УДК 517.958.532

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

И. Б. Давыдкин, В. Н. Монахов*

Горно-Алтайский государственный университет, 659700 Горно-Алтайск
* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Доказаны теоремы существования решений задач нелинейной безнапорной фильтрации жидкости в областях со сложной геометрией заданных участков границы. Другим приложением построенной теории является конструирование подземного контура гидротехнического сооружения по заданным на нем фильтрационным характеристикам.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, свободная граница, простой полигон, теорема существования.

Нелинейный закон сопротивления пористой среды движущейся в ней жидкости (закон Дарси) предложен С. А. Христиановичем (1940), установившим аналогию полученной модели нелинейным уравнениям дозвуковой газовой динамики. Модель С. А. Христиановича получила широкое применение при описании движений нефти в пористом пласте. Теоремы существования решений задач нелинейной фильтрации жидкости со свободными границами впервые доказаны В. Н. Монаховым (1961) методами теории квазиконформных отображений. В данной работе аналогичные результаты установлены для областей фильтрации со сложной геометрией заданных частей ее границы.

1. Постановка задачи. Физические аспекты задачи безнапорной фильтрации и подробный обзор результатов ее исследования имеются в монографиях [1, 2] и обзоре [3].

Процесс стационарной нелинейной фильтрации жидкости в неоднородной пористой среде (грунте) описывается следующей эллиптической системой уравнений, решения которой осуществляют квазиконформные отображения [4]:

$$-\boldsymbol{v} = K(z, \varphi, \nabla\varphi)\nabla\varphi, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \qquad (\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)). \tag{1}$$

Здесь K — симметричный тензор фильтрации с дифференцируемыми по аргументам компонентами; $z = x + iy$; $\xi = \varphi_x + i\varphi_y$; φ — потенциал (пьезометрический напор) жидкости. Полагая $a_{ij} = \partial v_i/\partial\xi_j$ ($\xi_1 = \varphi_x$, $\xi_2 = \varphi_y$) и $\alpha_{ij} = \int\limits_0^1 a_{ij}(z, \varphi, s\xi)\, ds$, приходим к представлению $K = \{a_{ij}\}$ [4]. При этом предполагается, что квадратичная форма $\Lambda(\xi, \lambda) = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$, а следовательно, и $\Lambda_0(\xi, \lambda) = (K\lambda, \lambda) = \int\limits_0^1 \Lambda(s\xi, \lambda)\, ds$ являются положительно определенными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00645) и в рамках программы “Университеты России” (код проекта 04.01.038).

Вводя функцию тока $\psi(x,y) \equiv \psi(x_1,x_2)$, уравнения (1) можно представить в виде

$$\psi_y = \sum_{i=1}^{2} \alpha_{1i}\varphi_{x_i} = v_1, \qquad -\psi_x = \sum_{i=1}^{2} \alpha_{2i}\varphi_{x_i} = v_2$$

или в эквивалентной форме для функции $z = z(w)$, $w = \varphi + i\psi$

$$z_{\bar{w}} - m_1(w,z,\sigma)z_w - m_2(w,z,\sigma)\bar{z}_{\bar{w}} = 0, \qquad \sigma = z_w, \tag{2}$$

где m_i выражаются явно через непрерывно дифференцируемые по всем аргументам компоненты α_{ij} тензора K. При этом согласно [5] уравнение для функции $z(w)$ может быть глобально разрешено относительно $z_{\bar{w}}$, что и отражено в записи (2). Дифференцируя обе части равенства (2) по w, приходим к следующему производному уравнению для σ:

$$\sigma_{\bar{w}} - n_1(w,z,\sigma)\sigma_w - n_2(w,z,\sigma)\bar{\sigma}_{\bar{w}} = \sum_{k+l=0}^{2} b_{kl}\sigma^k\bar{\sigma}^l, \tag{3}$$

где n_i, b_{kl} выражаются через m_i и их производные [4].

Предположения о дифференцируемости тензора K и положительной определенности $\Lambda(\xi,\lambda)$ и $\Lambda_0(\xi,\lambda)$ можно записать в форме [4, 5]

$$\sup\left(\|m\|, \|n\|\right) < 1, \qquad \|b\| < \infty, \tag{4}$$

где $m = (m_1, m_2)$, $n = (n_1, n_2)$, $b = \{b_{kl}\}$ — векторы и матрица коэффициентов уравнений (2), (3) соответственно; $\|\varphi\| = \sup\sum_{k=1}^{s}|\varphi_k|$; $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$. Как показано в [5], система (2)–(4) соответствует общему нелинейному эллиптическому уравнению.

