ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН В УПРУГО-ХРУПКОМ МАТЕРИАЛЕ

В. М. Кузнецов (Новосибирск)

В работе предлагается приближенный способ решения задачи о равновесии системы параллельных трещин в упруго-хрупком теле.

Пусть в неограниченно изотропном упругом теле имеется бесконечно большое количество трещин, расположенных параллельно оси абсцисс на расстоянии $2h$ одна от другой. Внутри каждой трещины на длине a действует постоянное давление p. На остальных участках трещин и на бесконечности напряжения отсутствуют. Длина трещины может быть произвольной. Вследствие симметрии можно ограничиться рассмотрением полосы $0 \leqslant y \leqslant h$, нижняя сторона которой проходит через трещину и ее продолжение, а верхняя — на половине расстояния между трещинами. Требуется найти зависимость между p, h и a, если известны все упругие константы материала и его удельная поверхностная энергия.

Рассматривается плоская деформация. В этом случае компоненты вектора смещений u и v и тензора деформаций σ_x, σ_y, σ_{xy} выражаются через аналитические функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ формулами Колосова — Мусхелишвили [1]

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \psi(z) \qquad (\varkappa = 3-4\nu) \tag{1}$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4R\varphi'(z) \tag{2}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \tag{3}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига.

Заметим, что в силу симметрии и заданных граничных условий на всей границе области выполняется условие

$$\sigma_{xy} = 0 \tag{4}$$

Кроме того, на границе $y = L$ и вне трещины на ее продолжении должно выполняться условие

$$v = 0 \tag{5}$$

Из (1) следует, что

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial x} = (\varkappa + 1)\operatorname{Im}\varphi'(z) + \operatorname{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \tag{6}$$

а из (3)

$$\sigma_{xy} = \operatorname{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \tag{7}$$

Таким образом, если на участке границы одновременно выполнены условия (4) и (5), то вследствие (6) и (7) на этих участках

$$\operatorname{Im}\varphi'(z) = 0 \tag{8}$$

Далее, в задачах о равновесии одиночной трещины показывается [2], что на трещине и ее продолжении, вследствие (4),

$$\sigma_x = \sigma_y, \qquad y = 0 \tag{9}$$

Действительно, можно ввести в рассмотрение аналитическую функцию $F(z) = z\varphi'' + \psi'$, граничное значение которой при $y = 0$ совпадает с граничным значением функции, стоящей в правой части (3). Тогда, вследствие (3) и (4), на всей действительной оси $\operatorname{Im} F(z) = 0$, и, следовательно, $F(z) \equiv 0$ во всей области. Отсюда непосредственно вытекает равенство (9).

В случае системы трещин это равенство, вообще говоря, не выполняется. Это ясно из следующих физических соображений. Если трещины расположены достаточно близко друг от друга ($h / a \ll 1$), то в области, примыкающей к нагруженным участкам трещин, материал будет находиться в состоянии, близком к одноосному сжатию, для которого

$$\sigma_x/\sigma_y = (1 - \gamma)/\nu$$

Однако можно предположить, что при достаточном удалении трещин одна от другой равенство (9) будет выполняться с достаточной степенью точности. Если принять это в качестве предположения, то должны выполняться условия на нагруженных участках трещины

$$R\varphi'(z) = -{}^1/_2 p \tag{10}$$

на ненагруженных участках трещин

$$R\varphi'(z) = 0 \tag{11}$$

а на остальных участках границы области — условие (8). Таким образом, поставленная задача сводится к известной задаче Келдыша — Седова теории функций комплексного переменного [3].

В качестве примера рассмотрим задачу, аналогичную задаче, рассмотренной в [4]. Пусть полубесконечная трещина расположена на отрицательной части действительной оси, а давление p действует на участке $-a \leqslant x \leqslant 0$. Область и граничные условия для плоскости z показаны на фиг. 1. Функция

$$\zeta = \xi + i\eta = e^{\pi z/h} \tag{12}$$

отображает полосу $0 \leqslant y \leqslant h$ на верхнюю полуплоскость (фиг. 2). Теперь решение может быть получено при помощи формулы Келдыша — Седова [3]

$$\begin{gathered} \varphi'(z) = \frac{p}{2\pi}\left(\frac{\zeta}{\zeta - 1}\right)^{1/2}\left[2 \operatorname{arc\,tg} b - \left(\frac{1-\zeta}{\zeta}\right)^{1/2} \ln \frac{\sqrt{1-\zeta} + b\sqrt{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta} - b\sqrt{\zeta}}\right] \\ \zeta = e^{\pi z/h}, \qquad b = \sqrt{e^{\pi a/h} - 1} \end{gathered} \tag{13}$$

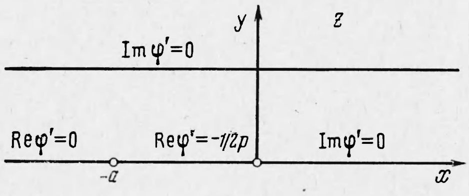
В носике трещины $\varphi'(z)$, а следовательно, и σ_y имеют особенности вида

$$\sigma_y = 2R\varphi'(z) = \frac{2p}{\pi}\left(\frac{h}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{arc\,tg} b \equiv \frac{N_0}{\sqrt{x}} \tag{14}$$

Согласно [2], равновесие трещины возможно при выполнении равенства

$$N_0 \equiv \frac{K}{\pi}, \qquad K = \left(\frac{\pi E T}{1 - \nu^2}\right)^{1/2} \tag{15}$$

Здесь K — модуль сцепления, E — модуль Юнга, T — удельная поверхностная энергия.



