая из оценок (9) непосредственно доказана в [1, с. 133], а вторая установлена там же в более слабой форме: $\rho(x,t)\in C^1(Q)$. Гельдеровская непрерывность функций $(\rho_t,\rho_{x_1},\rho_{x_2})$ следует из приведенных в [1, с. 130] рассуждений относительно функции $\rho(x,t)$. Оценки (7)–(9) позволяют с помощью теоремы Шаудера доказать существование решения $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{u},p,\rho)$ регуляризованной задачи (1)–(4).

Поскольку функции $s_k(x,t)$, $k=\overline{1,m}$ по физическому смыслу являются концентрациями компонент неоднородной жидкости, для них должны выполняться следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{m} s_k(x,t)=1; \qquad 0\leqslant s_k(x,t)\leqslant 1, \quad k=\overline{1,m}. \tag{10}$$

Для доказательства (10) сложим обе части уравнений (2) относительно $s_k(x,t)$, $k=\overline{1,m}$ и, учитывая условия $(\mathrm{i})_\varepsilon$, получим параболическое уравнение $\rho\, ds/dt=\varepsilon\Delta s$ для суммы концентраций $s=\sum\limits_{k=1}^{m} s_k$. Так как $s|_{\Omega_0\cup\Gamma^1}=1$ и $\nabla s\cdot\boldsymbol{n}|_{\Gamma^2}=0$ (условия (6)), то согласно принципу максимума $s(x,t)=1$, $(x,t)\in Q$. Тогда в силу равенства $\sum\limits_{k=1}^{m-1} s_k = 1-s_m$ уравнение (2) для $s_m(x,t)$ представляется в виде

$$\rho\,\frac{ds_m}{dt} - \nabla\cdot\Big(\sum_{j=0}^{m}\bar\lambda_{mj}\nabla s_j\Big) = h_m,$$

где $\bar\lambda_{m0}=\lambda_{m0}$, $\bar\lambda_{mj}=0$, $j=\overline{1,m-1}$, $\bar\lambda_m=\lambda_{m-1}-\sum\limits_{k=1}^{m-1}\lambda_{km}$, т. е. формально в (2) можно положить $\lambda_m=\lambda_{m-1}$. Продолжим коэффициенты λ_{ij}, h_i, $(i,j)=\overline{1,m}$ при $s_k\leqslant 0$, $k=\overline{1,m}$ их крайними значениями:

$$(\lambda_{ij},h_i)\big|_{s_k<0}=0, \quad i\neq j, \qquad \lambda_{ii}\big|_{s_k<0}=\lambda_{ii}(x,0).$$

Предполагая, что в некоторой внутренней точке $(x_k,t_k)\in Q$ достигается $\min s_k(x,t)<0$, $k=\overline{1,m}$, приходим к противоречию с принципом максимума, так как в окрестности этой точки уравнение для $s_k(x,t)$ однородно относительно производных: $\rho\, ds_k/dt - \nabla\cdot(\lambda_k\nabla s_k)=0$.

Итак, справедливость соотношений (10) установлена.

1.4. *Теорема существования.* Для решения $(\boldsymbol{u}, p, \rho, \boldsymbol{s})$ регуляризованной задачи (1)–(4) установим справедливость оценок вида (7)–(9) с постоянными, не зависящими от параметра регуляризации ε.

Определим следующие пространства функций $\boldsymbol{v}(x,t)$, $(x,t) \in Q$ и норму в них:

$$B^{k,k+1}(Q) = L_\infty(0,T; J^k(\Omega)) \cap L_2(0,T; J^{k+1}), \qquad k = 0, 1,$$

$$J^k(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in W_2^k(\Omega), \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0\}, \qquad k = 0, 1, 2 \quad (W_2^0 \equiv L_2),$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_Q^{(k,k+1)} = \sup \|\boldsymbol{v}\|_\Omega^{(k)} + \int\limits_0^T (\|\boldsymbol{v}\|_\Omega^{(k+1)})^2\,dt, \qquad k = 0, 1,$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_\Omega^{(k)} = \|\boldsymbol{v}\|_{W_2^k(\Omega)}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Для других пространств примем стандартные обозначения норм из [1, 8].

В книге [1, гл. III] для решения задачи (1), (3) при $\gamma = 0$ доказаны следующие оценки, справедливые и в случае $0 \leqslant \gamma \leqslant M_0 < \infty$:

$$\|\boldsymbol{u}\|_Q^{(1,2)} \leqslant M, \qquad \|(\nabla p, \boldsymbol{u}_t)\|_{2,Q} \leqslant M, \qquad |\rho|_Q^{(\beta)} \leqslant M, \qquad \beta > 0, \tag{11}$$

где постоянная M в (11) зависит от $\|\boldsymbol{U}\|_Q^{(1,2)}$, $\|\boldsymbol{U}_t\|_{2,Q}$, $\|\rho^0\|_{C^1(\Omega)}$, $\|\boldsymbol{f}\|_{2,Q}$ и $\sup|\gamma|$.

