СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ГЕОЛОГИЯ И ГЕОФИЗИКА

Геология и геофизика, 2009, т. 50, № 6, с. 735—744 **http://www.izdatgeo.ru**

ГЕОФИЗИКА

УДК 532.7:537.3:550.372

ЭЛЕКТРОМАГНИТОАКУСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ И ζ-ПОТЕНЦИАЛА

В.Н. Доровский, С.В. Доровский

BAKER HUGHES 2001, Rankin Road
P.O. Box 1407 (77251-1407) Houston, TX 77073-5100, USA

Строится нестационарная теория фильтрации, объединенная с электромагнетизмом на общих физических принципах гидродинамического описания конденсированных сред. На базе линейного варианта теории развивается электромагнитный метод измерения ζ-потенциала проницаемости.

Магнитоакустика, электропроводность, ζ-потенциал.

AN ELECTROMAGNETOACOUSTIC METHOD OF MEASURING ELECTRIC CONDUCTIVITY AND ζ-POTENTIAL

V.N. Dorovsky and S.V. Dorovsky

A nonsteady filtration theory combined with electromagnetism by means of common physical principles of hydrodynamic description of condensed media is constructed. Based on the linear version of the theory, an electromagnetic method for measuring ζ-potential is suggested.

Magnetoacoustics, conductivity, ζ-potential

ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитные методы скважинной диагностики преимущественно направлены на измерение омической проводимости среды, например, индукционными методами электроразведки. Большого внимания заслуживают еще два кинетических параметра пористой среды, насыщенной электролитом: коэффициент межкомпонентного трения и электрокинетическая постоянная. С коэффициентом трения часто связывают проницаемость среды, а с электрокинетической постоянной — ζ-потенциал. Настоящая статья касается измерения ζ-потенциала методами электроразведки, объединенными с магнитоакустическими измерительными устройствами. Для развития измерительных технологий, использующих представление о ζ-потенциале, необходима общая теория, объединяющая электромагнетизм и гидродинамическую теорию нестационарных процессов в пористых, насыщенных электролитами сред. Часто для анализа электрогидродинамических процессов привлекается теория Прайда [Pride, 1994], которая в качестве гидродинамической части теории использует нестационарную теорию Био [Biot, 1956]. Теория Прайда не учитывает эффекты магнитоупругости, линейные кинетические соотношения не выводятся из структуры производства энтропии, как это имеет место в гидродинамической теории конденсированных сред. В свою очередь, теория Био с ее частотной коррекцией Д.Л. Джонсом также не свободна от известных недостатков [Johnson, 1987]. В настоящей статье используется нестационарная теория фильтрации [Dorovsky, 1989; Blokhin, Dorovsky, 1995; Доровский, Доровский, 2006], объединенная с электромагнетизмом на общих физических принципах гидродинамического описания конденсированных сред (см. Приложение). На базе линейного варианта теории развивается электромагнитный метод измерения ζ-потенциала.

ХАРАКТЕРНАЯ ЧАСТОТА В ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОПЕРЕЧНЫХ МОДАХ МАГНИТОЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим поперечные магнитозвуковые колебания в пористой насыщенной электролитом среде с учетом электроакустического эффекта. Уравнения поперечных акустических колебаний пористой насыщенной электролитом среды во внешнем постоянном магнитном поле $\mathbf{B}_0$ получаются линеаризацией системы уравнений, описывающих электромагнитные квазистационарные эффекты в пористых насыщенных электролитами средах (см. Приложение),

$$\ddot{\mathbf{u}} - c_t^2 \Delta \mathbf{u} - a_1 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + a_2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\rho_l^2}{\rho_s} \bar{\chi}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) + \frac{\alpha c_e \rho_l}{4\pi\sigma\rho_s} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{B}} = 0,$$

$$\ddot{\mathbf{v}} - a_4 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + a_3 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1}{4\pi\rho_l} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{B}} \wedge \mathbf{B}_0 - \rho_l \bar{\chi}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) - \frac{\alpha c_e}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{B}} = 0, \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \operatorname{rot}\left[-\frac{c_e^2}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{\alpha c_e \rho_l}{\sigma} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0 \right].$$

При выводе уравнений (1) (см. Приложение) два линейных диссипативных соотношения, определяющих силу трения и плотность электрического тока, принимаются в виде (см. (21))

$$\mathbf{f}^{\partial} = \bar{\chi}(\rho \mathbf{u} - \mathbf{j}) + \frac{\alpha c_e}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \mathbf{j}^e = \alpha(\rho \mathbf{u} - \mathbf{j}) + \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c_e} \wedge \mathbf{B} \right).$$

В уравнениях (1) электропроводность вмещающей матрицы отсутствует, а поляризационные эффекты опускаются. В уравнениях введены обозначения: $\rho = \rho_l + \rho_s$ — плотность среды, ρ_s — парциальная плотность вмещающей матрицы, ρ_l — парциальная плотность жидкости, v — гидродинамическая скорость жидкости, u — скорость движения вмещающей матрицы, B — магнитное поле, σ — электропроводность среды, χ^{∂} — коэффициент трения, α — электроакустическая постоянная, $\bar{\chi} = \chi^{\partial} - \alpha^2/\sigma$, c_e — скорость света, c_t — поперечная скорость звука, $a_{1,2,3,4}$ — коэффициенты, функции двух продольных и одной поперечной скоростей звука пористой насыщенной среды [Blokhin, Dorovsky, 1995].

