

УДК 550.344.42

Вычисление высоты цунами, распространяющейся над наклонным дном, в лучевом приближении

Ан.Г. Марчук

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
E-mail: mag@omzg.sccc.ru

Марчук Ан.Г. Вычисление высоты цунами, распространяющейся над наклонным дном, в лучевом приближении // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 4. — С. 377–388.

В статье рассматривается кинематика волновых лучей и фронтов цунами над неровным дном. Выводятся формулы, определяющие высоту цунами вдоль волновой трубки. Получено точное решение для траектории волнового луча над наклонным рельефом дна, которое даёт возможность в лучевом приближении аналитически решить задачу нахождения высоты цунами от источника круглой формы в области с наклонным дном. Проведено сравнение полученного распределения максимумов высоты волны с результатами численного расчёта распространения цунами по модели мелкой воды.

DOI: 10.15372/SJNM20150404

Ключевые слова: распространение цунами, уравнения мелкой воды, волновой луч, кинематика волнового фронта.

Marchuk An.G. The assessment of tsunami heights above the bottom slope within the wave-ray approach // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 4. — P. 377–388.

In this paper, the kinematics of the tsunami wave ray and wave front above an uneven bottom is studied. The formula to determine the wave height along a ray tube is obtained. The exact analytical solution for the wave-ray trajectory above the bottom slope is derived. This solution gives the possibility to determine within the wave-ray approach the tsunami wave heights in an area with a sloping bottom relief. The distribution of the wave-height maxima in the area with the sloping bottom is compared to the one obtained by the numerical computation with a shallow-water model.

Keywords: tsunami propagation, shallow-water equations, wave ray, wave front kinematics.

1. Некоторые особенности распространения длинных волн

Волны цунами, порождаемые в природе вертикальным смещением обширных участков океанического дна, относятся к классу длинных волн, для которых длина волны больше глубины как минимум на порядок. Процесс распространения таких волн в глубоком океане, где обычно высота волны на два порядка меньше глубины, описывается линейной системой дифференциальных уравнений мелкой воды [1]. Справедливость такого описания неоднократно проверена на практике. В одномерном случае при отсутствии внешних сил (кроме силы гравитации) эти уравнения могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(Du)}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь u — горизонтальная скорость потока воды в волне, η — возвышение водной поверхности относительно невозмущенного уровня, g — ускорение силы тяжести, D — глубина. Из уравнений мелкой воды следует, что скорость волны не зависит от её длины и определяется формулой Лагранжа [1]:

$$c = \sqrt{gD}. \quad (1.3)$$

Эта формула имеет основополагающее значение для кинематики длинных волн (в том числе цунами). Фронт волны может быть определён как граница между той частью акватории, где вода покоится (возвышение η и компоненты скорости равны нулю), и той частью, куда к этому моменту возмущение от источника уже дошло ($\eta \neq 0$). Для описания динамики волн цунами в прибрежной зоне, где амплитуда цунами возрастает, а глубина становится меньше, применяется нелинейная модель мелкой воды [2], в рамках которой скорость распространения волн выражается формулой

$$c = \sqrt{g(D + \eta)}. \quad (1.4)$$

Здесь надо заметить, что скорости фронта и гребня волны несколько различаются, при этом гребень, где возвышение водной поверхности достигает максимального значения по всей длине волны, постепенно догоняет фронт. Когда гребень обгоняет фронт, происходит обрушение волны. При распространении волны по глубокому океану этот эффект проявляется крайне слабо даже при пересечении волной всей акватории Тихого океана. При дальнейшем изложении особенностей кинематики длинных волн под скоростью распространения будет подразумеваться скорость именно фронта волны, которая, согласно (1.3), не зависит от параметров волны и определяется только глубиной океана в том месте, где она находится в данный момент. Независимость скорости распространения фронта цунами от её амплитуды и длины позволяет заранее выявить многие особенности поведения этих волн в акваториях с неровным дном.

Свойства системы уравнений мелкой воды, а также особенности физического процесса распространения волны цунами позволяют получить некоторые оценки для параметров течения в этой волне, которые могут быть использованы в дальнейшем для определения высоты цунами. В частности, используется тот факт, что горизонтальная скорость воды при движении длинной волны постоянна во всей толще от поверхности до дна [1]. Все соотношения, которые будут получены в этом пункте, справедливы для линеаризованных уравнений мелкой воды. Заметим также, что эти же соотношения выполняются с точностью до малых второго порядка и для волн, описываемых нелинейными уравнениями мелкой воды, при распространении цунами по глубокому океану, где глубина на два порядка больше амплитуды волны.