Пусть безнапорная фильтрация жидкости происходит в области D, ограниченной заданным полигоном P с вершинами z_k и углами $\alpha_k\pi$, $0 < \delta \leqslant \alpha_k \leqslant 2$, $k = \overline{0, n+1}$ и неизвестной кривой L — границей между смоченной и не смоченной жидкостью частями пористой среды. Заданный полигон P состоит из непроницаемых участков P^1 и контактных границ P^2 с неподвижной жидкостью, в которые включаются и горизонтальные промежутки высачивания. Искомый комплексный потенциал фильтрации $w = \varphi + i\psi$ удовлетворяет следующим краевым условиям на $\partial D = P^1 \cup P^2 \cup L$:

$$\psi = \psi_1, \quad z \in P^1, \qquad \varphi = \varphi_1, \quad z \in P^2,$$
$$\varphi + x = \varphi_0 = \text{const}, \qquad \psi = \psi_0 = \text{const}, \qquad z \in L,$$

где φ_1, ψ_1 — кусочно-постоянные функции на $P^1 \cup P^2$. Граничными условиями определяется прообраз D^* области фильтрации D ($D = z(D^*)$) при квазиконформном отображении $z = z(w)$ решением уравнения (2). При этом граница ∂D^* состоит из отрезков прямых $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$.

Другим примером такого рода задач может служить задача о построении контура L бетонного гидротехнического сооружения по заданной на L эпюре напоров или распределению расхода (дренажный слой):

$$\varphi = \varphi(x), \quad \psi = \text{const} \qquad \text{или} \qquad \varphi = \text{const}, \quad \psi = \psi(x).$$

Впервые частные задачи такого типа в классе аналитических функций решены Н. И. Кочиной и П. Я. Полубариновой-Кочиной, результаты изложены в монографии [1, с. 186–201]. Общая задача построения неизвестного участка L границы области D определения аналитической функции $w(z) = \varphi + i\psi$ поставлена и решена В. Н. Монаховым [6, гл. 3]:

$$G(\varphi,\psi) = 0, \quad z \in P, \qquad w = g(x), \quad z \in L. \tag{5}$$

При этом, как и в сформулированных выше задаче безнапорной фильтрации жидкости и задаче о построении контура бетонной плотины, в плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ граничными условиями (5) определяется образ D^* области фильтрации D $(D^* = w(D))$.

2. Однородный грунт. Стационарная фильтрация жидкости в однородном грунте описывается аналитической функцией $w(z) = \varphi + i\psi$ — комплексным потенциалом фильтрации. Построим конформное отображение $w = W(\zeta)$, W: $E \to D^*$ верхней полуплоскости E: $\operatorname{Im}\zeta > 0$ на заданную область D^*, граница $\partial D^* = P^* \cup L^*$ которой определяется краевыми условиями (5).

2.1. *Дифференцируемые граничные данные.* Предположения: (i) полигон $P \subset \partial D$ является простым [7]; (ii) кривые $(P^*, L^*) \subset D^*$, заданные уравнениями (5), являются ляпуновскими: $(P^*, L^*) \subset C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, и в точках их стыка w_0, w_{n+1} имеют внутренние углы $\gamma_k\pi$, $0 < \delta \leqslant \gamma_k \leqslant 2$, $k = 0, n+1$.

При выполнении предположений (i), (ii) согласно [6, с. 110] производная $\omega \equiv dz/d\zeta$ конформного отображения z: $E \to D$ удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}[\mathrm{e}^{i\pi(1/2-\delta_k)}\,\omega(t)] = 0, && t \in [t_k, t_{k+1}], \\ &\operatorname{Re}\omega(t) = h(t) \equiv \Pi_0(t)h_*(t), && l\colon |t| > 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\delta_k\pi$ — угол наклона k-й стороны полигона P; t_k — прообразы вершин $z_k \in P$; $t_0 = -1 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = 1$; $\Pi_0(t) = \prod\limits_{k=0,n+1} (t - t_k)^{\gamma_k - 1}$; $\ln h_*(t) \in C^\alpha(l)$, $\alpha > 0$; $\alpha_k - \gamma_k < 1 - \delta$, $k = 0, n+1$; $\delta > 0$ — характеристика простого полигона.