Для плоской геометрии системы, в которой ось x определяет направление распространения поперечных волн (совпадает с направлением магнитного поля $\mathbf{B}_0$), магнитное поле $\mathbf{B} = (0, B_y, B_z)$, скорости $\mathbf{v} = (0, v_y, v_z)$, $\mathbf{u} = (0, u_y, u_z)$ имеют компоненты в плоскости (y, z), причем переменное магнитное поле $\mathbf{B}$ приложено к поверхности $x = 0$, где также отсутствует касательное силовое воздействие $(\partial u_z / \partial x = 0)$. Уравнения поперечных колебаний в координатной записи имеют вид

$$\ddot{u}_z - c_t^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \varepsilon\bar{\omega}\,(\dot{u}_z - \dot{v}_z) + \frac{\alpha c_e \varepsilon}{4\pi\sigma} \frac{\partial \dot{B}_y}{\partial x} = 0\,, \quad \ddot{v}_z - \frac{B_0}{4\pi\rho_l} \frac{\partial \dot{B}_z}{\partial x} - \bar{\omega}\,(\dot{u}_z - \dot{v}_z) - \frac{\alpha c_e}{4\pi\sigma} \frac{\partial \dot{B}_y}{\partial x} = 0\,,$$

$$\ddot{u}_y - c_t^2 \frac{\partial u_y}{\partial x^2} + \varepsilon\bar{\omega}\,(\dot{u}_y - \dot{v}_y) - \frac{\alpha c_e \varepsilon}{4\pi\sigma} \frac{\partial \dot{B}_z}{\partial x} = 0\,, \quad \ddot{v}_y - \frac{B_0}{4\pi\rho_l} \frac{\partial \dot{B}_y}{\partial x} - \bar{\omega}\,(\dot{u}_y - \dot{v}_y) + \frac{\alpha c_e}{4\pi\sigma} \frac{\partial \dot{B}_z}{\partial x} = 0\,,$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{c_e^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\alpha c_e \rho_l}{\sigma} (u_z - v_z) + v_y B_0 \right],$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{c_e^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\alpha c_e \rho_l}{\sigma} (u_y - v_y) + v_z B_0 \right],$$

в которых $\bar{\omega} = \rho_l \bar{\chi}$, $\varepsilon = \rho_l / \rho_s$. Для спектральных амплитуд

$$(v_y, v_z, u_y, u_z, B_y, B_z) \Rightarrow (v_y, v_z, u_y, u_z, B_y, B_z) \cdot \exp(-i\omega t)$$

не представляет труда построить затухающее (при удалении от границы раздела) решение стандартными методами линейных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{u}_z = \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2^2 - \beta_1^2} \frac{\varepsilon B_0 \bar{\chi}}{4\pi\omega^2} \frac{\left(\beta_2 e^{-\beta_1 x} - \beta_1 e^{-\beta_2 x}\right)}{1 + i(1+\varepsilon)\bar{\omega}/\omega} \mathbf{B}_z(\omega),$$

$$\mathbf{u}_y = i \frac{\varepsilon\alpha c_e}{4\pi\sigma\omega} \frac{\beta_1\beta_2}{1 + i(1+\varepsilon)\bar{\omega}/\omega} \frac{\beta_2 e^{-\beta_1 x} - \beta_1 e^{-\beta_2 x}}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \mathbf{B}_z(\omega),$$

$$\mathbf{B}_z = \frac{1 + i\bar{\omega}/\omega}{1 + i(1+\varepsilon)\bar{\omega}/\omega} \frac{c_t^2}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)\omega^2} \left[\left(\beta_1^2 + \frac{\varphi}{c_t^2} \right) \beta_2^2 e^{-\beta_1 x} - \left(\beta_2^2 + \frac{\varphi}{c_t^2} \right) \beta_1^2 e^{-\beta_2 x} \right] \mathbf{B}_z(\omega), \qquad \mathbf{B}_y = 0,$$

$$\varphi = \omega^2\left(1+\frac{i\varepsilon\overline{\omega}/\omega}{1+i\overline{\omega}/\omega}\right).$$

Здесь $\mathbf{B}_z(\omega)$ — спектральная компонента заданного на границе $x = 0$ магнитного поля, $\hat{\omega} = \rho_l\alpha^2/\sigma$, $\omega_* = B_0\overline{\chi}\sigma/c_e\alpha.$ Биквадратное уравнение

$$\beta^4 + \left[\frac{\omega^2}{c_t^2}\left(1+\frac{i\varepsilon\overline{\omega}/\omega}{1+i\overline{\omega}/\omega}\right)+\frac{i\omega}{\alpha_1}-\frac{\theta}{c_t^2\alpha_1}\right]\beta^2 + \frac{i\omega}{\alpha_1}\frac{\omega^2}{c_t^2}\left(1+\frac{i\varepsilon\overline{\omega}/\omega}{1+i\overline{\omega}/\omega}\right)=0, \tag{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{c_e^2}{4\pi\sigma}\cdot\left[1+\frac{i}{1+i\overline{\omega}/\omega}\left(\frac{\hat{\omega}}{\omega}+\frac{\omega_*^2\hat{\omega}}{\omega\overline{\omega}^2}\right)\right],\quad \theta = \frac{c_e^2}{4\pi\sigma}\cdot\left(\frac{\omega_*^2}{\omega^2}-1\right)\frac{i\varepsilon\omega\ \hat{\omega}}{\left(1+i\overline{\omega}/\omega\right)^2}$$

определяет два корня β_1 и β_2 с положительными вещественными частями. Скорости деформаций матрицы на границе $x = 0$ вычисляются согласно приведенным выше формулам

$$\mathbf{u}_z\big|_{x=0} = \frac{\varepsilon\overline{\chi}B_0}{4\pi\omega^2[1+i(1+\varepsilon)\overline{\omega}/\omega]}\ \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\ \mathbf{B}_z(\omega), \tag{3}$$

$$\mathbf{u}_y\big|_{x=0} = -\frac{i\varepsilon c_e\alpha}{4\pi\omega\sigma[1+i(1+\varepsilon)\overline{\omega}/\omega]}\ \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\ \mathbf{B}_z(\omega).$$

