УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ

С. В. Мелешко, О. Самрум, Э. Шульц

Технологический университет Суранари, 30000 Накхон Ратчасима, Таиланд
Центр математического искусства, 10400 Бангкок, Таиланд
E-mails: sergey@math.sut.ac.th, ongart@math.sut.ac.th, eckart@math.sut.ac.th

С использованием методов группового анализа исследуются стохастические уравнения газо- и гидродинамики. Получены определяющие уравнения допустимых групп Ли преобразований, в которых участвуют независимые и зависимые переменные, а также процессы Винера. Показано, что, как и в случае детерминированных дифференциальных уравнений, наличие допустимой группы позволяет свести инвариантные решения стохастических дифференциальных уравнений к решениям с меньшим числом независимых переменных.

Ключевые слова: стохастические уравнения, уравнения газовой динамики, уравнения Навье — Стокса, групповой анализ, инвариантные решения.

Введение. До конца XIX в. моделирование физических явлений проводилось с помощью детерминированных дифференциальных уравнений. Однако в начале XX в. возрос интерес к изучению стохастических дифференциальных уравнений, что обусловлено необходимостью учета случайных процессов, происходящих в сложных физических системах вследствие наличия как внутренних взаимодействий, так и внешних воздействий. Например, в гидродинамике считается, что поле скоростей в турбулентном течении является случайным [1] вследствие наличия внутренних взаимодействий. Другим примером могут служить задачи о волнах на воде, в которых на фоне регулярного крупномасштабного движения (приливы, сейши, цунами) действуют случайные факторы, например порывы ветра. Различные приложения стохастических моделей в физике, химии и других естественных науках указаны в [2, 3]. Кроме того, стохастический анализ используется при исследовании финансовых рынков [4].

Одним из способов учета случайных процессов при построении физической модели является введение в детерминированные уравнения внешних возмущений, например дополнительного члена с шумом. Этот способ широко применяется при решении инженерных задач. В гидродинамике данный подход впервые использован в работе [5] и позднее был развит во многих работах (см., например, [6]). В данной работе также используется этот подход.

Наряду с моделями, учитывающими случайные процессы, разрабатываются методы стохастического анализа. Представляет интерес направление, развиваемое в работе [7], где описываются результаты стохастического анализа с использованием теории функций

Работа выполнена при финансовой поддержке Центра математического искусства Таиланда.

© Мелешко С. В., Самрум О., Шульц Э., 2013

вещественной переменной. Следует отметить, что в [7] функция броуновского движения в стохастическом интеграле заменялась на непрерывную функцию с конечной вариацией. С точки зрения физики такая замена является более реалистичной.

Важным направлением изучения физических моделей является исследование их свойств. Групповой анализ — хорошо развитый метод изучения свойств дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными. Обзор работ, в которых используется этот метод, приведен в [8–11]. Построение решений осуществляется с помощью допустимых групп Ли, называемых симметриями. Одним из характерных свойств допустимой группы Ли является свойство преобразовывать решения данной системы уравнений к решениям той же системы. Симметрии позволяют уменьшить число зависимых и независимых переменных при отыскании инвариантных решений, а также строить новые решения на основе известных решений. Результаты применения группового анализа изложены в работах [9–11].

Первыми уравнениями механики, к которым был применен групповой анализ, стали уравнения гидрогазодинамики [12]. Одной из основных задач программы ПОДМОДЕЛИ [13] являлось описание всех возможных решений уравнений газовой динамики, получаемых с помощью группового анализа. Результаты этих исследований приведены в [14]. Впервые групповой анализ уравнений Навье — Стокса был выполнен в [15]. Результаты группового анализа таких уравнений описаны в [16]. Обзор точных решений уравнений Навье — Стокса приведен в [17].

Требование, чтобы каждое решение системы уравнений преобразовывалось в решение той же системы, позволяет определить допустимую группу Ли для уравнений с нелокальными членами [18, 19]. Следует отметить, что результаты применения методов группового анализа при исследовании стохастических дифференциальных уравнений (в отличие от детерминированных уравнений) немногочисленны.

При решении стохастических дифференциальных уравнений дифференцирование сложной функции проводится с помощью формулы Ито. Используя эту формулу и требование, чтобы допустимая группа переводила решение стохастических уравнений в решение тех же уравнений, можно построить определяющие уравнения допустимой группы.

Существует два способа проведения группового анализа стохастических дифференциальных уравнений. При использовании первого способа предполагается, что преобразование времени t зависит только от времени и группового параметра. Этот способ применялся при решении стохастических динамических систем уравнений [20–23], уравнений Фоккера — Планка [24–28], скалярных стохастических дифференциальных уравнений [29] и динамических систем Гамильтона — Стратановича [27]. В [30] построены примеры инвариантных решений стохастического параболического дифференциального уравнения.

При использовании второго подхода [31, 32] зависимые переменные также включаются в преобразования:

$$y = \varphi(t, x, a), \qquad r = H(t, x, a).$$

В частности, преобразование функции, описывающей броуновское движение, определяется через преобразование зависимых и независимых переменных. В [32] при обобщении формулы замены времени [33] было доказано, что преобразование броуновского движения

$$W(t) = \int\limits_0^t \eta^2\big(s, X(s), a\big)\, dw(s)$$

($\eta(t, x, a) \neq 0$) также удовлетворяет свойствам броуновского движения. Это преобразование является логическим обобщением замены переменных в интеграле Ито на случай, когда стохастические процессы включаются в преобразование. Используя формулу Ито и требование, чтобы допустимая группа переводила решение стохастических уравнений в решение тех же уравнений, а также приравнивая подынтегральные выражения в интегралах Римана и Ито, можно построить определяющие уравнения допустимой группы. С использованием этих уравнений определяется допустимая группа. Затем разработанный метод построения допустимых групп применяется для исследования фундаментальных уравнений гидрогазодинамики со стохастическими членами, а именно одномерных уравнений газовой динамики и двумерных уравнений Навье — Стокса. Получены представления инвариантных решений и фактор-уравнения для их нахождения.