Решение задачи (6) представляется в виде

$$\omega = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\Pi(\zeta)}{\pi i} \int\limits_{|t|>1} \frac{h(t)\,dt}{\Pi(t)(t-\zeta)} \equiv \Pi(\zeta)M(\zeta), \tag{7}$$

где $\Pi = \prod\limits_{k=0}^{n+1} (\zeta - t_k)^{\alpha_k - 1}$; $\alpha_k\pi$ — внутренние углы в вершинах $z_k \in P$ [6, с. 111]. Неизвестные постоянные t_k, $k = \overline{1, n}$ должны находиться из следующей системы уравнений, определяющей геометрию полигона P:

$$l_k = |z_{k-1} - z_k| = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |\Pi(t)||M(t)|\,dt, \qquad k = \overline{1, n}.$$

Как установлено в [6], параметры t_k однозначно определяются, и для них справедливы неравенства

$$|t_{k+1} - t_k| > \varepsilon > 0, \qquad k = \overline{0, n}, \tag{8}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\|h_*\|^{(\alpha)}, \delta)$; $\delta > 0$ — постоянная в определении простого полигона [7]; $\|\varphi\|^{(\alpha)} = \|\varphi\|^{(\alpha)}_\Omega = \|\varphi\|_{C^\alpha(\Omega)}$.

Введем весовую функцию $\Pi_* = \prod\limits_{k=0}^{n+1} (\zeta - t_k)^{\beta_k}$. Здесь $\beta_k = 0$ при $\alpha_k \geqslant 1$, $\beta_k = 1 - \alpha_k$ при $\alpha_k < 1$, когда $k = \overline{1, n}$. Если $k = 0, n+1$, то $\beta_k = 0$ при $1 < \alpha_k < \gamma_k$, $\alpha_k \geqslant \gamma_k \geqslant 1$; $\beta_k = 1 - \alpha_k$ при $\alpha_k < \gamma_k \leqslant 1$, $\alpha_k \leqslant 1 \leqslant \gamma_k$; $\beta_k = 1 - \gamma_k$ при $\alpha_k \geqslant 1 \geqslant \gamma_k$. Тогда из представления (7) следует оценка

$$\|\Pi_* z_\zeta\|^{(\nu)}_E = C(\varepsilon) < \infty, \qquad \nu = \nu(\alpha, \alpha_k) > 0. \tag{9}$$

2.2. *Граничные данные из* C^α. Рассмотрим следующую краевую задачу для функции $z(\zeta)$:

$$z(s) = P, \quad s\colon |t| < 1, \qquad \operatorname{Re} z = H(t), \quad l\colon |t| > 1, \tag{10}$$

где $H(t) \in C^\alpha(l)$, $\alpha > 0$.

Выберем функции $H_m(t) \in C^{1+\alpha}(l)$ так, чтобы $\|H_m - H\|_l^{(\alpha)} \to 0$ при $m \to \infty$, и положим $h_m = dH_m/dt \in C^\alpha(l)$.

Производная $dz_m/d\zeta$ конформного отображения $z_m\colon E \to D_m$ удовлетворяет краевой задаче вида (6) с $h = h_m(t)$, $|t| > 1$ и представляется в форме (7). Тогда

$$z = \int\limits_{-1}^{\zeta} \Pi_m(\zeta) M_m(\zeta)\, d\zeta \equiv F_m(\zeta), \tag{11}$$

$\Pi_m = \prod\limits_{k=0}^{n+1} (\zeta - t_k^m)^{\alpha_k - 1}$, $M_m = M(\zeta)$ при $h\Pi^{-1} = h_m \Pi_m^{-1}$, причем искомые постоянные t_k^m удовлетворяют неравенствам

$$|t_{k+1}^m - t_k^m| > \varepsilon_m > 0, \qquad k = \overline{0, n}. \tag{12}$$

Заметим, что если оценки (12) выполняются равномерно относительно m ($\varepsilon_m \geqslant \varepsilon_0 > 0$), то первое условие в (10) может быть представлено в виде

$$\operatorname{Re}[\mathrm{e}^{i\pi(1/2 - \delta_k)}(z - z_k)] = 0, \qquad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Решая краевую задачу

$$\operatorname{Im} F_m = f_m(t), \quad |t| < 1, \qquad \operatorname{Re} F_m = H_m(t), \quad |t| > 1$$

и полагая $f_m(t) \equiv 0$, $|t| > 1$ и $H_m(t) \equiv 0$, $|t| < 1$, запишем функцию $F_m(\zeta)$ из (11) в виде

$$F_m = B(H_m + i f_m|\zeta), \qquad B(\varphi|\zeta) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\, dt}{\sqrt{1-t^2}(t-\zeta)}. \tag{13}$$

Согласно свойствам интеграла типа Коши $B(\varphi|\zeta)$ в (13) имеем

$$\|B(H_m|t)\|_l^{(\alpha_0)} \leqslant C(\|H_m\|_l^{(\alpha_0)}) \leqslant C_0(\|H\|_l^{(\alpha_0)}) < \infty, \qquad \alpha_0 = \min(1/2, \alpha) > 0.$$