Между амплитудами существует связь $\mathbf{u}_z = i\omega_*\omega^{-1}\mathbf{u}_y$. Последнее замечание позволяет сформулировать метод измерения комбинации кинетических коэффициентов $\alpha/\overline{\chi}$. Для измерения $\alpha/\overline{\chi}$ поместим датчик, измеряющий две ортогональных составляющие вектора $\mathbf{u} = (u_y, u_z)$ скоростей матрицы, на поверхности раздела $x = 0$. Изменением частоты внешнего возбуждающего магнитного поля $B_z(\omega)$ добиваемся равенства модулей $|u_y|$ и $|u_z|$. Очевидно, соответствующие модули скоростей (3) сравниваются по величине при частоте возбуждения

$$\omega = \omega_* = \frac{B_0}{c_e}\cdot\frac{\overline{\chi}}{\alpha}\cdot\sigma.$$

Зная B_0 и характерную частоту ω_* (это частота, на которой модули $|u_y|$, $|u_z|$ равны), получаем первую формулу для определения параметров среды

$$\frac{\alpha}{\overline{\chi}}\cdot\sigma = \frac{B_0}{c_e\omega_*}. \tag{4}$$

Одновременно производим измерение скорости матрицы на этой частоте

$$\mathbf{u}_* = \frac{\varepsilon\overline{\chi}B_0}{4\pi\omega_*^2[1+i(1+\varepsilon)\overline{\omega}/\omega_*]}\ \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\ \mathbf{B}_z(\omega_*). \tag{5}$$

Формула (5) при условии $\omega_* \ll \overline{\omega}$ позволяет записать

$$\left|\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\right|_* = \frac{4\pi\omega_*\rho_0\,|u_*|}{B_0\left|B_{0z}(\omega_*)\right|}.$$

На характерной частоте имеем два решения уравнения (2)

$$\beta_2^2 = -\frac{\omega_*^2}{c_t^2}\left(1+\frac{\varepsilon i\overline{\omega}/\omega_*}{1+i\overline{\omega}/\omega_*}\right),\quad \beta_1^2 = 4\pi\sigma\omega_*\left[i-\frac{1}{1+i\overline{\omega}/\omega_*}\left(\frac{\hat{\omega}}{\omega_*}+\frac{B_0^2}{\rho_{0,l}c_e^2}\frac{\sigma}{\omega_*}\right)\right]^{-1}\Big/c_e^2.$$

При выполнении условий $\overline{\omega}/\omega_* \gg 1,$ $\hat{\omega}/\omega_* \ll 1,$ $B_0^2/\rho_{0,l}c_e^2 \ll \omega_*/\sigma,$ используя асимптотическую формулу, получаем

$$\left|\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\right|_* = \sqrt{\frac{4\pi\omega_*\sigma}{c_e^2}}$$

— второе равенство для определения проводимости среды

$$\sqrt{\sigma} = \sqrt{4\pi\omega_*}\cdot\frac{c_e\,|\mathrm{u}_*|}{B_0\left|B_z(\omega_*)\right|/\rho_0}.$$

Для сред с $\chi \gg \dfrac{\alpha^2}{\sigma}$ обе формулы принимают вид

$$\frac{\alpha}{\chi} = \sigma \cdot \frac{B_0}{c_e \omega_*}, \quad \sqrt{\sigma} = \frac{\sqrt{4\pi\omega_*}\rho_0 c_e |u_*|}{B_0 |B_z(\omega_*)|}$$

и позволяют измерить электропроводность σ, а также отношение двух кинетических коэффициентов α/χ. В стационарных условиях $\mathbf{E} = -\bar{\varepsilon}\,\nabla p$ [Мигунов, 1978]. Параметр $\bar{\varepsilon}$ называют электросейсмическим коэффициентом и обычно оценивают по формуле $\bar{\varepsilon} = \in \zeta / 4\pi\eta\sigma$, где $\in$ — диэлектрическая проницаемость, η — динамическая вязкость, σ — электропроводность, ζ — дзета-потенциал. В отсутствие электрического тока, следуя кинетическим соотношениям, можно записать

$$\mathbf{E} = -\frac{\alpha/\rho_0}{\chi^{\partial}\sigma - \alpha^2}\nabla p.$$

Последняя зависимость позволяет определить связь α с электросейсмическим коэффициентом $\varepsilon = \alpha\rho_0^{-1}(\chi^{\partial}\sigma - \alpha^2)$. Формулу можно обратить следующим образом

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 + 4\sigma\chi^{\partial}\rho_0^2\varepsilon^2} - 1}{2\rho_0\bar{\varepsilon}} \approx \sigma\chi^{\partial}\rho_0\bar{\varepsilon}, \quad 4\sigma\chi^{\partial}\rho_0^2\bar{\varepsilon}^2 \ll 1$$

Формула связывает кинетический параметр α с ζ-потенциалом $\alpha = 4\pi\eta B_0\sigma / \in c_e\omega_*\rho_0$. Следовательно,

$$\zeta = \frac{4\pi\eta B_0}{\in c_e \omega_* \rho_0} \cdot \sigma, \quad \sqrt{\sigma} = \sqrt{4\pi\omega_*} \cdot \frac{c_e |u_*|}{B_0 |B_z(\omega_*)| / \rho_0}.$$

Последние две формулы и условия их вывода представляют принципиальную основу для развития метода прямого измерения ζ-потенциала и электропроводности пористой насыщенной среды магнитоакустоэлектрическими методами. Заметим, χ при $\alpha = 0$ позволяет из формулы $\alpha = \chi(\alpha = 0) \cdot \sigma B_0/c_e\omega_*$ определить α. $\chi(\alpha = 0)$ определяется акустической реакцией системы при заданном магнитном поле (решение задачи при $\alpha = 0$)

$$|u_z(x=0)| = \frac{i\sigma\omega^2 c_e^{-2}}{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)} \; \frac{\varpi}{\omega + i\varpi} \; \frac{B_{z0}(\omega)B_0}{\rho_{0,s}c_t^2}.$$

Проницаемость k среды восстанавливается через $\chi(\alpha = 0)$ из формулы $\rho_{0,l}\chi(\alpha = 0) = \eta/(k\rho_0)$.