Обратимся теперь к задаче (2), (4) для вектора $\boldsymbol{s}(x,t)$ и рассмотрим сначала случай, когда $\Gamma^2 = \varnothing$ или $\Gamma^1 = \varnothing$. Известные результаты для первой и второй начально-краевых задач (2), (4) приводят к следующим оценкам [8, с. 364]:

$$|\boldsymbol{s}|_Q^{(\alpha)} \leqslant M_1, \qquad \|\boldsymbol{s}\|_{q,Q}^{(2)} \leqslant M_1, \qquad \alpha > 0, \qquad q > 2, \tag{12}$$

где $\|\cdot\|_{q,Q}^{(2)} = \|\cdot\|_{W_q^{2,1}(Q)}$, а постоянная M_1 зависит от M_0 в (10), $\|\boldsymbol{S}, \boldsymbol{G}\|_Q^{(2)}$, $\sup|h_k|$.

Вторая оценка в (12) получается стандартным методом разбиения единицы и рассмотрением уравнений для $s_i(x,t)$ с "замороженными" коэффициентами $\lambda_{ii}(x_k, t_k)$, $(x_k, t_k) \in Q_k$, $Q_k \subset Q$ — элементарный объем [1, с. 234, 235].

Возвращаясь к задаче (1), (3) с функциями $\boldsymbol{f}[x, t, \boldsymbol{s}(x,t)]$, $\gamma[x, \boldsymbol{s}(x,t)] \in H^\alpha(Q) \equiv C^{\alpha,\alpha/2}(Q)$, приходим к оценкам [1, с. 132]

$$|\boldsymbol{u}|_Q^{(2+\alpha)} + |\nabla p|_Q^{(\alpha)} + |\rho|_Q^{(1+\alpha)} \leqslant M_2, \tag{13}$$

где M_2 зависит от M_1 в (12), $|\boldsymbol{U}|_Q^{(2+\alpha)}$, $|\rho^0|_\Omega^{(1+\alpha)}$, $|\boldsymbol{f}|_Q^{(\alpha)}$. В силу (13) для задачи (2), (4) получим

$$|\boldsymbol{s}|_Q^{(2+\alpha)} \leqslant M_3, \tag{14}$$

причем M_3 является функцией от M_2, $|\boldsymbol{S}, \boldsymbol{G}|_Q^{(2+\alpha)}$.

В общем случае, когда $\Gamma^k \neq \varnothing$, $k = 1, 2$, т. е. (2), (4) — смешанная начально-краевая задача, аналогично 1.3 находим

$$|\boldsymbol{s}|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)} \leqslant M_5(\tau), \qquad Q_\tau = Q \backslash \mathcal{O}_\tau(\Gamma^1 \cap \Gamma^2), \tag{15}$$

откуда для $(\boldsymbol{u}, p, \rho)$ следует оценка

$$|\boldsymbol{u}|^{(2+\alpha)}_{Q_\tau} + |(\nabla p, \rho_t, \nabla\rho)|^{(\alpha)}_{Q_\tau} \leqslant M_6(\tau). \tag{16}$$

Предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ по параметру регуляризации ε приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* (i), (ii), (5), (6). *Тогда если* $\Gamma^2 = \varnothing$ *или* $\Gamma^1 = \varnothing$, *то существует классическое решение* $(\boldsymbol{u}, p, \rho, \boldsymbol{s}) \in H^{2+\alpha} \times H^\alpha \times H^{1+\alpha} \times H^{2+\alpha}$ *задачи* (1)–(4). *Если* $\Gamma^k \neq \varnothing$, $k = 1, 2$, *то решение задачи* (1)–(4) *также существует, причем* $\boldsymbol{u} \in B^{1,2}(Q) \cap H^{2+\alpha}(Q_\tau)$, $\nabla p \in H^\alpha(Q)$, $\rho \in H^\alpha(Q) \cap H^{1+\alpha}(Q_\tau)$, $\boldsymbol{s} \in H^{2+\alpha}(Q_\tau)$, $\alpha > 0$.