Итак, сначала получим приближённую формулу для величины горизонтальной скорости u воды при движении волны цунами, если глубина равна D . Такую зависимость можно получить явным образом из линеаризованных уравнений мелкой воды (1.1), (1.2). Мы уже знаем, что в рамках этой модели волна распространяется со скоростью, определяемой формулой Лагранжа (1.3). Представим бегущую волну в виде гармонической функции

$$\eta = a \cos(kx - \omega t), \tag{1.5}$$

которая описывает волну высотой a , бегущую в сторону увеличения координаты x со скоростью $c = \omega/k$. Подставив выражение для смещения водной поверхности (1.5) в уравнение (1.1), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = gka \sin(kx - \omega t). \tag{1.6}$$

Интегрируя по t обе части уравнения (1.6), получаем зависимость скорости потока в волне от амплитуды и глубины

$$u = \int \frac{gk}{-\omega} a \sin(kx - \omega t) d(kx - \omega t) = \frac{g}{c} (a \cos(kx - \omega t)) = \frac{g}{\sqrt{gD}} \eta = \eta \sqrt{\frac{g}{D}}. \tag{1.7}$$

Таким образом, в гармонической волне вида (1.5) скорость течения воды определяется по формуле (1.7). Но в силу линейности процесса, для любой длинной волны, которая может быть представлена в виде суперпозиции гармонических волн разной частоты и является решением системы линейных дифференциальных уравнений мелкой воды (1.1), (1.2), формула (1.7) будет справедлива. А для квазилинейной системы уравнений мелкой воды, где скорость фронта и гребня волны несколько различаются и определяются зависимостью (1.4), формула для горизонтальной скорости потока в движущейся волне будет иметь вид

$$u = \eta \sqrt{\frac{g}{D + \eta}}, \tag{1.8}$$

где η — высота волны, D — глубина, g — ускорение силы тяжести.

Теперь запишем выражение для кинетической энергии распространяющейся одномерной волны цунами с учётом формулы (1.8):

$$E_k = \int_0^L \frac{\rho u^2}{2} (D + \eta) dx = \int_0^L \frac{\rho \eta^2}{2} \frac{g}{(D + \eta)} (D + \eta) dx = \int_0^L \frac{\rho \eta^2 g}{2} dx, \tag{1.9}$$

где L — длина волны, а ρ — плотность жидкости. Запишем также выражение для потенциальной энергии, считая, что потенциальная энергия покоящейся жидкости равна нулю,

$$E_p = \int_0^L \frac{\rho g \eta^2}{2} dx. \tag{1.10}$$

Сравнивая подынтегральные выражения в формулах для кинетической и потенциальной энергии бегущей волны цунами, видим их тождественное равенство. Следовательно, в любом сегменте волны кинетическая энергия равна потенциальной.

Теперь, используя формулу (1.7), можно найти приближённую зависимость высоты плоской (одномерной) волны цунами от глубины. Пусть в точке $x = x_1$, где глубина равна D_1 , мареограмма (зависимость уровня океана от времени) одномерной волны цунами выражается функцией $\eta_1(t)$ ($t = 0, T_1$). С учётом зависимости скорости распространения волны (1.3) и того факта, что в длинной волне скорость водного потока постоянна по всей толщине водного слоя, потенциальная энергия волны, прошедшей через сечение $x = x_1$, может быть записана в виде

$$E_p = \int_0^{T_1} \frac{\rho g \eta_1^2(t)}{2} \sqrt{g D_1} dt. \quad (1.11)$$

Пусть рассматриваемая волна достигла точки x_2 , где глубина равна D_2 . Мареограмма волны в точке x_2 теперь стала выражаться функцией $\eta_2(t)$, но период волны не изменился и остался равным T_1 . Это следует из того, что каждый сегмент волны проходит один и тот же путь между точками x_1 и x_2 , естественно, за одинаковое время (независимо от закона перехода глубины D_1 в D_2). Так как полная энергия волны остаётся постоянной, а потенциальная энергия, как было показано, в движущейся волне всегда составляет ровно половину от полной энергии, то можно записать интегральное равенство потенциальной энергии волны при прохождении этой волной сечений $x = x_1$ и $x = x_2$:

$$\int_0^{T_1} \frac{\rho g \eta_1^2(t)}{2} \sqrt{g D_1} dt = \int_0^{T_1} \frac{\rho g \eta_2^2(t)}{2} \sqrt{g D_2} dt. \quad (1.12)$$