В то же время

$$|B(i f_m|t)| \leqslant |F_m| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |z_{k+1} - z_k| = |P|, \qquad |t| < 1,$$

$$|B(i f_m|t)| \leqslant \max_\tau |f_m(\tau)| \, \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t)} = \max_\tau |f_m(\tau)| \leqslant |P|, \quad t < -1.$$

Аналогичная оценка имеет место и при $t > 1$. Следовательно, для аналитических функций $F_m(\zeta)$ в форме (13) имеет место равномерная оценка

$$|F_m(t)| \leqslant |P| + C_0, \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{14}$$

которая, очевидно, сохраняется и во всей области E: $\operatorname{Im} \zeta > 0$.

Из компактной в силу (14) последовательности аналитических функций $\{F_m(\zeta)\}$ выделим равномерно сходящуюся при $\operatorname{Im}\zeta > 0$ подпоследовательность $\{F_{m_k}(\zeta)\}$. Легко убедиться, что предельная функция $z = F_0(\zeta)$ удовлетворяет краевой задаче (10) [6, с. 130, 131].

Для любой функции $\varphi(\zeta) \in W_p^1(E)$, $p > 1$ через $\varphi(t) \in SW_p^1(\Gamma)$ обозначим ее след на $\Gamma \subset \partial E$. Положим $Q_\rho = \{\zeta\colon |\operatorname{Re}\zeta| > 1 + \rho,\ \operatorname{Im}\zeta > \rho\}$. Доказана

Теорема 1. *Существует по крайней мере одно решение* $z = F_0(\zeta)$ *краевой задачи* (10) *для аналитических функций, удовлетворяющее оценке* (14).

Если $H(t) \in SW^1_{p>2}(l)$ *или* $H(t) \in C^\alpha(l)$, $\alpha > 0$, *то соответственно* $z(\zeta) \in W^1_{p_0>2}(Q_\rho)$ *или* $z(\zeta) \in C^{\alpha_0}(Q_\rho)$, $p_0 = p_0(p, \delta)$, $\alpha_0 = \alpha_0(\alpha, \delta)$, *где* $\delta > 0$ — *характеристика простого полигона* P.

3. Неоднородный грунт. Пусть теперь в уравнении (2) коэффициенты не зависят от $\sigma = z_w$, что соответствует случаю неоднородного грунта при квазилинейном законе Дарси, т. е. в (1) $K = K(z, \varphi)$.

В работе [8] доказана разрешимость задачи (2), (10) и установлены внутренние оценки квазиконформного отображения $z\colon D^* \to D$. Здесь также будут получены некоторые оценки вплоть до границы. Как и в п. **2**, построим конформное отображение $w = W(\zeta)$, $W\colon E \to D^*$ верхней полуплоскости E на область D^*. В силу предположения 2 $(P^*, L^*) \subset C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$ и, следовательно,

$$\frac{dW}{d\zeta} = \prod_{k=0,n+1} (\zeta - t_k)^{\gamma_k - 1} R(\zeta), \qquad \ln R \in C^\alpha(E).$$

Тогда уравнение (2) приводится к виду

$$z_{\bar\zeta} - \mu_1 z_\zeta - \mu_2 \bar z_{\bar\zeta} = 0, \qquad \|\mu\| < 1, \tag{15}$$

где $\mu_1(\zeta, z) = m_1 \bar w_{\bar\zeta}/w_\zeta$; $\mu_2(\zeta, z) = m_2$; $\mu = (\mu_1, \mu_2)$.

Пусть $z = F(\zeta)$, $F\colon E \to D$ — искомое квазиконформное отображение уравнения (15). Подставим в коэффициенты (15) произвольную измеримую функцию $z^0(\zeta)$ и рассмотрим квазиконформное отображение $\xi = \xi(\zeta)$, $\xi\colon E \to E$ с нормировкой $\xi(t_k) = t_k$, $k = 0, n+1$ и $\xi(\infty) = \infty$, удовлетворяющее уравнению вида (15):

$$\xi_{\bar\zeta} - \mu_1^0 \xi_\zeta - \mu_2^0 \bar z_{\bar\xi}/(z_\xi \bar\xi_{\bar\zeta}) = 0, \qquad \mu_k^0 = \mu_k[\zeta, z^0(\zeta)].$$

По построению $z_{\bar\xi} = 0$, т. е. $z = F[\zeta(\xi)] \equiv F_0(\xi)$ является аналитической функцией. Поскольку $\zeta(\xi) \in W^1_{p_0}$, $p_0 = p_0(m_0) > 2$, то $z = F_0(\xi)$ удовлетворяет граничным условиям (10) с $H[t(\tau)] \equiv H_0(\tau) \in SW^1_{p>2}(l)$, $l\colon |\tau| > 1$, $p = p(p_0, m_0)$. Тогда согласно теореме 1 $z = F_0(\xi) \in W^1_{p>2}(Q_\rho)$.