Фиг. 1

Из (14) и (15) получаем

$$\frac{p^3 h}{\pi\mu T} \operatorname{arc\,tg}^2 b = \frac{\pi E T}{4(1 - \nu^2)}$$

или после элементарных преобразований

$$\frac{\pi\mu T}{p^2 a} = \frac{h}{\pi a}\frac{c_1^2}{c_1^2 - c_2^2} \operatorname{arc\,tg}^2 b$$

$$\left(c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}\right) \tag{16}$$

В работе [4] рассматривалась задача о стационарном распространении системы трещин подобного вида, и в качестве предельного перехода при $V \to 0$ получено выражение для статического случая

$$\frac{\pi\mu T}{p^2 a} = \frac{\operatorname{arc\,tg} b}{b} + \frac{h}{\pi a}\frac{c_2^2}{c_1^2 - c_2^2} \operatorname{arc\,tg}^2 b \tag{17}$$

Обратимся к сравнению этих двух результатов. Прежде всего следует отметить, что в [4] была допущена ошибка, на которую автору указал А. М. Михайлов.

На нагруженном участке трещины не выполнено строго условие равенства нулю касательных напряжений

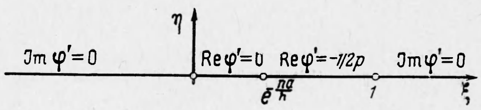
$$\frac{\sigma_{xy}}{\mu} = \frac{2\beta_1\alpha p}{\pi}\left[\left(\frac{\xi_1}{1-\xi_1}\right)^{1/2} \operatorname{arc\,tg} b_1 - \left(\frac{\xi_2}{1-\xi_2}\right)^{1/2} \operatorname{arc\,tg} b_2\right] \tag{18}$$

$$\xi_i = \exp\frac{\pi x}{\beta_i h}, \qquad b_i = \left(\exp\frac{\pi a}{\beta_i h} - 1\right)^{1/2}, \qquad \alpha = \frac{1 + \beta_2^2}{\mu\left[(1 + \beta_2^2)^2 - 4\beta_1\beta_2\right]}$$

$$\beta_i = \left(1 + \frac{V^2}{c_i^2}\right)^{1/2} \quad (i = 1, 2), \qquad -a \leqslant x \leqslant 0$$

Решение, найденное в [4], следует рассматривать как приближенное. При $a / h \ll 1$ из (18) получаем с точностью до членов первого порядка малости

$$\frac{\sigma_{xy}}{p} = \alpha\mu\left(\frac{a\,|\,x\,|}{h^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)$$



Фиг. 2

Отсюда при $V \to 0$

$$\frac{\sigma_{xy}}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\,|\,x\,|}{h^2}\right)^{1/2}, \qquad -a \leqslant x \leqslant 0 \tag{19}$$

При $a / h \to 0$ формулы (16) и (17) дают один и тот же результат

$$p^2 a / \pi\mu T = 1 - c_1^2 / c_2^2$$

Это совпадает с выражением, полученным в [5] для одиночной трещины. Относительная разность между длиной трещины, определяемой формулами (16) и (17) при $a / h \ll 1$, с точностью до членов первого порядка малости имеет вид

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\pi (c_1^2 - c_2^2)}{4c_1^2} \frac{a}{h} \tag{20}$$

При $\lambda = \mu$ и $a / h = 5$ эта величина составляет примерно 10%, так же как и максимальное значение отношения σ_{xy} / p, определяемого формулой (19).

Оценка точности решений статической и динамической задачи [4] в настоящее время не получена.

Поступила I VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 4-е. Изд-во АН СССР, 1954.
2. Б а р е н б л а т т Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
3. Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2-е. Физматгиз, 1958.
4. К у з н е ц о в В. М. О стационарном распространении системы трещин в упруго-хрупком материале. ПМТФ, 1964, № 3.
5. C r a g g s I. W. On the propagation of a crack in an elastic-brittle material. J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol. 8.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН ГРИФФИТСА В УПРУГО-ХРУПКОМ МАТЕРИАЛЕ

П. А. Мартынюк (Новосибирск)

В последнее время большой интерес представляют задачи теории трещин. Получение точного решения для систем трещин встречает значительные математические трудности. В работе [1] дается приближенное решение статической задачи теории равновесных трещин. В настоящей работе в предположении, высказанном в [1], исследуется вопрос взаимодействия трещин Гриффитса в упруго-хрупком материале. Оценена точность полученного решения.

Пусть в неограниченном изотропном теле имеется бесконечно большое количество трещин длиной $2l$, расположенных параллельно оси абсцисс, на расстоянии $2h$ одна от другой. Внутри каждой трещины на длине $2l$ действует постоянное давление p. Длина трещин может быть произвольной. Вследствие симметрии можно ограничиться рассмотрением бесконечной полосы $0 \leqslant y \leqslant h$, нижняя сторона которой проходит через трещину и ее продолжение, а верхняя — на половине расстояния между соседними трещинами. Требуется найти зависимость между p, h и l, если известны все упругие постоянные материала и модуль сцепления.

Рассматривается плоская деформация. В этом случае компоненты тензора напряжения σ_x, σ_y и σ_{xy} и вектора смещений u и v выражаются через две аналитические функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и их производные формулами Колосова — Мусхелишвили [2]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \tag{1}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2 [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \tag{2}$$

$$2\mu (u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \qquad (\varkappa = 3 - 4\nu) \tag{3}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига.

Граничные условия будут

$$\sigma_y = -p \qquad (y = 0, \quad -l \leqslant x \leqslant +l) \tag{4}$$

$$\sigma_{xy} = 0 \qquad (y = 0, \quad y = h, -\infty < x < +\infty) \tag{5}$$

$$v = 0 \qquad \begin{cases} (y = 0, & -\infty < x < -l, \quad +l < x < +\infty) \\ (y = h, & -\infty < x < +\infty) \end{cases} \tag{6}$$