Если процесс распространения цунами имеет линейный характер, что является справедливым для достаточно глубокого океана, где высота волны на два порядка меньше глубины, то, как нами уже замечено, интегральное равенство (1.12) переходит в приближённое равенство подынтегральных функций. Поэтому после упрощений имеем

$$\eta_1^2(x) \sqrt{D_1} \approx \eta_2^2(x) \sqrt{D_2}, \quad (1.13)$$

откуда следует приближённая формула для амплитуды волны на глубине D_2 :

$$\eta_2(x) \approx \eta_1(x) \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}. \quad (1.14)$$

Это есть известная формула Грина, описывающая изменение высоты длинной волны над неровным дном в одномерном случае. Таким образом, при распространении плоской волны из глубокого океана на более мелководный шельф её высота будет расти пропорционально корню четвёртой степени от отношения исходной и текущей глубины (формула (1.14)). Если волна не является плоской, то её амплитуда будет меняться не только за счёт непостоянства глубины, но и вследствие рефракции волны, т. е. из-за трансформации линии волнового фронта.

Рассмотрим простейший случай, когда волна цунами, линия фронта которой в какой-то момент представляет собой окружность, распространяется в области с постоянной глубиной. В этом случае, согласно формуле Лагранжа (1.3), фронт волны всё время будет сохранять форму окружности с постоянно увеличивающимся радиусом, а длина волны будет оставаться постоянной. При этом понятно, что из-за удлинения волнового фронта её амплитуда будет постоянно убывать. Опять же применим закон сохранения энергии для оценки степени этого убывания. Пусть в какой-то момент времени радиус кругового волнового фронта был равен R_1 , а в другой момент он стал равным R_2 . Длины окружностей волнового фронта составят при этом соответственно L_1 и L_2 . Запишем выражение для потенциальной энергии волны, принимая во внимание, что параметры волны одинаковы вдоль всей окружности волнового фронта,

$$E_p = \int_0^{L_1} \int_0^{\lambda_1} \frac{\rho g \eta_1^2}{2} d\lambda dl = \int_0^{\lambda_1} \frac{\rho g \eta_1^2}{2} L_1 d\lambda = \int_0^{L_2} \int_0^{\lambda_1} \frac{\rho g \eta_2^2}{2} d\lambda dl = \int_0^{\lambda_1} \frac{\rho g \eta_1^2}{2} L_2 d\lambda. \quad (1.15)$$

Здесь λ_1 — длина волны. В случае линейной волны интегральное равенство (1.15) сводится к равенству подынтегральных выражений

$$\frac{\rho g \eta_1^2}{2} 2\pi R_1 = \frac{\rho g \eta_2^2}{2} 2\pi R_2, \quad \eta_2 = \eta_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}. \quad (1.16)$$

Таким образом, за счёт цилиндрического расхождения высота волны цунами убывает обратно пропорционально корню квадратному из радиуса кругового фронта или длины волнового фронта.

Вообще, кинематика распространения возмущений в различных средах описывается уравнением эйконала [3], которое в двумерном случае имеет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, y)}, \quad (1.17)$$

где $v(x, y)$ задаёт распределение скорости в среде. Если функция $f(x, y)$ является решением уравнения эйконала (1.17), то фронт волны в момент времени T описывается уравнением

$$f(x, y) = T, \quad (1.18)$$

а уравнение $f(x, y) = 0$ задаёт положение источников возмущения или линию начального фронта волны (границу очага цунами).

Там же вводится понятие волновых лучей, одним из свойств которых является их ортогональность линии волнового фронта в любой момент времени. Так же вдоль волновых лучей возмущение распространяется из источника до других точек среды за наименьшее время. То есть волновые лучи являются экстремалиями. Между двумя близкорасположенными волновыми лучами (в лучевой трубке) энергия волны остаётся постоянной [3], поэтому для сегмента волны внутри лучевой трубки формула (1.16) переписется в виде

$$\eta_2 = \eta_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}, \quad (1.19)$$

где L_1 и L_2 — ширина лучевой трубки (длина сегмента волнового фронта внутри лучевой трубки) в начальный и в конечный момент распространения волны.