Возвращаясь к переменной ζ, получим следующую оценку решения задачи (10), (15):

$$\|z(\zeta)\|^{1,p}_{Q_\rho} = C(\delta, m_0, \rho) < \infty, \qquad p > 2, \tag{16}$$

где $\|\varphi\|^{1,p}_\Omega = \|\varphi\|_{W_p^1(\Omega)}$; δ — характеристика $P \subset \partial D$.

Как показывает проведенный в [6, 8] анализ, функции $H(t)$ в (5) и $g(x)$ в (2) имеют одинаковую гладкость. Поэтому необходимые условия будем формулировать непосредственно в терминах функции $H(t)$. Применяя доказанную в [8] теорему, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть* $H(t) \in SW^1_{p>2}(l)$ *и* $\mu_k(\zeta, z) \in C^\alpha(E \times D_0)$, $\alpha > 0$, $k = 1, 2$, *где* $\partial D_0 = P \cup P_0 \cup P_{n+1}$, $P_j = \{z\colon x = x_j,\ y < y_j\}$, $j = \overline{0, n+1}$. *Тогда задача* (10), (15) *для простого полигона* P (*условие* 1) *имеет по крайней мере одно решение* $z = F(\zeta)$, $F\colon E \to D$ *и для него справедлива оценка* (16).

Если $dH/dt = \Pi_0(t)h_*(t)$, $\ln h_* \in C^\alpha(l)$ *и* $\mu_k(\zeta, z) \in C^\alpha(E \times D_0)$, $\alpha > 0$, $k = 1, 2$, *то* $\omega = z_\zeta$ *удовлетворяет краевой задаче* (6), *в которой* t_k *подчинены неравенствам* (8), *причем*

$$\|z(\zeta)\|^{1,p}_{Q_\rho} \leqslant C, \qquad \|\Pi_* z_\zeta\|^{(\nu)}_{Q_\rho} \leqslant C(\varepsilon, m_0, \rho), \quad \nu > 0, \tag{17}$$

где весовая функция Π_* *определена после формулы* (8).

Замечание. Используя разработанный в [6, с. 275–279] метод построения квазиконформных отображений, можно существенно ослабить требования на коэффициенты $\mu_k(\zeta, z)$ в первой части теоремы 2, предполагая лишь их непрерывность по z при почти всех $\zeta \in E$.

4. Задачи нелинейной фильтрации в канонической области. Так же, как п. **3**, преобразуем уравнение (2) к переменной ζ с помощью конформного отображения $w = W(\zeta)$, $W\colon E \to D^*$. В результате получим нелинейное уравнение

$$z_{\bar\zeta} - \mu_1 z_\zeta - \mu_2 \bar z_{\bar\zeta} = 0, \qquad \|\mu\| < 1, \tag{18}$$

где $\mu_k(\zeta, z, \omega) \equiv m_k(W, z, \omega W_\zeta^{-1})(\bar W_{\bar\zeta} W_\zeta^{-1})^{2-k}$, $k = 1, 2$, $\omega = z_\zeta$. Будем рассматривать уравнение (18) для $z = F(\zeta)$, $F\colon E \to D$ как исходное уравнение нелинейной фильтрации (2) для функции $z = z(w)$, $w \in D^*$. Поэтому и условия на тензор фильтрации $K(z, \varphi, \nabla\varphi)$ в (1) запишем в терминах коэффициентов μ_k уравнения (18). Продифференцируем формально (18) по ζ и представим полученное производное уравнение в виде

$$\omega_{\bar\zeta} - q_1 \omega_\zeta - q_2 \bar\omega_{\bar\zeta} = \sum_{k+l=0}^{2} a_{kl} \omega^k \bar\omega^l \equiv a, \qquad \|q\| < 1, \tag{19}$$

где $q = (q_1, q_2)$; $\|q\| = \sup(|q_1| + |q_2|)$.

Отметим, что неравенство в (19) является условием эллиптичности нелинейного уравнения (18).

Предположение: (iii) $\mu_k(\zeta, z, \omega) \in C^1(E \times D_0 \times \mathbb{C})$, $k = 1, 2$, где $\partial D_0 = P \cup P_0 \cup P_{n+1}$, $P_j = \{z\colon x = x_j,\ y < y_j\}$, $j = \overline{0, n+1}$.