1. Определяющие уравнения. В полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ рассматривается стохастическая задача Коши

$$v(r,y) = v(r_0,y) + \int\limits_{r_0}^{r} A(\tau,y)\,d\tau + \int\limits_{r_0}^{r} B(\tau,y)\,dw(\tau), \tag{1}$$

где $A(r,y) = A(r,y,v(r,y),v_{y_k}(r,y),v_{y_ky_l}(r,y))$; $B(r,y) = B(r,y,v(r,y))$ — случайная матрица размером $n\times m$; n — случайный вектор; $w(r)$ — вектор, включающий m независимых стандартных процессов Винера; $v(r_0,y) = v_0(y)$ — вектор случайных функций; $r \in [r_0,T]$; $y = (y_1,\dots,y_N) \in \mathbb{R}^N$. Запишем уравнение (1) в координатной форме

$$v^i(r,y) = v^i(r_0,y) + \int\limits_{r_0}^{r} A^i(\tau,y)\,d\tau + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{r_0}^{r} B^{ij}(\tau,y)\,dw^j(\tau), \qquad i = \overline{1,n} \tag{2}$$

(верхние индексы обозначают компоненты векторных зависимых переменных или компоненты матрицы, нижние числовые индексы — векторные компоненты независимых переменных; нижние буквенные индексы — частные производные относительно данных переменных).

Рассмотрим преобразование зависимых и независимых переменных

$$r = \alpha(t), \qquad y = h(t,x), \qquad v = g(t,x,u). \tag{3}$$

Функции $\alpha(t)$, $h(t,x)$, $g(t,x,u)$ являются локально обратимыми относительно переменных r, y, v. Это означает, что существуют функции $t = \hat{\alpha}(r)$, $x = \hat{h}(r,y)$, $u = \hat{g}(r,y,v)$, такие что

$$r = \alpha(\hat{\alpha}(r)), \quad y = h(\hat{\alpha}(r),\hat{h}(r,y)), \quad v = g(\hat{\alpha}(r),\hat{h}(r,y),\hat{g}(r,y,v)),$$
$$t = \hat{\alpha}(\alpha(t)), \quad x = \hat{h}(\alpha(t),h(t,x)), \quad u = \hat{g}(\alpha(t),h(t,x)g(t,x,u)).$$

Иными словами, рассматриваются локальные группы преобразований с групповым параметром a, который на данном этапе опущен.

В результате замены переменных (3) функция $v(r,y)$ преобразуется в новую функцию

$$u(t,x) = \hat{g}(\alpha(t),h(t,x),v(\alpha(t),h(t,x))). \tag{4}$$

В предположении, что $v(r,y)$ — решение задачи Коши (1), можно получить стохастическое дифференциальное уравнение для случайной функции $u(t,x)$. Сначала с использованием формулы Ито получаем стохастическое дифференциальное уравнение для функции $v(\alpha(t),h(t,x))$. После замены переменной времени $r = \alpha(t)$ и введения переменной $\tilde{v}(t,y) = v(\alpha(t),y)$, для которой $\tilde{v}(t_0,y) = v(\alpha(t_0),y)$, уравнения (2) записываются в виде

$$\tilde{v}^i(t,y) = \tilde{v}^i(t_0,y) + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{A}^i(\tau,y)\,d\tau + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_0}^{t} \bar{B}^{ij}(\tau,y)\,dW^j(\tau), \tag{5}$$

где

$$\bar{A}^i(t,y) = A^i(\alpha(t), y, \tilde{v}(t,y), \tilde{v}_{y_k}(t,y), \tilde{v}_{y_k y_l}(t,y))\,\alpha'(t),$$
$$\bar{B}^{ij}(t,y) = B^{ij}(\alpha(t), y, \tilde{v}(t,y))\,\sqrt{\alpha'(t)}\,,$$

каждый элемент $W^j(t)$ является новым процессом Винера, причем (см. [33])

$$W^j(t_2) - W^j(t_1) = \int\limits_{\alpha(t_1)}^{\alpha(t_2)} \frac{1}{\sqrt{\alpha'(\hat{\alpha}(s))}}\,dw^j(s),$$

$\hat{\alpha}(r)$ — функция, обратная $\alpha(t)$.