Возможно ли прямое измерение пористости в рамках изложенного метода? Для этого следует рассмотреть возбуждение системы касательными напряжениями. В отсутствие возбуждения внешним магнитным полем аналогично получаем связь скоростей колебаний матрицы от величины касательного напряжения, приложенного на границе раздела и возбуждающего систему

$$u_z\big|_{x=0} = \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{\beta_2\Lambda_1 - \beta_1\Lambda_2} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \quad \Lambda(\beta) = 4\pi\frac{\sigma c_t^2}{\hat{\omega}\, c_e^2}\left(1 + i\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)\frac{\rho_{0,s}\bar{\chi}}{\beta}\left(\beta^2 + \frac{\varphi}{c_t^2}\right)B_0.$$

Функция $\Lambda(\beta)$ на характерной частоте на втором корне ($\beta = \beta_2$) обращается в ноль. Следовательно, при $\omega = \omega_*$

$$u_z\big|_{x=0} = -\frac{1}{\beta_2} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x}\bigg|_{x=0}.$$

На характерной частоте ω_* в принятом приближении получаем связь

$$u_z\big|_{x=0} \simeq -\frac{c_t}{\omega_*}\sqrt{\frac{\rho_s}{\rho}} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x}\bigg|_{x=0},$$

позволяющую по измеренной амплитуде скорости колебаний поверхности и по ее заданной пространственной производной на границе (задана тангенциальная сила поверхностного воздействия) определить пористость системы d_0, поскольку $\rho_s = (1 - d_0)\rho_s^{sh}$, $\rho_l = d_0\rho_l^{sh}$. Здесь ρ_s^{sh} и ρ_l^{sh} — соответствующие физические плотности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ДВУХСКОРОСТНОГО ПОЛЯРИЗУЮЩЕГОСЯ ДИЭЛЕКТРИКА В ПОРИСТОЙ УПРУГОДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Электродинамическая фильтрационная теория, направленная на описание движения диэлектрической слабопроводящей жидкости в деформирующейся упругой пористой матрице, может быть построена, следуя работам [Blokhin, Dorovsky, 1995; Доровский, Доровский, 2006]. Эффекты дисперсии кинетических коэффициентов в данной работе не учитываются. Ниже в краткой форме развитая в указанных публикациях техника вывода уравнений двухскоростных гидродинамических систем без электродинамических эффектов и техника вывода односкоростной гидродинамики с учетом электродинамических эффектов используется в построении двухскоростной гидродинамической системы с учетом электродинамических эффектов. Внутреннюю энергию единицы объема рассматриваемой двухскоростной среды, насыщенной электролитом (среда рассматривается как диэлектрик с утечкой), с учетом поляризационных эффектов можно представить в виде

$$dE_0 = TdS + \mu' d\rho + Zdc + (\mathbf{u}-\mathbf{v})\,d\mathbf{j}_0 + \frac{h_{ik}}{2}dg_{ik} + \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}\wedge\mathbf{B}}{\rho c_e}\right)d\mathbf{P} - \left(\mathbf{M} + \frac{\mathbf{j}\wedge\mathbf{P}}{\rho c_e}\right)d\mathbf{B}, \tag{6}$$

где $\mathbf{j}_0$ инвариантная часть (относительно преобразования Галилея) полного импульса $\mathbf{j}$ двухскоростной среды $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} + \mathbf{j}_0$, $\mathbf{j}_0 = \rho_s(\mathbf{u} - \mathbf{v})$, T — температура, μ', Z — термодинамические потенциалы (связь первого потенциала с введенным ниже химическим потенциалом μ системы будет установлена дальше), S —энтропия единицы объема, E_0 — внутренняя энергия единицы объема, c — концентрация ионов одного знака, c_e — скорость света, $\mathbf{E}$ — электрическое поле, $\mathbf{H}$ — магнитное поле, $\mathbf{P}$ — электрическая поляризация, $\mathbf{M}$ — магнитная поляризация, $h_{ik}/2$ — производная внутренней энергии по g_{ik}-метрическому тензору деформаций при постоянном значении соответствующих термодинамических параметров. Все обозначения Приложения соответствуют основному тексту статьи. Принимая во внимание формулу представления импульса, легко убедиться, что это, с одной стороны, инвариантная конструкция относительно преобразования Галилея, а с другой — эта форма прямо обобщает соответствующую дифференциальную форму односкоростного варианта теории [Доровский, Доровский, 2006]. Полная энергия связана с внутренней энергией зависимостью

$$E = E_0 + \mathbf{j}_0\mathbf{v} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}. \tag{7}$$

Последние две формулы позволяют вычислить производную полной энергии по времени

$$\frac{\partial E}{\partial t} = T\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\mu' + \frac{v^2}{2} - \mathbf{uv}\right)\frac{\partial\rho}{\partial t} + Z\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} + (\mathbf{j} - \rho\mathbf{u})\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{h_{ik}}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} +$$
$$+\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\mathbf{j}}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}\right). \tag{8}$$

Представленная формула определяет связь временных производных термодинамических и гидродинамических величин, входящих в законы сохранения двухскоростной гидродинамической системы:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{j} + \mathbf{I}) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[j_i + \frac{(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})_i}{4\pi c_e}\right] + \partial_k(\Pi_{ik} + \pi_{ik}) = 0, \tag{9}$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(S\frac{\mathbf{j}}{\rho} + \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{Z}{\rho T}\mathbf{I}\right) = \frac{R}{T}, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{Q} + \mathbf{W}) = 0.$$

В законах сохранения (9) плотность импульса $\mathbf{j} = \rho_s\mathbf{u} + \rho_l\mathbf{v}$; необратимый поток ионов $\mathbf{I}$, поток тепла $\mathbf{q}$, обратимый Π_{ik} и необратимый π_{ik} тензоры плотности потока импульса, обратимый $\mathbf{Q}$ и необратимый $\mathbf{W}$ потоки энергии. Диссипативная функция R подлежат определению.