Очевидным следствием условия (iii) является неравенство $\sup|a_{kl}| < \infty$.

Для ограниченности $\mu_{k\zeta}$ необходимо существование производной $W_{\zeta\zeta}$, что приводит к следующему усилению предположения (ii): $(P^*, L^*) \subset C^{2+\alpha}$, $\alpha > 0$. Поскольку в задачах фильтрации граница $\partial D^* = P^* \cup L^*$ состоит из отрезков прямых $\varphi = \mathrm{const}$, $\psi = \mathrm{const}$, то производная $W_{\zeta\zeta}$ ограничена при $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$, за исключением прообразов $\zeta = \pm 1$ точек $(w_0, w_{n+1}) \subset P^* \cap L^*$. Наличие особенностей $\mu_{k\zeta}$ в точках $\zeta = \pm 1$ приводит к непринципиальному усложнению последующих построений. Для того чтобы $\mu_{k\zeta}$ были ограничены в точках $\zeta = \pm 1$, достаточно, например, предположить, что $m_k(w, z_j, \sigma) = 0$, $j = \overline{0, n+1}$. В дальнейшем для решений $z(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ уравнений (18) и (19) будет рассматриваться краевая задача (6) с функцией $dH/dt = \Pi_0(t)h_*(t)$, $\ln h_* \in C^\alpha(l)$, свойства которой определяются лишь гладкостью граничных функций $g(x)$ и $G(\varphi, \psi) = 0$ в (2).

5. Регуляризация задачи. Априорные оценки. Произведем регуляризацию нелинейной задачи. Введем полосы $E_\nu = \{\zeta\colon -\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty,\ 0 < \operatorname{Im}\zeta < \nu\}$, $\nu > 0$ и построим срезающую функцию $\chi(\zeta) \in C^3(E)$ такую, что $\chi(\zeta) = 0$ при $\zeta \in E_\rho$, $\rho > 0$ и $\chi(\zeta) = 1$ при $\zeta \in E \setminus E_{2\rho}$. Положим в (18) $\mu_{k\rho} = \chi\mu_k$, $k = 1, 2$, при этом $\mu_{k\rho} = q_{k\rho} = a_{kl\rho} = 0$, если $\zeta \in E_\rho$. Индекс ρ в обозначениях будем пока опускать, считая, что $\mu_k = q_k = a_{kl} = 0$

при $\zeta \in E_\rho$. Подставим в коэффициенты (18) произвольные измеримые функции $z(\zeta)$, $\omega(\zeta)$ и построим квазиконформное отображение $\xi = R(\zeta)$, R: $E \to E$, определенное перед формулой (16), так чтобы $z_{\bar{\xi}} = 0$, $\xi \in E$. Поскольку $\mu_k = 0$ в полосе E_ρ, конформное отображение $\xi = R(\zeta)$, $\zeta \in E_\rho$ может быть аналитически продолжено по симметрии в полосу $E_\rho^-\{\zeta\colon -\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty,\ -\rho < \operatorname{Im}\zeta < 0\}$. Построенное конформное отображение $\xi = R^0(\zeta)$, $\zeta \in E\rho \cup E_\rho^-$ аналитично на прямой ∂E: $\operatorname{Im}\zeta = 0$ и, следовательно, $\|R^0(t)\|^{(2)}_{\partial E} = C(m_0, \rho) < \infty$. Тогда в преобразованном граничном условии (6) для аналитической функции $dz/d\xi$, $\operatorname{Im}\xi > 0$ получим $\|\ln h_*[t(\tau)]\|^{(\alpha)}_l = C(m_0, \rho) < \infty$, и тем самым для $dz/d\xi$ выполняются оценки (8), (9). Возвращаясь к переменной ζ, отметим, что для функции $z(\zeta)$ сохраняются оценки (8) констант t_k, $k = \overline{0, n+1}$, оценка (9) в полосе E_ρ и дополнительно выполняются неравенства

$$\sup\,(\|\Pi_* z_\zeta\|^{(\nu)}_{E_\rho}, \|z(\zeta)\|^{1,p}_E) \leqslant C, \qquad \nu > 0, \qquad p > 2. \tag{20}$$

Правую часть (19) представим в виде

$$a(\zeta, z, \omega) = \sum_{k+l=0}^{2} a_{kl}\omega^k \bar{\omega}^l = A_0 + A_1\omega + A_2\bar{\omega},$$

где $A_0 = a_{00}$; $A_1 = a_{10} + a_{20}z_\zeta + a_{11}\bar{z}_{\bar{\zeta}}$; $A_2 = a_{01} + a_{02}\bar{z}_{\bar{\zeta}}$, и положим $A_k^0(\zeta) = A_k(\zeta, z^0, \omega^0)$. Здесь $z^0(\zeta)$ — функция, удовлетворяющая неравенствам (20); $\omega^0(\zeta)$ — произвольная измеримая функция.