2. Точные аналитические формулы траектории волнового луча в случае наклонного рельефа дна

Точную математическую формулу для траектории волнового луча над наклонным дном можно найти из законов геометрической оптики. Рассмотрим двумерную акваторию, где глубина (а с ней и скорость распространения в ней волн) меняется только в одном направлении. Здесь можно воспользоваться законом Снеллиуса для величины угла преломления волнового луча в среде с переменной оптической проводимостью [4]. Согласно этому закону, если в двумерной проводящей среде луч подходит под углом α_1 к нормали к прямолинейной границе (горизонтальной линии на рис. 2.1), где проводимость среды (скорость распространения сигнала) меняется с b_1 на b_2 , то после прохождения границы его направление α_2 изменится в соответствии с формулой

$$\frac{\sin \alpha_1}{b_1} = \frac{\sin \alpha_2}{b_2}. \quad (2.1)$$

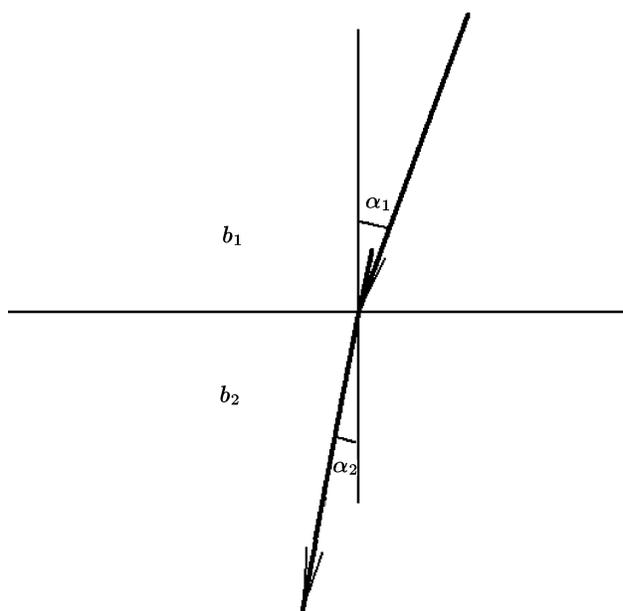


Рис. 2.1. Преломление волнового луча на границе двух сред

Таким образом, в среде, где величина проводимости (скорости распространения в ней волн) b меняется только вдоль одной пространственной переменной (например $b(y)$), наклон волнового луча относительно направления изменения проводимости α меняется в соответствии с формулой

$$\frac{\sin \alpha(y)}{b(y)} = \text{const1} = \frac{\sin \alpha_0}{b(y_0)}. \quad (2.2)$$

Здесь α_0 — это начальный угол наклона волнового луча относительно вертикали в точке, где $y = y_0$. В случае наклонного дна проводимость среды (скорость распространения волн цунами) определяется по формуле Лагранжа (1.3), которая в случае наклонного дна имеет вид

$$b(y) = \sqrt{gy \operatorname{tg} \beta}, \quad (2.3)$$

где g — ускорение силы тяжести, β — угол наклона дна, y — расстояние до береговой линии, где $y = 0$. Следовательно, связь между углом наклона луча (оптимальной траектории) и расстоянием до берега будет иметь вид

$$\sin^2 \alpha = y \left(\frac{g \operatorname{tg} \beta \sin^2 \alpha_0}{b(y_0)^2} \right) = y \left(\frac{\sin^2 \alpha_0}{y_0} \right) = \text{const2} y, \quad (2.4)$$

где величина константы определяется из наклона луча на расстоянии y_0 до берега (оси $0x$). Если считать α параметром, от которого зависит y , то из (2.4) следует

$$dy = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\text{const2}} d\alpha. \quad (2.5)$$

Так как величина $(\pi/2 - \alpha)$ является углом наклона волнового луча (графика функции $y(x)$) к горизонтальному направлению, то по определению производной функции одной переменной выполняется равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

или

$$dx = dy \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует

$$dx = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\text{const}2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} d\alpha = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\text{const}2} d\alpha. \tag{2.7}$$

Таким образом, считая, что x и y зависят от параметра $u = 2\alpha$, и используя тригонометрические формулы для синуса и косинуса двойного угла, получим из (2.5) и (2.7) следующие формулы:

$$dy = \frac{\sin u}{2 \text{const}2} du, \quad dx = \frac{1 - \cos u}{2 \text{const}2} du. \tag{2.8}$$