Уравнение движения жидкости как подсистемы содержит силы реакции и не может быть представлено законом сохранения. Структура этого уравнения имеет вид [Blokhin, Dorovsky, 1995]

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\mu + \frac{Z}{\rho}\nabla c - \frac{S}{\rho}\nabla T + \mathbf{f} + \mathbf{f}^{\partial}. \tag{10}$$

Повторяется аналогия с ситуацией, описывающей фильтрацию в приближении без учета электродинамических эффектов. Здесь $\mathbf{f}$ — обратимая по своей природе сила, действующая на единицу объема поляризационного диэлектрика, $\mathbf{f}^{\partial}$ — сила трения, μ — химический потенциал, в последующем подлежащий определению. Систему уравнений (8)—(10) следует дополнить уравнением кинематической природы, определяющим эволюцию метрического тензора деформаций [Blokhin, Dorovsky, 1995],

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + g_{jk}\partial_i u_j + g_{ij}\partial_k u_j + u_j \partial_j g_{ik} = 0. \tag{11}$$

Уравнения замыкаются электродинамическими уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c_e}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c_e}\mathbf{j}^e + \frac{1}{c_e}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\chi, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

В последних уравнениях $\mathbf{D}$ — электрическая индукция, $\mathbf{j}^e$ — плотность электрического тока, χ — объемная плотность электрического заряда. Ниже будут использованы следствия уравнений Максвелла

$$\frac{1}{c_e}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})_i = \frac{4\pi}{c_e}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}\wedge\mathbf{P})_i - 4\pi(\mathbf{P}\partial_i\mathbf{E} + \mathbf{M}\partial_i\mathbf{B}) - \frac{4\pi}{c_e}(\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B})_i +$$

$$+\partial_k\left[B_k H_i + D_k E_i - \left(\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2}{2} - 4\pi\mathbf{BM}\right)\delta_{ik}\right] - E_i \operatorname{div}\mathbf{D},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2}{8\pi}\right) = -\frac{c_e}{4\pi}\operatorname{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}) - \mathbf{j}^e\mathbf{E} - \left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right),$$

в справедливости которых легко убедиться прямым вычислением временных производных, стоящих в левых частях представленных тождеств, с последующим использованием исходных уравнений. Подставим производные по времени из законов сохранения в правую часть (8), после чего выясним условия представления пространственных производных в виде полной дивергенции. Выбором потоков обеспечиваем тождественное выполнение закона сохранения энергии. Ниже представлен первый шаг такого преобразования с выделением отдельных членов потока энергии под знаком дивергенции

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \partial_i\left(\frac{ST}{\rho}j_i + \mu' j_i + \frac{c_e}{4\pi}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})_i + u_j g_{jk} h_{ik} + \mathbf{q}_i\right) =$$

$$= R + \mathbf{q}\frac{\nabla T}{T} + T\mathbf{I}\,\nabla\frac{Z}{\rho T} - u_i\partial_k\pi_{ik} - \left[\frac{v^2}{2} - \mathbf{uv}\right]\operatorname{div}\mathbf{j} - (\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})v_k\partial_k\mathbf{v} -$$

$$-u_i\partial_k\left[\Pi_{ik} + \frac{B_k H_i + D_k E_i}{4\pi} - \left(\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2}{8\pi} - \mathbf{BM}\right)\delta_{ik} - g_{ij}h_{jk}\right] + \tag{12}$$

$$+\mathbf{u}\left[\mathbf{P}\nabla\mathbf{E} + \mathbf{M}\nabla\mathbf{B} + S\nabla T + \rho\nabla\mu - Z\nabla c - \frac{h_{ik}}{2}\nabla g_{ik}\right] + \mathbf{j}\nabla(\mu'-\mu) +$$

$$+(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\left[\mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right) - \frac{1}{\rho}\partial_k\left(j_k\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{\rho c_e}\right)\right] + \frac{\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}}{\rho}\partial_k\left(j_k\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{\rho c_e}\right) +$$

$$+\chi\mathbf{uE} + \frac{\mathbf{u}}{c_e}\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B} - \mathbf{j}^e\mathbf{E} + (\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\mathbf{f}^{\partial}.$$

Введем «давление» $\wp = -E_0 + TS + \rho\mu + \mathbf{EP}$. Принимая во внимание выражение для дифференциала внутренней энергии, введенное «давление» позволяет представить комбинацию из третьей строки (12)

$$\mathbf{P}\nabla\mathbf{E} + \mathbf{M}\nabla\mathbf{B} + S\nabla T + \rho\nabla\mu - Z\nabla c - \frac{h_{ik}}{2}\nabla g_{ik} =$$

$$= (\mu'-\mu)\nabla\rho + \nabla\wp + (\mathbf{u}-\mathbf{v})_i\nabla j_i^0 - \frac{j_i}{\rho}\nabla\frac{(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})_i}{c_e}.$$

Равенство $\mathbf{j}^e = \chi_s\mathbf{u} + \chi_l\mathbf{v} + \mathbf{i}_0$, где $\mathbf{i}_0$ — необратимая часть плотности тока, позволяет преобразовать выражение

$$\chi\mathbf{u}\mathbf{E}+\frac{\mathbf{u}}{c_e}\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}-\mathbf{j}^e\mathbf{E}=-\left(\mathbf{j}^e-\chi\mathbf{u}\right)\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)=\frac{\chi_l\mathbf{j}^0}{\rho_s}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)-\mathbf{i}_0\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)=$$

$$=-\left(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}\right)\cdot\frac{\chi_l}{\rho_l}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)-\mathbf{i}_0\cdot\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)$$

на обратимую часть и на составляющие диссипативной природы. «Давление» $\wp$ и преобразование членов электромагнитной природы позволяют провести дальнейшие преобразования (12)