В силу ограниченности a_{kl} и оценки (20) имеем $\|A_k^0\|_{L_p} < \infty$, $p > 2$. Обозначим полученное квазилинейное уравнение через (19^0) и отметим, что для решения $\omega = \omega^1(\zeta)$ задачи (6), (19^0) имеет место весовая оценка [6, с. 275]

$$\|\Pi_*\omega\|^{1,p}_E \leqslant C < \infty, \qquad p = p(m_0, q_0) > 2. \tag{21}$$

Здесь весовая функция $\Pi_*(\zeta)$ определена после неравенств (8), которые в этом случае выполняются, как доказано выше. Обратимся вновь к (18), полагая $\mu_k(\zeta, z^0, \omega^1) \equiv \mu_k^1(\zeta)$, и обозначим полученное линейное уравнение через (18^1). Поскольку $\mu_k = 0$, $\zeta \in E_\rho$, $\rho > 0$ и в силу (21)

$$\|\omega\|^{(\nu)}_{E\setminus E_\rho} = C(\rho) < \infty \quad \Rightarrow \quad \|\mu_k^1\|^{(\nu)}_E = C_0(\rho) < \infty, \quad \nu > 0.$$

Тогда для решения $z = z^1(\zeta)$ задачи (6), (18^1) выполняется оценка в $E \setminus E_\rho$, аналогичная (17).

Окончательно с учетом неравенств (20) приходим к следующей весовой априорной оценке решения $z = z(\zeta)$ регуляризованной задачи (6), (18) ($\mu_k = 0$, $\zeta \in E_\rho$):

$$\|\Pi_* z_\zeta\|^{1,p}_E \leqslant C(m_0, \varepsilon, \rho), \qquad p > 2. \tag{22}$$

6. Разрешимость задачи. В силу априорных оценок (21), (22) функции $u(\zeta) \equiv \Pi_* z_\zeta$ и $v(\zeta) \equiv \Pi_*\omega$ принадлежат множеству N из пространства $W^1_{p>2}(E)$:

$$\{(u, v)\colon \|(u, v)\|^{1,p}_E = C(C_0, C_1),\ p > 2\} \equiv N. \tag{23}$$

Выберем произвольный элемент $(u^*, v^*) \in N_0 \subset C^\beta(E)$, $\beta = (p-2)/p$:

$$\{(u, v)\colon \|(u, v)\|^{\beta}_E = \bar{C}(C, p),\ \beta > 2\} \equiv N_0 \supset N \tag{24}$$

и подставим $z^* = u^*\Pi_*^{-1}$ и $\omega^* = v^*\Pi_*^{-1}$ в коэффициенты уравнений (18) и (19), полагая

$$\mu_k^*(\zeta) = \mu_k(\zeta, z^*, \omega^*), \qquad q_k^*(\zeta) = q_k(\zeta, z^*, \omega^*), \qquad a^*(\zeta) = a(\zeta, z^*, \omega^*).$$

Обозначим полученные уравнения через (18*), (19*) и построим решения $z = z^1(\zeta)$ и $\omega = \omega^1(\zeta)$ задач (6), (18*) и (6), (19*), для которых справедливы неравенства (21), (22). Поэтому функции $u^1(\zeta) = \Pi_* z^1_\zeta$ и $v^1(\zeta) = \Pi_*\omega^1$ принадлежат множеству N, заданному в (23). Таким образом, построен оператор $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$, ставящий в соответствие вектору $(u^*, v^*) \in N_0 \subset C^\beta(E)$, $\beta > 2$ вектор $(\Lambda_1 u^*, \Lambda_2 v^*) = (u^1, v^1) \in N \subset\subset N_0$, где знак "$\subset\subset$" означает компактное вложение. В силу непрерывности по z и ω коэффициентов уравнений (18), (19) оператор Λ: $N_0 \to N \subset N_0$ ограничен, непрерывен и компактен на множестве N_0, определенном в (24). Следовательно, согласно теореме Шаудера существует по крайней мере одна неподвижная точка преобразования Λ

$$(u, v) = \Lambda(u, v), \qquad (u, v) \in N_0 \subset C^\beta(E), \quad \beta > 0,$$

которой по построению соответствует решение $z = \int\limits_{-1}^{\zeta} \Pi_*^{-1} u \, d\zeta$ регуляризованной нелинейной задачи (6), (18).