2. Фильтрация неоднородной несжимаемой жидкости в пористой среде. 2.1. *Постановка задачи.* Для описания процесса плановой фильтрации воспользуемся предложенной в [3, 7] моделью

$$-\boldsymbol{u} = K\nabla p, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0; \qquad \sigma\rho_t + \boldsymbol{u}\nabla\rho = 0. \tag{17}$$

Здесь $K(x, \boldsymbol{s}) = K_0(x)\mu^{-1}(\boldsymbol{s})$; K_0 — положительно определенный тензор фильтрации; $\mu = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^m s_i \ln\mu_i\Big)$; $\mu_i(\boldsymbol{s})$ — динамические вязкости компонент; $\sigma(x)$ — коэффициент пористости. Как и в системе (1), последнее равенство является условием несжимаемости смеси, соотношение $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$ — следствием этого условия и уравнения $\sigma\rho_t + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0$ неразрывности потока. Первое соотношение в (17) — обобщенный закон Дарси. Температура s_0 и концентрации $s_i = \rho_i/\rho$, $i = \overline{1, m}$ компонент смеси удовлетворяют уравнениям (2), коэффициенты которых подчиняются предположениям (i), (ii).

Кривая $\partial\Omega$ разбивается на смежные дуги l_i^1, l_i^2, $i = \overline{1, n}$ и соответственно этому поверхность цилиндра $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T)$ состоит из множеств $\Lambda^k = \cup_1^n l_i^k \times (0, T)$, $k = 1, 2$, $\Gamma = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$, причем, вообще говоря, Λ^k не совпадают с Γ^k в (4). Граничные условия (4) для вектора $\boldsymbol{s}$ сохраняются, а условия (3) для $(\boldsymbol{u}, p, \rho)$ заменяются на следующие:

$$p\big|_{\Lambda^1} = p_0, \qquad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\Lambda^2} = -U; \qquad (\rho - \rho^0)_{\partial\Omega} = 0. \tag{18}$$

Если $\Lambda^1 = \varnothing$, то дополнительно потребуем, чтобы $\displaystyle\int\limits_\Gamma p\,dx\,dt = \int\limits_\Gamma U\,dx\,dt = 0$.

2.2. *Разрешимость фильтрационной задачи.* Применим к задаче (2), (4) для вектора $\boldsymbol{s}(x, t)$ регуляризацию пункта 1.3 и произведем стекловское усреднение продолженных коэффициентов (K, ρ, σ) уравнений (17) и граничных функций (p_0, ρ^0, U) в (18). Классическая разрешимость регуляризованной совместной задачи (2), (4), (17), (18) следует согласно теореме Шаудера из справедливости для ее решений $(\boldsymbol{s}, \rho, p)$ оценок

$$|\boldsymbol{s}|^{(2+\alpha)}_{Q_\tau} \leqslant M(\varepsilon), \qquad |\rho|^{(1+\alpha)}_{Q^\tau} \leqslant M(\varepsilon), \qquad |p|^{(2+\alpha)}_{Q^\tau} \leqslant M(\varepsilon), \tag{19}$$

где $Q^\tau = Q \setminus Q^\tau(\Lambda^1 \cap \Lambda^2)$; Q^τ — τ-окрестность $\Lambda^1 \cap \Lambda^2$; $Q_\tau = Q \setminus O_\tau(\Gamma^1 \cap \Gamma^2)$.

Если Λ^1 или Λ^2 пусты, то в (19) $Q_\tau = Q$. Первая и вторая оценки (19) совпадают соответственно с (15) и (16), а третья установлена в [1, с. 239].

Для доказательства равномерных относительно ε оценок вида (19) рассмотрим сначала регуляризованную задачу (17), (18) для $(\boldsymbol{u}, p, \rho)$.

Пусть $\partial\Omega \subset C_*^{2+\alpha}$ [1, с. 231], т. е. в каждой точке x, не принадлежащей $\Lambda^1 \cap \Lambda^2$, граница локально распрямляема, а в окрестности точек $x \in \Lambda^1 \cap \Lambda^2$ она локально отображается на прямой угол. Предположим

$$\ln(K\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) + |\ln(\sigma, \rho^0)|^{(\alpha)}_\Omega + \|(D^1 p_0, U)\|_{q,\partial\Omega} \leqslant N_1 < \infty, \tag{20}$$

где $|\boldsymbol{\xi}| = 1$, $q > 2$, D^k — производные вдоль $\partial\Omega$. Тогда согласно [1, с. 260] имеем

$$\|\nabla p\|_{q,\Omega} + |p|_{\Omega}^{(\alpha)} \leqslant N_2(N_1), \qquad (q, \alpha) > 0; \qquad |\ln \rho| \leqslant N_1. \tag{21}$$

Обращаясь теперь к задаче (2), (4) для $\boldsymbol{s}$, аналогично 1.4 находим

$$\|\boldsymbol{s}\|_{q,Q_\tau}^{(1,0)} + |\boldsymbol{s}|_{Q_\tau}^{(\alpha)} \leqslant N_3(N_2) \qquad (q > 2,\ \alpha > 0), \tag{22}$$

при этом если Γ^1 или Γ^2 пусты, то $Q_\tau = Q$.