Дифференцируя уравнение (5) по каждой составляющей y_k независимой переменной y, получаем

$$\tilde{v}^i_{y_k}(t,y) = \tilde{v}^i_{y_k}(t_0,y) + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{A}^i_{y_k}(\tau,y)\,d\tau + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_0}^{t} \bar{B}^{ij}_{y_k}(\tau,y)\,dW^j(\tau) \quad (k = \overline{1,N}\,). \tag{6}$$

При получении формулы (6) использованы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\int\limits_{t_0}^{t} \bar{A}^i(\tau,y)\,d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \bar{A}^i_{y_k}(\tau,y)\,d\tau,$$
$$\frac{\partial}{\partial y_k}\int\limits_{t_0}^{t} \bar{B}^{ij}(\tau,y)\,dW^j(\tau) = \int\limits_{t_0}^{t} \bar{B}^{ij}_{y_k}(\tau,y)\,dW^j(\tau) \quad (k = \overline{1,N}\,). \tag{7}$$

Для интеграла Римана формулы (7) означают стандартную перемену порядка интегрирования и дифференцирования. Для интеграла Ито соотношения (7) приведены, например, в [34]. После замены $y = h(t,x)$ в уравнениях (6), умноженных на $h^k_t(t,x)$, и интегрирования по t находим

$$\int\limits_{t_0}^{t} h^k_t(\tau,x)\tilde{v}^i_{y_k}(\tau,h(\tau,x))\,d\tau =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t} h^k_t(\tau,x)\tilde{v}^i_{y_k}(t_0,h(\tau,x))\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} h^k_t(\tau,x)\Big(\int\limits_{t_0}^{\tau} \bar{A}^i_{y_k}(s,h(\tau,x))\,ds\Big)\,d\tau +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_0}^{t} h^k_t(\tau,x)\Big(\int\limits_{t_0}^{\tau} \bar{B}^{ij}_{y_k}(s,h(\tau,x))\,dW^j(s)\Big)\,d\tau \quad (k = \overline{1,N}\,). \tag{8}$$

В результате суммирования первых членов в правой части уравнений (8) по k имеем

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_0}^{t} h^k_t(\tau,x)\tilde{v}^i_{y_k}(t_0,h(\tau,x))\,d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} d\tilde{v}^i(t_0,h(\tau,x)) = \tilde{v}^i(t_0,h(t,x)) - \tilde{v}^i(t_0,h(t_0,x)).$$

Суммируя вторые члены в правой части уравнений (8) по k и используя теорему Фубини, получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t} h_t^k(\tau,x)\Big(\int_{t_0}^{\tau}\bar{A}^i_{y_k}(s,h(\tau,x))\,ds\Big)\,d\tau=\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t}\Big(\int_{s}^{t} h_t^k(\tau,x)\bar{A}^i_{y_k}(s,h(\tau,x))\,d\tau\Big)\,ds=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\Big(\int_{s}^{t} d_\tau\bar{A}^i(s,h(\tau,x))\Big)\,ds=\int_{t_0}^{t}(\bar{A}^i(s,h(t,x))-\bar{A}^i(s,h(s,x)))\,ds.$$

Суммируя третьи члены в правой части уравнений (8) по k и используя теорему Фубини, находим

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t} h_t^k(\tau,x)\Big(\int_{t_0}^{\tau}\bar{B}^{ij}_{y_k}(s,h(\tau,x))\,dW^j(s)\Big)\,d\tau=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t}\Big(\int_{s}^{t} h_t^k(\tau,x)\bar{B}^{ij}_{y_k}(s,h(\tau,x))\,d\tau\Big)\,dW^j(s)=\int_{t_0}^{t}\Big(\int_{s}^{t} d_\tau\bar{B}^{ij}(s,h(\tau,x))\Big)\,dW^j(s)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\big(\bar{B}^{ij}(s,h(t,x))-\bar{B}^{ij}(s,h(s,x))\big)\,dW^j(s).$$

Таким образом, из уравнений (8) получаем соотношения

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t} h_t^k(\tau,x)\tilde{v}^i_{y_k}(\tau,h(\tau,x))\,d\tau=\tilde{v}^i(t_0,h(t,x))-\tilde{v}^i(t_0,h(t_0,x))+$$

$$+\Big(\int_{t_0}^{t}\bar{A}^i(s,h(t,x))\,ds+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\bar{B}^{ij}(s,h(t,x))\,dW^j(s)\Big)-$$

$$-\Big(\int_{t_0}^{t}\bar{A}^i(s,h(s,x))\,ds+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\bar{B}^{ij}(s,h(s,x))\,dW^j(s)\Big).$$

Следовательно, выполняя замену $y=h(t,x)$ в уравнении (5), имеем

$$\tilde{v}^i(t,h(t,x))=\tilde{v}^i(t_0,h(t_0,x))+\int_{t_0}^{t}\bar{A}^i(\tau,h(\tau,x))\,d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t} h_t^k(\tau,x)\tilde{v}^i_{y_k}(\tau,h(\tau,x))\,d\tau+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\bar{B}^{ij}(\tau,h(\tau,x))\,dW^j(\tau). \qquad (9)$$

Это означает, что функции $\tilde{v}^i$ являются процессами Ито. Уравнение (9) можно записать в дифференциальной форме