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\partial_i\left(\frac{ST}{\rho}j_i+\mu' j_i+\frac{c_e}{4\pi}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})_i+\mathrm{u}_j\,g_{jk}h_{ik}+q_i+v_k\pi_{ik}\right)=$$

$$=R+\mathbf{q}\frac{\nabla T}{T}+T\mathbf{I}\,\nabla\frac{Z}{\rho T}-\mathbf{i}_0\left[\mathbf{E}+\left(\frac{\chi_l}{\chi}\frac{\mathbf{v}}{c_e}+\frac{\chi_s}{\chi}\frac{\mathbf{u}}{c_e}\right)\wedge\mathbf{B}\right]+\left(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}\right)_i\left(f_i^\partial+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}\right)+\pi_{ik}\partial_k v_i-$$

$$-\left[\frac{v^2}{2}-\mathbf{uv}\right]\mathrm{div}\,\mathbf{j}-\left(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}\right)v_k\partial_k\mathbf{v}+u_i(\mathbf{u}-\mathbf{v})\partial_i\mathbf{j}^0- \qquad (13)$$

$$-u_i\partial_k\left[\Pi_{ik}+\frac{B_kH_i+D_kE_i}{4\pi}-\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}-\mathbf{BM}+\wp\right)\delta_{ik}+j_k\frac{(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})_i}{\rho c_e}+\rho\left(\mu-\mu'\right)\delta_{ik}-h_{jk}g_{ij}\right]+$$

$$+\left(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}\right)\left[\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right)-\frac{1}{\rho}\partial_k\left(j_k\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{\rho c_e}\right)-\frac{\chi_l}{\rho_l}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)+\nabla(\mu'-\mu)\right]+$$

$$+\frac{\mathbf{j}}{\rho}\partial_k\left(j_k\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{\rho c_e}\right)-\frac{\mathbf{j}}{\rho}u_i\partial_i\left(\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right).$$

В правой части первой строки собраны диссипативные члены. Последующее преобразование (13) связано с изменением представления последних двух слагаемых

$$\frac{\mathbf{j}}{\rho}\partial_k\left(j_k\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{\rho c_e}\right)-\frac{u_i\,\mathbf{j}}{\rho}\partial_i\left(\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right)=$$

$$=\partial_i\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\frac{j_i}{\rho}\right)-\frac{j_i}{\rho}\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\partial_i\frac{\mathbf{j}}{\rho}-u_i\partial_i\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right)+\frac{\rho u_i}{\rho}\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\partial_i\frac{\mathbf{j}}{\rho}=$$

$$=\partial_i\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\frac{j_i}{\rho}\right)-\left(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}\right)\frac{(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})_i}{\rho c_e}\nabla\frac{j_i}{\rho}-u_i\partial_k\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\delta_{ik}\right).$$

Смысл проведенных преобразований очевиден: все слагаемые группируются в три класса: класс полных дивергенций, класс членов, имеющих сомножителем $\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}$, и класс слагаемых, входящих в конструкцию $u_i\partial_k(...)$. Равенство (13) позволяет разбить все слагаемые в упомянутые три класса (диссипативные слагаемые как отдельный класс группируются вокруг диссипативной функции R)

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\partial_i\left(\frac{ST}{\rho}j_i+\mu' j_i+\frac{c_e}{4\pi}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})_i-\frac{\mathbf{j}(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})}{\rho c_e}\frac{j_i}{\rho}+u_jh_{ik}g_{jk}+q_i+v_k\pi_{ik}\right)=$$

$$=R+\mathbf{q}\frac{\nabla T}{T}+T\mathbf{I}\,\nabla\frac{Z}{\rho T}-\mathbf{i}_0\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)+\left(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}\right)_i\left(f_i^\partial+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}\right)-$$

$$-\left[\frac{v^2}{2}-\mathbf{uv}\right]\mathrm{div}\,\mathbf{j}-\left(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}\right)v_k\partial_k\mathbf{v}+u_i(\mathbf{u}-\mathbf{v})\partial_i\mathbf{j}^0- \qquad (14)$$

$$-u_i\partial_k\left[\Pi_{ik}+\frac{B_kH_i+D_kE_i}{4\pi}-\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}-\mathbf{BM}+\wp\right)\delta_{ik}-h_{jk}g_{ij}\right]-$$

$$-u_i\partial_k\left[j_k\frac{(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})_\mathbf{i}}{\rho c_e}+\rho(\mu-\mu')\delta_{ik}+\frac{\mathbf{j}}{\rho}\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\delta_{ik}\right]+$$

$$+(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\left[\mathbf{f}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right)-\frac{1}{\rho}\partial_k\left(j_k\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{\rho c_e}\right)\right]+$$

$$+(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\left[-\frac{\chi_l}{\rho_l}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)+\nabla(\mu'-\mu)-\frac{(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})_i}{\rho c_e}\nabla\frac{j_i}{\rho}\right].$$

Определим функцию $\mathbf{f}$ из условия обращения в ноль всей группы слагаемых, находящихся при сомножителе $\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}$

$$\mathbf{f}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right)+\frac{1}{\rho}\partial_k\left(j_k\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{\rho c_e}\right)+\frac{\chi_l}{\rho_l}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)-\nabla(\mu'-\mu)+\frac{(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})_i}{\rho c_e}\nabla\frac{j_i}{\rho}.$$

Результат подставим в уравнение движения жидкой фазы. После незначительных преобразований приходим к выражению

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla\left(\wp+(\mathbf{u}-\mathbf{v})\mathbf{j}^0\right)}{\rho}+\frac{\mathbf{j}^0}{\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right)+\frac{1}{\rho}\partial_k\left(j_k\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{\rho c_e}\right)-$$

$$-\frac{h_{ik}}{2\rho}\nabla g_{ik}+\frac{\mathbf{M}\nabla\mathbf{B}+\mathbf{P}\nabla\mathbf{E}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\nabla\left[\rho(\mu-\mu')+\frac{\mathbf{j}(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})}{\rho c_e}\right]+\frac{\chi_l}{\rho_l}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)+\boldsymbol{f}^\partial.$$