Пусть дополнительно к (19) выполняется неравенство:

$$|(K_x, K_{s_0}, \dots, K_{s_m})| + \|(D^2 p_0, D^1 U)\|_{q,\partial\Omega} + |(\sigma, \nabla\rho^0)|_{\Omega}^{\alpha} \leqslant N_4, \tag{23}$$

где $q > 2$, $\alpha > 0$. Оценки (21), (22) позволяют поднять гладкость решения задачи (17), (18):

$$\|\boldsymbol{u}\|_{q,\Omega}^{(1)} + |\boldsymbol{u}|_{Q_\tau}^{(\alpha)} + |\rho|_{Q_\tau}^{(\alpha)} \leqslant N_5(N_4) \qquad (q > 2,\ \alpha > 0), \tag{24}$$

причем $Q_\tau = Q$, если одно из Γ^k, $k = 1, 2$ пусто. Неравенства (24) для $\boldsymbol{u}(x,t)$ установлены в [1, с. 236], для $\rho(x,t)$ — в [1, гл. III]. Учитывая (24) для решения $\boldsymbol{s}(x,t)$ задачи (2), (4), приходим к оценкам вида (19) с постоянной, не зависящей от ε:

$$|\boldsymbol{s}|_{Q_\tau}^{(2+\alpha)} \leqslant N_6, \qquad \alpha > 0, \tag{25}$$

где $Q_\tau = Q$, если $\Gamma^1 = \varnothing$ или $\Gamma^2 = \varnothing$.

Для произвольных функций $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\varphi|_{\Lambda^1} = 0$ и $\psi(x,t) \in W_2^1(Q)$, $\psi|_{\partial Q} = 0$ введем интегральные тождества

$$(\boldsymbol{u}, \nabla\varphi)_\Omega = (U, \varphi)_{\Lambda^2}; \qquad (\sigma\rho, \psi_t)_Q + (\boldsymbol{u}\rho, \nabla\psi)_Q = 0, \tag{26}$$

где $(f, g)_E = \displaystyle\int_E fg\,dE$.

Предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ в задаче (2),(4) для $\boldsymbol{s}(x,t,\varepsilon)$ и в интегральных тождествах (26) для $\boldsymbol{u}(x,t,\varepsilon)$, $\rho(x,t,\varepsilon)$ приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* (i), (ii), (5), (6) *для задачи* (2), (4) *и* (19), (23) *для задачи* (17), (18). *Тогда совместная задача* (2), (4), (17), (18), *описывающая процесс фильтрации вязкой неоднородной несжимаемой жидкости в пористых средах, имеет по крайней мере одно решение* $(\boldsymbol{u}, \rho, \boldsymbol{s})$, *удовлетворяющее равенствам* (2), (4) *для* $\boldsymbol{s}$, *интегральным тождествам* (26) *и условиям* $(p - p_0)_{\Lambda^1} = (\rho - \rho^0)_\Omega = 0$ *для* $(\boldsymbol{u}, \rho)$. *При этом* $\boldsymbol{u}(x,t) \in L_\infty[0, T; W_q^1(\Omega)] \cap H^\alpha(Q_\tau)$, $\rho(x,t) \in H^\alpha(Q_\tau)$, $\boldsymbol{s}(x,t) \in H^{2+\alpha}(Q_\tau)$, $q > 2$, $\alpha > 0$. *Если* $\Gamma^1 = \varnothing$ *или* $\Gamma^2 = \varnothing$, *то* $Q_\tau = Q$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
2. **Бай Ши-и.** Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М.: Мир, 1964.
3. **Жумагулов Б. Т., Монахов В. Н.** Гидродинамика нефтедобычи. Алма-Ата: Гылым, 2001.
4. **Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н.** Газовая динамика. М.: Высш. шк., 1965.
5. **Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.** Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

6. **Боярский Б. В.** Теория обобщенного аналитического вектора // Ann. Pol. Math. 1966. V. 16. P. 281–320.
7. **Монахов В. Н.** Математическая модель фильтрации неоднородной жидкости // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 94. С. 64–71.
8. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 29/IV 2004 г.,
в окончательном варианте — 21/IX 2004 г.