$$d\hat{v}^i=\hat{A}^i\,dt+\sum_{j=1}^{m}\hat{B^{ij}}\,dW^j(t),$$

где
$$\hat{v}^i(t,x) = \tilde{v}^i(t,h(t,x)) = v^i(\alpha(t),h(t,x)),$$
$$\hat{A}^i(t,x) = \bar{A}^i(t,h(t,x)) + \sum_{k=1}^{N} \tilde{v}^i_{y_k}(t,h(t,x)) h^k_t(t,x) =$$
$$= A^i(\alpha(t),h(t,x))\alpha'(t) + \sum_{k=1}^{N} v^i_{y_k}(\alpha(t),h(t,x)) h^k_t(t,x),$$
$$\hat{B}^{ij}(t,x) = \bar{B}^{ij}(t,h(t,x)) = B^{ij}(\alpha(t),h(t,x))\sqrt{\alpha'(t)}.$$
В этих обозначениях компоненты (4) записываются в виде
$$u^i(t,x) = \tilde{g}^i(t,x,\hat{v}(t,x)),$$
где
$$\tilde{g}(t,x,\hat{v}(t,x)) = \tilde{g}(t,x,\tilde{v}(t,h(t,x))) = \hat{g}(\alpha(t),h(t,x),v(\alpha(t),h(t,x))).$$
С использованием формулы Ито получаем
$$du^i = \Big[\tilde{g}^i_t + \sum_{j=1}^{n} \hat{A}^j \tilde{g}^i_{\hat{v}^j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} \hat{B}^{kj} \hat{B}^{\sigma j}\Big) \tilde{g}^i_{\hat{v}^k \hat{v}^\sigma}\Big]\,dt + \sum_{k=1}^{n} \tilde{g}^i_{\hat{v}^k} \sum_{j=1}^{m} \hat{B}^{kj}\,dW^j(t),$$
или
$$du^i = \Big[\alpha' \hat{g}^i_r + \sum_{k=1}^{N} h^k_t \hat{g}^i_{y_k} + \sum_{j=1}^{n} \Big(\alpha' A^j + \sum_{k=1}^{l} v^j_{y_k} h^k_t\Big) \hat{g}^i_{v_j} +$$
$$+ \frac{\alpha'}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} B^{kj} B^{\sigma j}\Big) \hat{g}^i_{v^k v^\sigma}\Big]\,dt + \sqrt{\alpha'}\,\sum_{k=1}^{n} \hat{g}^i_{v^k} \sum_{j=1}^{m} B^{kj}\,dW^j(t). \qquad (10)$$
В уравнениях (10) величины $\hat{g}_r$, $\hat{g}_{y_k}$, $\hat{g}_{v^k}$, $\hat{g}_{v^k v^\sigma}$, A, B необходимо выразить через функции α, h, g, u и их производные. С этой целью рассмотрим тождества
$$u^i = \hat{g}^i(\alpha(t),h(t,x),g(t,x,u)) \qquad (i = \overline{1,n}\,). \qquad (11)$$
Дифференцируя уравнения (11) по каждой переменной u^j, получаем
$$\hat{g}^i_{v^j} = \det(M)^{-1} \det(M^{i,j}) \qquad (j = \overline{1,n}\,), \qquad (12)$$
где матрицы M и M^{ij} имеют различные j-е столбцы:
$$M = \begin{pmatrix} g^1_{u^1} & \cdot & \cdot & \cdot & g^n_{u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g^1_{u^n} & \cdot & \cdot & \cdot & g^n_{u^n} \end{pmatrix}, \qquad M^{i,j} = \begin{pmatrix} g^1_{u^1} & \cdot & 0 & \cdot & g^n_{u^1} \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1_{i,j} & \cdot & \cdot \\ g^1_{u^n} & \cdot & 0 & \cdot & g^n_{u^n} \end{pmatrix}.$$
В то же время, дифференцируя уравнения (11) относительно t, x_k, находим
$$\hat{g}^i_r = \det(\Delta)^{-1} \det(\Delta^0), \qquad \hat{g}^i_{y_k} = \det(\Delta)^{-1} \det(\Delta^{k+1}) \quad (k = \overline{1,N}\,),$$
где матрицы Δ и Δ^{k+1} имеют различные $(k+1)$-е столбцы:
$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha' & h^1_t & \cdot & \cdot & h^N_t \\ 0 & h^1_{x_1} & \cdot & \cdot & h^N_{x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & h^1_{x^N} & \cdot & \cdot & h^N_{x^N} \end{pmatrix}, \qquad \Delta^{k+1} = \begin{pmatrix} \alpha' & h^1_t & \cdot & \lambda^0 & \cdot & h^N_t \\ 0 & h^1_{x_1} & \cdot & \lambda^1 & \cdot & h^N_{x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & h^1_{x_N} & \cdot & \lambda^N & \cdot & h^N_{x_N} \end{pmatrix},$$

$$\lambda^0 = -\sum_{j=1}^{n} \hat{g}^i_{v^j} g^j_t, \qquad \lambda^k = -\sum_{j=1}^{n} \hat{g}^i_{v^j} g^j_{x_k}.$$

Дифференцируя первое уравнение в (12) по u^j, получаем

$$\hat{g}^i_{v^j v^k} = \det(M)^{-1} \det(\bar{M}^{i,k}) \qquad (i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,n}\,),$$

где

$$\bar{M}^{i,k} = \begin{pmatrix} g^1_{u^1} & \cdot & \Lambda^{i,1} & \cdot & g^n_{u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g^1_{u^n} & \cdot & \Lambda^{i,n} & \cdot & g^n_{u^n} \end{pmatrix},$$

компоненты матрицы $\bar{M}^{i,k}$ в k-м столбце имеют вид

$$\Lambda^{i,\sigma} = \frac{\partial}{\partial u^\sigma} \hat{g}^i_{v^j}.$$

Производные $v^i_{y_k}(\alpha(t), h(t,x))$ получены из соотношений

$$v^i(\alpha(t), h(t,x)) = g^i(t,x,u(t,x)). \tag{13}$$

Дифференцируя уравнения (13) по t и x_k, находим

$$v^i_{y_k} = \det(\Delta)^{-1} \det(\Theta^{i,k}),$$

где

$$\Theta^{i,k} = \begin{pmatrix} \alpha' & h^1_t & \cdot & \theta^0 & \cdot & h^N_t \\ 0 & h^1_{x_1} & \cdot & \theta^1 & \cdot & h^N_{x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & h^1_{x_N} & \cdot & \theta^N & \cdot & h^N_{x_N} \end{pmatrix},$$