Определим связь термодинамического потенциала μ' с химическим потенциалом μ равенством

$$\mu=\mu'-\mathbf{j}(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})/\rho^2c_e=\left(\frac{\partial E_0}{\partial\rho}\right)_{S,c,j_0,g_{ik},\mathbf{P},\mathbf{B}}-\frac{\mathbf{j}(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})}{\rho^2c_e}.$$

Введением в «давление» квадратичного по скоростям слагаемого $p=\wp+(\mathbf{u}-\mathbf{v})\mathbf{j}^0$ получим окончательную форму уравнения движения жидкой фазы

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\frac{\rho_s}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2-\frac{h_{ik}}{2\rho}\nabla g_{ik}+$$

$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right)+\frac{1}{\rho}\partial_k\left(j_k\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{\rho c_e}\right)+\frac{\mathbf{M}\nabla\mathbf{B}+\mathbf{P}\nabla\mathbf{E}}{\rho}+\frac{\chi_l}{\rho_l}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)+\boldsymbol{f}^\partial. \tag{15}$$

Уравнение (15) удовлетворяет всем предельным переходам, в чем легко убедиться. В отсутствие электродинамических полей получаем уравнение [Dorovsky, 1989]

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\frac{\rho_s}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2-\frac{h_{ik}}{2\rho}\nabla g_{ik}+\mathbf{f}^\partial,$$

в отсутствие объемной плотности заряда и упругого взаимодействия во вмещающей матрице, при равенстве физических плотностей уравнение должно иметь решение $\mathbf{u}\equiv\mathbf{v}$, , т.е. уравнение (15) переходит в соответствующее уравнение работы [Доровский, Доровский, 2006]

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\rho_l^{sh}}+\frac{1}{\rho_l^{sh}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right)+\frac{1}{\rho_l^{sh}}\partial_k\left(v_k\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e}\right)+\frac{\mathbf{M}\nabla\mathbf{B}+\mathbf{P}\nabla\mathbf{E}}{\rho_l^{sh}}+\boldsymbol{f}^\partial.$$

Таким образом, построенная теория позволяет правильно осуществить все предельные переходы. Продолжая анализировать (14), замечаем, вторая строка затрагивает только слагаемые, связанные со скоростями двухскоростного континуума. Если представить диссипативный тензор плотности потока импульса в виде $\pi_{ik}=A_{ik}+a\delta_{ik}$ $(A_{\nu\nu}=0)$, основному энергетическому равенству можно придать конечный результат

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\partial_i\left[\left(\mu'+\frac{v^2}{2}-\mathbf{uv}+\frac{ST}{\rho}\right)j_i+(\mathbf{uj}^0)u_i+u_j h_{ik}g_{jk}+\frac{c_e(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})_i}{4\pi}-\frac{\mathbf{j}(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})j_i}{\rho^2 c_e}+q_i+\pi_{ik}v_k\right]=$$

$$=R+\mathbf{q}\frac{\nabla T}{T}+T\mathbf{I}\,\nabla\frac{Z}{\rho T}-\mathbf{i}_0\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)+(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\mathbf{f}^\partial+A_{ik}\left(\partial_i v_k+\partial_k v_i-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)-a\operatorname{div}\mathbf{v}- \quad (16)$$

$$-u_i\partial_k\left[\Pi_{ik}-\rho_s u_i u_k-\rho v_i v_k+\frac{B_k H_i+D_k E_i}{4\pi}-\left(\frac{E^2+B^2}{8\pi}-\mathbf{BM}+p\right)\delta_{ik}-h_{jk}g_{ij}+j_k\frac{(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})_i}{\rho c_e}\right].$$

Равенство (16) определяет диссипативную функцию и тензор плотности потока импульса

$$R=-(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\mathbf{f}^\partial+\mathbf{i}_0\left[\mathbf{E}+\left(\frac{\chi_l}{\chi}\frac{\mathbf{v}}{c_e}+\frac{\chi_s}{\chi}\frac{\mathbf{u}}{c_e}\right)\wedge\mathbf{B}\right]-\mathbf{q}\frac{\nabla T}{T}-T\mathbf{I}\,\nabla\frac{Z}{\rho T}-$$

$$-A_{ik}\left(\partial_i v_k+\partial_k v_i-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)-a\operatorname{div}\mathbf{v}, \quad (17)$$

$$\Pi_{ik}=\rho_s u_i u_k+\rho_l v_i v_k-\frac{B_k H_i+D_k E_i}{4\pi}+\left(\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2}{8\pi}-\mathbf{BM}+p\right)\delta_{ik}+h_{jk}g_{ij}-\frac{j_k(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})_i}{\rho c_e}. \quad (18)$$

Тензор плотности потока импульса также удовлетворяет всем предельным переходам. Закон сохранения энергии определяет обратимый и диссипативный потоки энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\partial_i\left[\left(\mu'+\frac{v^2}{2}-\mathbf{uv}+\frac{ST}{\rho}\right)j_i+(\mathbf{uj}^0)u_i+\frac{c_e(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})_i}{4\pi}+u_j h_{ik}g_{jk}+q_i+\pi_{ik}v_k\right]0. \quad (19)$$

Входящее в уравнения давление определяется термодинамической формулой

$$p=-E_0+TS+\rho\mu+\mathbf{EP}+(\mathbf{u}-\mathbf{v})\mathbf{j}^0. \quad (20)$$

Последнее выражение также удовлетворяет всем предельным переходам к теории односкоростного континуума, учитывающей эффекты поляризации.