Для того чтобы построить решение исходной задачи (10), (18) при $\rho = 0$, подставим в коэффициенты μ_k произвольные измеримые функции $z^0(\zeta)$, $\omega^0(\zeta)$ и так же, как в п. **5**, рассмотрим отображение $\xi = R^0(\zeta)$, $R^0 : E \to E$. Тогда аналитическая функция $z = F^0(\xi)$, F^0: $E \to D$ удовлетворяет преобразованным граничным условиям (10) с $H[t(\tau)] \in SW^1_{p>2}(l)$ и для нее выполняется оценка (14). Возвращаясь к переменной ζ, получим обладающее теми же свойствами решение задачи (10), (18). Доказана

Теорема 3. *Существует по крайней мере одно решение нелинейной регуляризованной задачи* (6), (18) *($\mu_k = 0$, $\zeta \in E_\rho$), удовлетворяющее неравенствам* (20), (22). *При $\rho = 0$ решение $z = F(\zeta)$ предельного нелинейного уравнения* (18) *($\mu_k \not\equiv 0$, $\zeta \in E_\rho$) удовлетворяет почти всюду граничным условиям* (10) *и для него выполняется неравенство* (14).

7. Гидродинамический анализ результатов. Как правило, полученные математические результаты не интерпретировались применительно к рассматриваемым фильтрационным задачам. Попытаемся ликвидировать этот пробел.

Прежде всего, остановимся на гидродинамической интерпретации нового математического результата, сформулированного в теореме 1 о разрешимости задачи (10) для аналитических функций в классах $C^\alpha(E)$, $\alpha > 0$ и $W^1_p(E)$, $p > 2$. В задачах фильтрации граница $\partial D^* = P^* \cup L^*$ состоит из отрезков прямых $\varphi = \mathrm{const}$, $\psi = \mathrm{const}$ и, следовательно, является кусочно-аналитической кривой. Поэтому в задачах безнапорной фильтрации граничная функция $H(t)$ также аналитична во внутренних точках $t \in l$. Иная ситуация возникает в задаче о построении контура гидротехнического сооружения. Здесь прообраз L^* свободной границы L также является отрезком прямой $\varphi = \mathrm{const}$ или $\psi = \mathrm{const}$, но функция $w = g(x)$, $z \in L$ в (2), как правило, задается недостаточно гладкой, поскольку на L могут находиться шпунты ($\psi = \mathrm{const}$ на L) или дренажные щели ($\varphi = \mathrm{const}$ на L) [1]. Поэтому результаты теоремы 1 имеют и прикладное значение.

В п. **3**, в отличие от работы [8], в которой изучались задачи фильтрации жидкости в неоднородном грунте, изучены свойства комплексного потенциала вплоть до границы области фильтрации. Отметим, в частности, доказанный в теореме 2 важный факт ограниченности свободной границы L (оценка (14)).

Основные результаты работы изложены в пп. **4–6**, где изучены задачи фильтрации жидкости в неидеальных пористых средах (неоднородных, анизотропных и с нелинейным законом сопротивления). Поскольку в этом случае задачи фильтрации сильнонелинейны, авторами данной работы доказано существование только обобщенного решения уравнений нелинейной фильтрации, удовлетворяющего почти всюду граничной задаче (10). Если при этом грунт в малой окрестности границы области фильтрации D однороден и закон Дарси линеен, что соответствует достаточно большому периоду протекания фильтрационного потока через область D, то согласно первой части теоремы 3 решения задачи нелинейной фильтрации обладают теми же свойствами, что и в случае идеальной пористой среды, описываемой аналитическими функциями (см. п. **2**).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
2. **Аравин В. Н., Нумеров С. Н.** Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
3. **Развитие** исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967 гг.). М.: Наука, 1969.
4. **Монахов В. Н.** Фильтрация жидкости со свободной границей в неидеальных пористых средах // Проблемы математики и механики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
5. **Монахов В. Н.** О принципе квазиконформного склеивания для нелинейных уравнений, сильно эллиптических по М. А. Лаврентьеву // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 5. С. 1070–1074.
6. **Монахов В. Н.** Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
7. **Монахов В. Н.** Об одном вариационном методе решения задач гидродинамики со свободными границами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1106–1121.
8. **Давыдкин И. Б., Монахов В. Н.** Неоднолистные квазиконформные отображения со свободной границей // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2002. Вып. 120. С. 26–32.

Поступила в редакцию 4/III 2003 г.