компоненты матрицы $\Theta^{i,k}$ в $(k+1)$-м столбце имеют вид

$$\theta^0 = g^i_t + \sum_{j=1}^{n} g^i_{u^j} u^j_t, \qquad \theta^\sigma = g^i_{x_\sigma} + \sum_{j=1}^{n} g^i_{u^j} u^j_{x_\sigma}.$$

Уравнения (10) запишем в более простом виде

$$du^i = F^i(t,x,u,u_{x_k},u_{x_k x_l})\,dt + \sum_{j=1}^{m} G^{ij}(t,x,u)\,dW^j(t) \qquad (i = \overline{1,n}\,).$$

По определению инвариантность уравнения (1) относительно данной группы преобразований означает справедливость равенств

$$F^i(t,x,u,u_{x_k},u_{x_k x_l},a) = A^i(t,x,u,u_{x_k},u_{x_k x_l}), \quad G^{ij}(t,x,u,a) = B^{ij}(t,x,u)$$

$$\forall\ t,\ x,\ u,\ u_{x_k},\ u_{x_k x_l},\ a,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,N},\ l = \overline{1,N}.$$

Дифференцируя F и G по групповому параметру a, получаем

$$\frac{\partial F^i}{\partial a}\Big|_{a=0} = \tilde{X}(A^i - u^i_t), \qquad \frac{\partial G^{ij}}{\partial a}\Big|_{a=0} = \tilde{X} B^{ij} + \frac{B^{ij}}{2}\psi_t - \sum_{k=1}^{n} B^{kj} \zeta^{u^i}_{u^k},$$

где $X = \psi(t)\partial_t + \xi^{x_k}(t,x)\,\partial_{x_k} + \zeta^{u^i}(t,x,u)\,\partial_{u^i}$; $\tilde{X}$ — продолженный оператор X с измененным коэффициентом:

$$\zeta^{u^i_t} = \sum_{j=1}^{n}\Big(A^j\psi_t + A^j\zeta^i_{u^j} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\sigma=1}^{m}B^{j\sigma}B^{k\sigma}\Big)\zeta^i_{u^ju^k}\Big). \qquad (14)$$

Иными словами, $\tilde{X}u^i_t = \zeta^{u^i_t}$, где $\zeta^{u^i_t}$ определяется по формуле (14).

2. Групповой анализ стохастических уравнений газовой динамики. Разработанные выше методы группового анализа применяются при исследовании стохастических уравнений гидрогазодинамики. Большинство вычислений были выполнены с помощью программы символьных вычислений Reduce [35].

2.1. *Решение определяющих уравнений.* Рассмотрим дифференциальные уравнения газовой динамики со стохастической правой частью, которую можно интерпретировать как случайные внешние силы:

$$\begin{gathered} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \qquad p_t + up_x + \gamma p u_x = 0, \\ du = -(uu_x + \rho^{-1}p_x)\,dt + B(t,x,u,p,\rho)\,dw(t). \end{gathered} \qquad (15)$$

Здесь γ — показатель политропы газа; функция B задает стохастические внешние силы. Инфинитезимальный оператор будем искать в форме

$$X = \psi(t)\,\partial_t + \xi(t,x)\,\partial_x + \zeta^u(t,x,u,p,\rho)\,\partial_u + \zeta^p(t,x,u,p,\rho)\,\partial_p + \zeta^\rho(t,x,u,p,\rho)\,\partial_\rho.$$

Продолженный оператор $\tilde{X}$ получается по обычным формулам продолжения с учетом (14). Применяя продолженный оператор $\tilde{X}$ к уравнениям (15):

$$\tilde{X}(\rho_t + u\rho_x + \rho u_x) = 0, \quad \tilde{X}(p_t + up_x + \gamma p u_x) = 0, \quad \tilde{X}(u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x) = 0; \qquad (16)$$

$$\tilde{X}B + B\psi_t/2 - B\zeta^u_u = 0 \qquad (17)$$

и подставляя в них производные $\rho_t = -(u\rho_x + \rho u_x)$, $p_t = -(up_x + \gamma p u_x)$, получаем определяющие уравнения, решение которых, как и в случае детерминированных уравнений газовой динамики, зависит от показателя политропы γ.

В случае $\gamma = 3$ решением определяющих уравнений (16) является оператор

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4 + c_5X_5 + c_6X_6 + c_7X_7,$$

где

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\,\partial_t + x\,\partial_x, \quad X_4 = t\,\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\,\partial_t - u\,\partial_u + 2\rho\,\partial_\rho, \\ X_6 = p\,\partial_p + \rho\,\partial_\rho, \quad X_7 = t^2\,\partial_t + tx\,\partial_x + (x - tu)\,\partial_u - 3tp\,\partial_p - t\rho\,\partial_\rho. \end{gathered}$$

Если $\gamma \neq 3$, то допустимый оператор имеет вид

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4 + c_5X_5 + c_6X_6.$$

Следует отметить, что решение определяющих уравнений (16) для стохастических уравнений газовой динамики совпадает с решением определяющих уравнений для детерминированных уравнений газовой динамики. Также заметим, что осталось нерешенным уравнение (17). Это уравнение определяет функцию B, которая будет найдена ниже вместе с представлением инвариантного решения.