После интегрирования равенств (2.8) получаются уравнения траектории волнового луча в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x(u) &= r(u - \sin u) + C_2, \\ y(u) &= r(C_3 - \cos u), \quad u \in [0, 2\pi], \\ r &= 1/(2 \cdot \text{const}2) = y_0/2\sin^2\alpha_0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Это есть параметрическая форма уравнения циклоиды. Здесь константы C_2, C_3 определяются из условия прохождения циклоиды через точку начала координат. В точке $(0,0)$ параметр u принимает нулевое значение. Это вытекает из закона Снеллиуса для рассматриваемого рельефа дна (2.4). При $y = 0$ угол α , а вместе с ним и параметр $u = 2\alpha$, становится равным нулю. Поэтому $C_2 = 0, C_3 = 1$. Окончательно уравнения волнового луча в параметрическом виде запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x(u) &= r(u - \sin u), \\ y(u) &= r(1 - \cos u), \quad u \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

При записи уравнений в таком виде параметр u является удвоенным углом наклона луча относительно нормали к береговой линии, а значение коэффициента r определяется для каждого конкретного случая. Если решается краевая задача для волнового луча, то значение параметра r определяется из условия прохождения луча через точку (x_1, y_1) , при этом вторая точка — это начало координат. Если ищется волновой луч, который на расстоянии y_1 от берега был направлен под углом α_1 относительно нормали к береговой линии (оси $0x$), то из (2.4) и (2.9) следует, что

$$r = \frac{y_1}{2 \sin \alpha_1}.$$

Таким образом, мы нашли уравнения, описывающие волновой луч над наклонным дном, исходя из законов движения луча в среде с переменной проводимостью.

3. Нахождение высоты волны цунами в лучевом приближении

Для некоторых модельных рельефов дна распределение амплитуд (высот) волны может быть найдено аналитически. Например, рассмотрим задачу: в прибрежной области, где глубина линейно растёт с расстоянием до берега, имеется модельный источник цунами в виде круга радиусом R_0 с центром, находящимся на расстоянии y_{00} от прямолинейной береговой линии, которая на рис. 3.1 совпадает с осью абсцисс ($y = 0$).

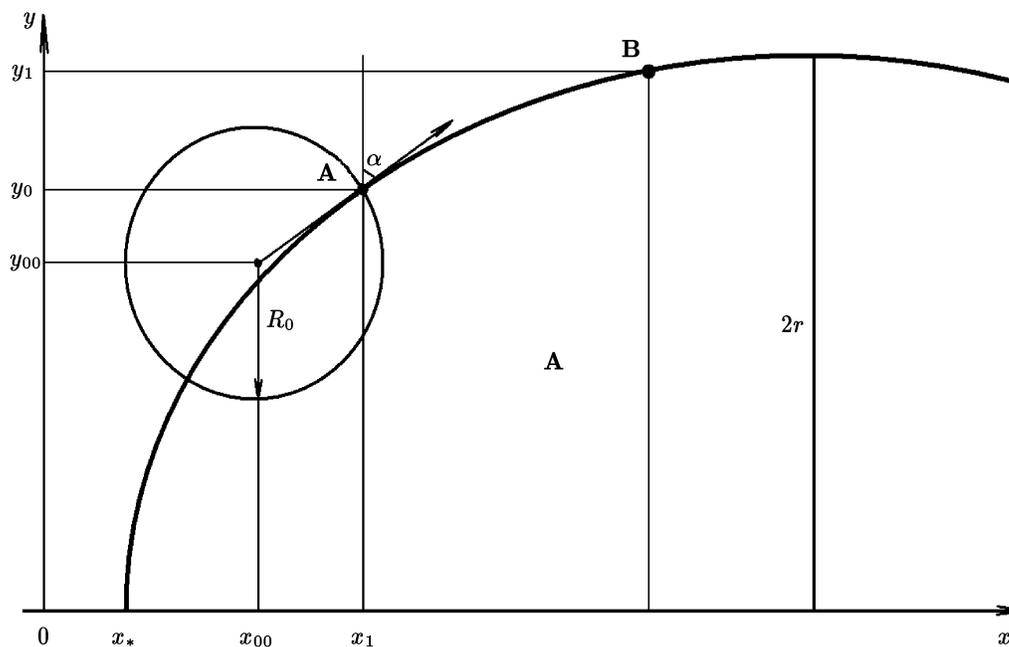


Рис. 3.1. Траектория волнового луча над наклонным дном, имеющего в точке **A** наклон относительно оси ординат, равный α

В п. 2 была найдена траектория волнового луча над наклонным дном, каковым оно и является в данном случае. Если глубина задаётся формулой

$$D(x, y) = ay, \quad (3.1)$$

то траектория волнового луча, как было выяснено, имеет вид циклоиды, уравнения которой в параметрическом виде имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= r(u - \sin u) + x_*, \\ y &= r(1 - \cos u). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь x_* — абсцисса выхода циклоиды на берег, r — её радиус, который определяется из условия прохождения циклоиды через заданные точки или через угол её наклона на каком-либо расстоянии от берега. Величина параметра u равна удвоенному углу наклона циклоиды относительно вертикального направления. Все параметры циклоиды легко определяются, если в какой-либо точке на циклоиде известен угол между вертикалью и касательной к циклоиде.