Таким образом, уравнения и определяющие соотношения (6), (9), (10), (15), (17), (19), (20) совместно с уравнениями Максвелла представляют электродинамическую двухскоростную гидродинамическую теорию фильтрации слабопроводящих диэлектрических жидкостей. Указанную систему следует замкнуть формальными линейными диссипативными соотношениями

$$\mathbf{f}^\partial+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}=\chi(\rho\mathbf{u}-\mathbf{j})+\alpha\left[\mathbf{E}+\frac{\sigma_l}{\sigma}\frac{\mathbf{v}}{c_e}\wedge\mathbf{B}+\frac{\sigma_s}{\sigma}\frac{\mathbf{u}}{c_e}\wedge\mathbf{B}\right]+\alpha_{13}\frac{\nabla T}{T}+\alpha_{14}T\mathbf{I}\,\nabla\frac{Z}{\rho T},$$

$$\mathbf{j}^e-\chi_s\mathbf{u}-\chi_l\mathbf{v}=\alpha(\rho\mathbf{u}-\mathbf{j})+\sigma\left[\mathbf{E}+\frac{\sigma_l}{\sigma}\frac{\mathbf{v}}{c_e}\wedge\mathbf{B}+\frac{\sigma_s}{\sigma}\frac{\mathbf{u}}{c_e}\wedge\mathbf{B}\right]+\alpha_{23}\frac{\nabla T}{T}+\alpha_{24}T\mathbf{I}\,\nabla\frac{Z}{\rho T},$$

$$\mathbf{q}=\alpha_{13}(\rho\mathbf{u}-\mathbf{j})+\alpha_{23}\left[\mathbf{E}+\frac{\sigma_l}{\sigma}\frac{\mathbf{v}}{c_e}\wedge\mathbf{B}+\frac{\sigma_s}{\sigma}\frac{\mathbf{u}}{c_e}\wedge\mathbf{B}\right]+\kappa\frac{\nabla T}{T}+\alpha_{34}T\mathbf{I}\,\nabla\frac{Z}{\rho T}. \quad (21)$$

$$T\cdot\mathbf{I}=\alpha_{14}(\rho\mathbf{u}-\mathbf{j})+\alpha_{24}\left[\mathbf{E}+\frac{\sigma_l}{\sigma}\frac{\mathbf{v}}{c_e}\wedge\mathbf{B}+\frac{\sigma_s}{\sigma}\frac{\mathbf{u}}{c_e}\wedge\mathbf{B}\right]+\alpha_{34}\frac{\nabla T}{T}+\alpha_{44}T\mathbf{I}\,\nabla\frac{Z}{\rho T},$$

$$A_{ik}=-\overline{\eta}\left(\partial_i v_k+\partial_k v_i-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right),\quad a=-\theta\cdot\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Здесь введены $\overline{\eta}, \theta$ — сдвиговая и объемные вязкости, $\sigma_s=\sigma\chi_s/\chi$, $\sigma_l=\sigma\chi_l/\chi$. Следует различать вязкость жидкости в отсутствие пористой матрицы (чистой жидкости), которая обычно вводится через коэффициент трения и введенную здесь вязкость $\overline{\eta}$ жидкости в присутствии пористой матрицы.

Кинетические коэффициенты в общем случае являются функциями термодинамического локального состояния среды: $\sigma(S, \rho, c, \mathbf{j}_0, \mathbf{P}, \mathbf{B})$, $\alpha(S, \rho, c, \mathbf{j}_0, \mathbf{P}, \mathbf{B})$, $\chi(S, \rho, c, \mathbf{j}_0, \mathbf{P}, \mathbf{B})$, …

В практических ситуациях в качестве двух динамических уравнений могут быть выбраны уравнения, определяющие скорости соответствующих континуумов

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 - \frac{h_{\mu\nu}}{2\rho}\nabla g_{\mu\nu} +$$

$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{c_e} + \frac{1}{\rho}\partial_k\left(j_k\frac{\mathbf{P}\wedge\mathbf{B}}{\rho c_e}\right) + \frac{\mathbf{M}\nabla\mathbf{B}+\mathbf{P}\nabla\mathbf{E}}{\rho} + \frac{\chi_l}{\rho_l}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right) + \mathbf{f}^{\partial},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\,u_i = -\frac{\partial_i p}{\rho} - \frac{\rho_l}{2\rho}\partial_i(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 + \frac{\rho_l}{2\rho\rho_s}h_{\mu\nu}\partial_i g_{\mu\nu} - \frac{1}{\rho_s}\partial_\mu(h_{\nu\mu}g_{i\nu}) +$$

$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\frac{(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})_i}{c_e} + \frac{1}{\rho}\partial_k\left(j_k\frac{(\mathbf{P}\wedge\mathbf{B})_i}{\rho c_e}\right) + \frac{\mathbf{M}\partial_i\mathbf{B}+\mathbf{P}\partial_i\mathbf{E}}{\rho} + \frac{\chi_l}{\rho_l}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{j}^e\wedge\mathbf{B}}{\chi c_e}\right)_i - \frac{\rho_l}{\rho_s}f_i^{\partial}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Доровский С.В., Доровский В.Н. О возможностях электроразведки при исследовании устойчивости водонефтяных слоистых систем // Геология и геофизика, 2006, т. 47 (7), с. 892–901.

Мигунов Н.И. Влияние электрокинетических свойств горных пород на скорость распространения сейсмоэлектрических сигналов // Физика Земли, 1978, № 5, р. 52—56.

Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range // J. Acoustical Soc. Amer., 1956, v. 28, № 2, p. 168—178.

Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York, Nova Science Publishers Inc., 1995, 192 p.

Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика, 1989(7), с. 39—45.

Johnson D.L. Theory of Dynamic Permeability // J. Fluid Mechanics, 1987, v. 176, p. 379—402.

Pride S. Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media // Phys. Rev. B, 1994, v. 50, № 21, p. 15678—15696.

Рекомендована к печати 24 сентября 2008 г.
М.И. Эповым

Поступила в редакцию
15 июля 2008 г.