2.2. *Примеры инвариантных решений.* Рассмотрим приведенный в [9. С. 258] класс инвариантных решений, соответствующих оператору $X_3 - X_5 + \beta X_6$. Функция B, соответствующая этому оператору, находится из уравнения (17):

$$(X_3 - X_5 + \beta X_6)B - B\zeta^u_u = xB_x + uB_u + \beta pB_p + (\beta - 2)\rho B_\rho - B = 0.$$

Решение полученного уравнения имеет вид

$$B = x\mu(t, x^{-1}u, x^{-\beta}p, x^{2-\beta}\rho), \tag{18}$$

где μ — произвольная функция четырех аргументов.

Представление инвариантного решения имеет вид

$$u = x\varphi^1(t), \qquad p = x^\beta\varphi^2(t), \qquad \rho = x^{\beta-2}\varphi^3(t). \tag{19}$$

Подставляя (18), (19) в (15), получаем систему обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений

$$\varphi^3_t + (\beta-1)\varphi^1\varphi^3 = 0, \qquad \varphi^2_t + (\beta+\gamma)\varphi^1\varphi^2 = 0,$$
$$d\varphi^1 = -\big((\varphi^1)^2 + \beta\varphi^2/\varphi^3\big)\,dt + \mu(t, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)\,dw.$$

Поскольку t — инвариант, функция $w(t)$, описывающая броуновское движение, не меняется и фактор-система остается системой стохастических дифференциальных уравнений.

Рассмотрим класс автомодельных решений, соответствующих оператору

$$Y = (2(\tilde\alpha+1)+\beta)X_6 + \tilde\alpha X_3 - (\tilde\alpha+1)X_5.$$

Инварианты и подынтегральная функция B в интеграле Ито находятся из уравнений

$$YJ = -tJ_t + \tilde\alpha xJ_x + (\tilde\alpha+1)uJ_u + (2(\tilde\alpha+1)+\beta)pJ_p + \beta\rho J_\rho = 0,$$
$$YB + \psi_t/2 - \zeta^u_u = 0.$$

Если $\tilde\alpha = 0$, то

$$B = t^{-3/2}\mu(x, tu, pt^{\beta+2}, \rho t^\beta) \tag{20}$$

и представление инвариантного решения имеет вид

$$u = t^{-1}\varphi^1(x), \qquad p = t^{-(\beta+2)}\varphi^2(x), \qquad \rho = t^{-\beta}\varphi^3(x). \tag{21}$$

Подставляя (20), (21) в (15), получаем следующую фактор-систему:

$$\begin{gathered}\varphi^3(\varphi^1_x - \beta) + \varphi^3_x\varphi^1 = 0, \qquad \varphi^1\varphi^2_x + \varphi^2(\gamma\varphi^1_x - (\beta+2)) = 0,\\ \varphi^1 - \Big(\varphi^1\varphi^1_x + \frac{\varphi^2_x}{\varphi^3}\Big) = \mu(x, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)\Big(\frac{tt_0}{t_0-t}\int\limits_{t_0}^{t} s^{-3/2}\,dw(s)\Big).\end{gathered} \tag{22}$$

Так как функции φ^i $(i = 1, 2, 3)$ не зависят от t, а вариация

$$\operatorname{var}\Big(\frac{tt_0}{t_0-t}\int\limits_{t_0}^{t} s^{-3/2}\,dw(s)\Big) = \frac{tt_0}{t_0-t}\int\limits_{t_0}^{t} s^{-3}\,ds = -\frac{t+t_0}{2tt_0}$$

зависит от времени t, из уравнения (22) следуют соотношения

$$\varphi^1\varphi^1_x + \varphi^2_x/\varphi^3 = \varphi^1, \qquad \mu(x, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) = 0.$$

Таким образом, поскольку функции φ^i $(i = 1, 2, 3)$ не зависят от t, данное инвариантное решение стохастических уравнений сводится к решению детерминированных уравнений газовой динамики.

Если $\tilde\alpha \neq 0$, то инваринты определяются из решения уравнения

$$-tJ_t + xJ_x/\alpha + (1/\alpha+1)uJ_u + (2(1/\alpha+1)+\beta)pJ_p + \beta\rho J_\rho = 0$$

и представление инвариантного решения имеет вид
$$u = xt^{-1}\varphi^1(x^\alpha t), \qquad p = x^2t^{-\beta-2}\varphi^2(x^\alpha t), \qquad \rho = t^{-\beta}\varphi^3(x^\alpha t). \tag{23}$$
Здесь $\alpha = \tilde{\alpha}^{-1}$. Функция B в интеграле Ито находится из уравнения
$$-tB_t + xB_x/\alpha + (1/\alpha + 1)uB_u + (2(1/\alpha + 1) + \beta)pB_p + \beta\rho B_\rho - (1/\alpha + 3/2)B = 0.$$
Тогда
$$B = xt^{-3/2}\mu(x^\alpha t, utx^{-1}, pt^{\beta+2}x^{-2}, \rho t^\beta). \tag{24}$$