Итак, требуется построить волновой луч, выходящий под углом α из точки (x_0, y_0) , расположенной на границе круглого источника цунами с радиусом R_0 , центр которого имеет координаты (x_{00}, y_{00}) (см. рис. 3.1). В этом случае координаты точки выхода запишутся в виде:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_{00} + R_0 \sin \alpha, \\ y_0 &= y_{00} + R_0 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ситуация, когда из точки $\mathbf{A}(x_0, y_0)$ циклоида идёт по восходящей, несколько отличается от ситуации, когда она идёт по нисходящей. Рассмотрим сначала случай, когда значения угла α находятся в интервале $(0, \pi/2)$. Эта ситуация и отображена на рис. 3.1. Из формул (3.2) легко вычисляется радиус циклоиды

$$r = \frac{y_0}{1 - \cos 2\alpha}. \quad (3.4)$$

Попробуем получить формулу для времени движения волны вдоль этой циклоиды из точки (x_0, y_0) в точку (x_1, y_1) . В точке выхода \mathbf{A} значение параметра u равно:

$$u = 2\alpha. \quad (3.5)$$

Эта циклоида берёт начало на береговой линии в точке $(x_*, 0)$ (рис. 3.1):

$$x_* = x_{00} + R_0 \sin \alpha - \frac{y_0}{1 - \cos 2\alpha} (2\alpha - \sin 2\alpha). \quad (3.6)$$

Получив радиус циклоиды из формулы (3.4), а также выразив скорость волны через рельеф дна (3.1) и формулу Лагранжа (1.3), можно записать время движения волны вдоль этой циклоиды из точки $\mathbf{A}(x_0, y_0)$ до точки $\mathbf{B}(x_1, y_1)$ в виде интеграла Ферма:

$$\begin{aligned} T &= \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{gay}} = \int_A^B \frac{\sqrt{(r - r \cos u)^2 + (-r \sin u)^2}}{\sqrt{gar(1 - \cos u)}} du = \int_A^B \frac{r \sqrt{2(1 - \cos u)}}{\sqrt{gar(1 - \cos u)}} du \\ &= (u_B - u_A) \sqrt{\frac{2r}{ga}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где u_B и u_A — значения параметра циклоиды в точках \mathbf{B} и \mathbf{A} соответственно. Значение параметра в точке \mathbf{B} легко находится из (3.2):

$$u_B = \arccos \left(1 - \frac{y_1}{r} \right). \quad (3.8)$$

При этом значение параметра u_A , как уже отмечалось, равно 2α . Окончательно получаем выражение для времени движения волны из точки $\mathbf{A}(x_0, y_0)$ в точку $\mathbf{B}(x_1, y_1)$:

$$T = \sqrt{\frac{2r}{ga}} \left(\arccos \left(1 - \frac{y_1}{r} \right) - 2\alpha \right). \quad (3.9)$$

Здесь радиус циклоиды r определяется из (3.4).

Поставим теперь задачу по-другому. Пусть задано время движения волны из точек начального кругового фронта. Требуется найти координаты точек вдоль соответствующих волновых лучей, куда волна дойдёт за время T . Для этого сначала из уравнения (3.7) выразим u_B через параметры циклоиды и время T . В результате получим

$$u_{\mathbf{B}} = u_{\mathbf{A}} + T \sqrt{\frac{ga}{2r}} = 2\alpha + T \sqrt{\frac{ga}{2r}} = 2\alpha + \sqrt{\frac{ga(1 - \cos \alpha)}{2y_0}}. \quad (3.10)$$

Теперь из формул (3.2) легко найти координаты находящейся на рассматриваемом волновом луче точки волнового фронта на момент времени T :

$$x_1 = \frac{y_0}{1 - \cos 2\alpha} \left(2\alpha + \sqrt{\frac{ga(1 - \cos \alpha)}{2y_0}} - \sin \left(2\alpha + \sqrt{\frac{ga(1 - \cos \alpha)}{2y_0}} \right) \right) + x_*, \quad (3.11)$$

$$y_1 = \frac{y_0}{1 - \cos 2\alpha} \left(1 - \cos \left(2\alpha + \sqrt{\frac{ga(1 - \cos \alpha)}{2y_0}} \right) \right). \quad (3.12)$$