Подставляя (23), (24) в (15), получаем фактор-систему, состоящую из двух детерминированных и одного стохастического дифференциальных уравнений:
$$\alpha\varphi^1_z\varphi^3 z + \varphi^3_z z(\alpha\varphi^1 + 1) + \varphi^3(\varphi^1 - \beta) = 0,$$
$$\alpha\varphi^1_z\varphi^2\gamma z + \varphi^2_z z(\alpha\varphi^1 + 1) + \varphi^2(-\beta + \varphi^1\gamma + 2\varphi^1 - 2) = 0,$$
$$z^{-1}\varphi^1(z) = z_0^{-1}\varphi^1(z_0) - \int\limits_{z_0}^{z} s^{-2}\Big(\alpha s\Big(\varphi^1(s)\varphi^1_z(s) + \frac{\varphi^2_z(s)}{\varphi^3(s)}\Big) - \big(\varphi^1(s)\big)^2 + 2\,\frac{\varphi^2(s)}{\varphi^3(s)}\Big)\,ds + {} + \int\limits_{z_0}^{z} s^{-3/2}\mu(s, \varphi^1(s), \varphi^2(s), \varphi^3(s))\,dW(s),$$
где $v(z) = zx^{-\alpha} = t$; $z = x^\alpha t$,
$$W(z) - W(z_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\sqrt{v'(\tau)}}\,dw(\tau) = \int\limits_{t_0}^{t} x^{\alpha/2}\,dw(\tau) = x^{\alpha/2}(w(t) - w(t_0)).$$
Так как в последней формуле время t не является инвариантом, то функция $w(t)$, описывающая броуновское движение, заменена на функцию $W(z)$.

3. Групповой анализ стохастических уравнений Навье — Стокса. Исследуем двумерные стохастические уравнения Навье — Стокса
$$\begin{gathered} du^1 = [u^1_{x_1x_1} + u^1_{x_2x_2} - (u^1u^1_{x_1} + u^2u^1_{x_2} + p_{x_1})]\,dt + B^{11}\,dw_1(t) + B^{12}\,dw^2(t), \\ du^2 = [u^2_{x_1x_1} + u^2_{x_2x_2} - (u^1u^2_{x_1} + u^2u^2_{x_2} + p_{x_2})]\,dt + B^{21}\,dw^1(t) + B^{22}\,dw^2(t), \\ u^1_{x_1} + u^2_{x_2} = 0, \end{gathered} \tag{25}$$
где $B^{ij} = B^{ij}(t, x, u, p)$ $(1 \leqslant i \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant 2)$ — стохастические внешние силы.

Наряду с декартовыми координатами x_1, x_2, u^1, u^2 используем цилиндрические координаты
$$r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}(x_2/x_1), \quad U = u^1\cos\theta + u^2\sin\theta, \quad V = u^2\cos\theta - u^1\sin\theta.$$
В цилиндрической системе координат стохастические уравнения Навье — Стокса (25) имеют вид
$$dU = \Big[\Big(U_{rr} + \frac{1}{r}\,U_r - \frac{U}{r^2} + \frac{1}{r^2}\,U_{\theta\theta} - \frac{2}{r^2}\,V_\theta\Big) - \Big(UU_r + \frac{V}{r}\,U_\theta - \frac{V^2}{r} + p_r\Big)\Big]\,dt + {} + b^{11}\,dw^1(t) + b^{12}\,dw^2(t),$$

$$dV = \Big[\Big(V_{rr} + \frac{1}{r}\,V_r - \frac{V}{r^2} + \frac{1}{r^2}\,V_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2}\,U_\theta\Big) - \Big(UV_r + \frac{V}{r}\,V_\theta + \frac{UV}{r} + \frac{1}{r}\,p_\theta\Big)\Big]\,dt + \\ + b^{21}\,dw^1(t) + b^{22}\,dw^2(t), \tag{26}$$

$$U_r + \frac{U}{r} + \frac{1}{r}\,V_\theta = 0,$$

где $b^{ij} = b^{ij}(t, r, \theta, U, V, p)$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2)$.

3.1. *Решение определяющих уравнений.* Инфинитезимальный оператор будем искать в форме

$$X = \psi(t)\,\partial_t + \xi^{x_1}(t, x)\,\partial_{x_1} + \xi^{x_2}(t, x)\,\partial_{x_2} + \zeta^{u^1}(t, x, u, p)\,\partial_{u^1} + \zeta^{u^2}(t, x, u, p)\,\partial_{u^2} + \zeta^p(t, x, u, p)\,\partial_p.$$

Применяя продолженный оператор к уравнениям (25):

$$\begin{gathered} \tilde{X}\big(u^1_{x_1x_1} + u^1_{x_2x_2} - (u^1u^1_{x_1} + u^2u^1_{x_2} + p_{x_1})\big) = 0, \\ \tilde{X}\big(u^2_{x_1x_1} + u^2_{x_2x_2} - (u^1u^2_{x_1} + u^2u^2_{x_2} + p_{x_2})\big) = 0, \\ \tilde{X}\big(u^1_{x_1} + u^2_{x_2}\big) = 0; \end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{X}B^{11} + B^{11}\psi_t/2 - B^{11}\zeta^{u^1}_{u^1} - B^{21}\zeta^{u^1}_{u^2} = 0, \quad \tilde{X}B^{12} + B^{12}\psi_t/2 - B^{12}\zeta^{u^1}_{u^1} - B^{22}\zeta^{u^1}_{u^2} = 0, \\ &\tilde{X}B^{21} + B^{21}\psi_t/2 - B^{11}\zeta^{u^2}_{u^1} - B^{21}\zeta^{u^2}_{u^2} = 0, \quad \tilde{X}B^{22} + B^{22}\psi_t/2 - B^{12}\zeta^{u^2}_{u^1} - B^{22}\zeta^{u^2}_{u^2} = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