Если угол α выхода волнового луча из точки (x_0, y_0) находится в интервале $\pi/2 > \alpha > \pi$, тогда формулы (3.11) и (3.12) немного изменятся и запишутся в виде:

$$x_1 = \frac{y_0}{1 - \cos 2\alpha} \left(2\alpha - \sqrt{\frac{ga(1 - \cos \alpha)}{2y_0}} - \sin \left(2\alpha - \sqrt{\frac{ga(1 - \cos \alpha)}{2y_0}} \right) \right) + x_*, \quad (3.13)$$

$$y_1 = \frac{y_0}{1 - \cos 2\alpha} \left(1 - \cos \left(2\alpha - \sqrt{\frac{ga(1 - \cos \alpha)}{2y_0}} \right) \right). \quad (3.14)$$

Таким образом, получены координаты точки назначения в зависимости от времени T и угла α . Теперь по формулам (3.9) и (3.10) можно найти положение волнового фронта, зафиксировав время T и перебрав значения α по всему интервалу $(-\pi, +\pi)$ с достаточно маленьким шагом $\Delta\alpha$. Здесь следует иметь в виду, что в случае кругового начального фронта цунами величина x_* и координаты точек выхода волнового луча (x_0, y_0) будут меняться в соответствии с формулами (3.6) и (3.3).

Для того, чтобы оценить высоту волны в точке (x_1, y_1) , куда за время T волна распространится вдоль волнового луча, выходящего из точки $(x_{00} + R_0 \sin \alpha, y_{00} + R_0 \cos \alpha)$ под углом α , надо найти координаты точки назначения, до которой волна за то же время дойдёт вдоль волнового луча, выходящего из соседней точки $(x_{00} + R_0 \sin(\alpha + \Delta\alpha), y_{00} + R_0 \cos(\alpha + \Delta\alpha))$ под углом $\alpha + \Delta\alpha$ к вертикальному направлению. Затем надо посчитать по формулам (1.19) и (1.14) коэффициент ослабления волны за счёт изменения ширины лучевой трубки и вследствие изменения глубины. Прделав это для разных значений времени T и для разных направлений выхода волновых лучей, получим распределение величины коэффициента ослабления волны во всей области, куда способны дойти волновые лучи из точек начального волнового фронта.

Для проверки правильности полученного решения было проведено численное моделирование распространения волны цунами по дифференциальной модели мелкой воды с использованием пакета MOST [5]. В этом численном эксперименте центр кругового очага радиусом 40 км располагался на расстоянии 300 км от берега. Такой очаг формировал круговую волну, имевшую высоту 75 см на расстоянии 43.6 км от центра источника. Именно такой начальный фронт был взят в качестве начальных условий для вычисления амплитуд по лучевой модели. На рис. 3.2 серым цветом нарисованы изолинии распределения максимумов высоты волны цунами в прибрежной области 1000×1000 км при наличии наклонного дна, полученные с помощью формул (3.11)–(3.14), а также (3.2). Здесь же для сравнения чёрным цветом нанесены соответствующие тому же набору значений изолинии максимумов высоты волны, полученные в результате численного решения той

же задачи по модели мелкой воды. В обоих случаях значения уровней на изолиниях, высота на которых на рис. 3.2 отображена в сантиметрах, были взяты с шагом 5 см. Из рисунка видно, что распределение амплитуд, полученных двумя разными методами, в основном совпадает, кроме полосы вдоль берега, где в отличие от лучевого приближения численная реализация дифференциальной модели мелкой воды использует на береговой линии граничные условия полного отражения, что приблизительно удваивает высоту пришедшей туда волны.

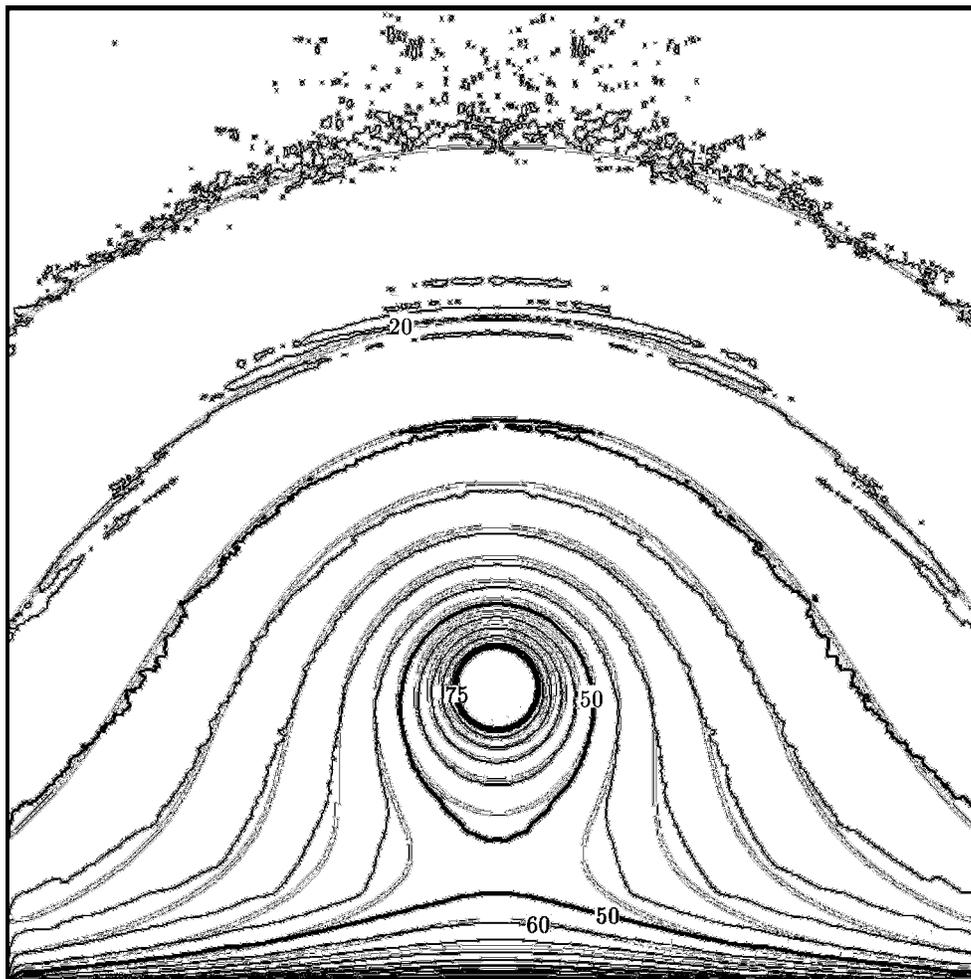


Рис. 3.2. Сравнительное расположение изолиний максимумов высоты цунами, рассчитанных по модели мелкой воды (черный цвет) и в лучевом приближении (серый цвет)

4. Заключение

Исходя из дифференциальных уравнений мелкой воды, найдена зависимость высоты распространяющейся волны цунами от глубины и рефракции над неровным дном. Найдена точная траектория волнового луча над наклонным дном. Приведённое в работе сравнение результатов, полученных лучевым методом, с результатами расчёта по модели мелкой воды показывает, что с помощью численного метода, базирующегося на лучевом

приближении, можно получать оценки не только времени прихода цунами в различные точки, но и высоту волны там.

Литература

1. **Стокер Дж.Дж.** Волны на воде. — М.: ИЛ, 1959.
2. **Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.** Численное моделирование волн цунами. — Новосибирск: Сиб. отд-ние издательства “Наука”, 1983.
3. **Романов В.Г.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Учебное пособие. — Новосибирск: НГУ, 1983.
4. **Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.** Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
5. **Titov V.V., Gonzalez F.** Implementation and testing of the method of splitting tsunamis (MOST) // Technical Memorandum ERL PMEL-112, National Oceanic and Atmospheric Administration. — Washington DC, 1997.

*Поступила в редакцию 24 марта 2015 г.,
в окончательном варианте 19 мая 2015 г.*

Литература в транслитерации

1. **Stoker Dzh.Dzh.** Volny na vode. — М.: ИЛ, 1959.
2. **Marchuk An.G., Chubarov L.B., Shokin Yu.I.** Chislennoe modelirovanie voln tsunami. — Novosibirsk: Sib. otd-nie izdatel'stva “Nauka”, 1983.
3. **Romanov V.G.** Obratnye zadachi dlya differentsial'nykh uravnenij. Uchebnoe posobie. — Novosibirsk: NGU, 1983.
4. **Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I.** Geometricheskaya optika neodnorodnykh sred. — М.: Nauka, 1980.
5. **Titov V.V., Gonzalez F.** Implementation and testing of the method of splitting tsunamis (MOST) // Technical Memorandum ERL PMEL-112, National Oceanic and Atmospheric Administration. — Washington DC, 1997.