и подставляя в них $u^2_{x_2} = -u^1_{x_1}$, $u^2_{x_1x_2} = -u^1_{x_1x_1}$, $u^2_{x_2x_2} = -u^1_{x_1x_2}$, получаем определяющие уравнения. Решением определяющих уравнений (27) являются функции

$$\begin{gathered} \psi = 2c_1t + c_3, \quad \xi^{x_1} = c_1x_1 - c_2x_2 + c_4\varphi_1(t), \quad \xi^{x_2} = c_1x_2 + c_2x_1 + c_5\varphi_2(t), \\ \zeta^{u^1} = -c_1u^1 - c_2u^2 + c_4\varphi_1'(t), \quad \zeta^{u^2} = -c_1u^2 - c_2u^1 + c_5\varphi_2'(t), \\ \zeta^p = -2c_1p - c_4x_1\varphi_1''(t) - c_5x_2\varphi_2''(t) + c_6\mu(t). \end{gathered}$$

Инфинитезимальный оператор, соответствующий этим коэффициентам, имеет вид

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4 + c_5X_5 + c_6X_6,$$

где

$$\begin{gathered} X_1 = 2t\,\partial_t + x_1\,\partial_{x_1} + x_2\,\partial_{x_2} - u^1\,\partial_{u^1} - u^2\,\partial_{u^2} - 2p\,\partial_p, \\ X_2 = -x_2\,\partial_{x_1} + x_1\,\partial_{x_2} - u^2\,\partial_{u^1} + u^1\,\partial_{u^2}, \qquad X_3 = \partial_t, \\ X_4 = \varphi_1(t)\,\partial_{x_1} + \varphi_1'(t)\,\partial_{u^1} - x_1\varphi_1''(t)\,\partial_p, \\ X_5 = \varphi_2(t)\,\partial_{x_2} + \varphi_2'(t)\,\partial_{u^2} - x_2\varphi_2''(t)\,\partial_p, \qquad X_6 = \mu(t)\,\partial_p. \end{gathered}$$

В этом случае, как и в случае уравнений газовой динамики, решение определяющих уравнений (27) совпадает с решением определяющих уравнений для детерминированных уравнений Навье — Стокса. Одновременно с решением определяющих уравнений (28) строится представление инвариантного решения.

3.2. *Примеры инвариантных решений.* Ряд инвариантных решений детерминированных уравнений Навье — Стокса приведен в [10]. Чтобы провести сравнение с этими решениями, рассмотрим два класса инвариантных решений стохастических уравнений Навье — Стокса. Сначала рассмотрим класс инвариантных решений относительно подалгебры $\{X_1, X_3\}$. Подынтегральные функции b^{ij} в интеграле Ито должны удовлетворять уравнениям

$$X_3b^{ij} = b^{ij}_t = 0, \qquad X_1b^{ij} + 2b^{ij} = rb^{ij}_r - Ub^{ij}_U - Vb^{ij}_V - 2pb^{ij}_p + 2b^{ij} = 0.$$

Таким образом,

$$b^{ij} = \frac{\psi^{ij}(\theta, Ur, Vr, pr^2)}{r^2}, \tag{29}$$

и представление инвариантного решения имеет вид

$$U = \frac{\varphi^1(\theta)}{r}, \qquad V = \frac{\varphi^2(\theta)}{r}, \qquad p = \frac{\varphi^3(\theta)}{r^2}. \tag{30}$$

Подставляя (29), (30) в (26), получаем

$$\frac{\varphi^1}{r} = \frac{\varphi^1}{r} + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{1}{r}\left(\varphi^1_{\theta\theta} - \varphi^2\varphi^1_\theta - 2\varphi^2_\theta + (\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 + 2\varphi^3\right) ds + {} \\ + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\psi^{11}}{r}\, dW^1(s) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\psi^{12}}{r}\, dW^2(s),$$

$$\frac{\varphi^2}{r} = \frac{\varphi^2}{r} + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{1}{r}\left(\varphi^2_{\theta\theta} - \varphi^2\varphi^2_\theta + 2\varphi^1_\theta - \varphi^3_\theta\right) ds + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\psi^{21}}{r}\, dW^1(s) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\psi^{22}}{r}\, dW^2(s),$$

$$\varphi^2_\theta = 0,$$

т. е.

$$-\left(\varphi^1_{\theta\theta} - \varphi^2\varphi^1_\theta + (\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 + 2\varphi^3\right)(z - z_0) = \\ = \psi^{11}\left(W^1(z) - W^1(z_0)\right) + \psi^{12}\left(W^2(z) - W^2(z_0)\right),$$

$$\left(-2\varphi^1_\theta + \varphi^3_\theta\right)(z - z_0) = \psi^{21}\left(W^1(z) - W^1(z_0)\right) + \psi^{22}\left(W^2(z) - W^2(z_0)\right), \tag{31}$$

$$\varphi^2_\theta = 0,$$

где $v(z) = zr^2 = t$; $z = tr^{-2}$,

$$W(z) = \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{v'}}\, dw(\tau) = \int\limits_{t_0}^t \frac{1}{r}\, dw(\tau) = \frac{1}{r}\,(w(t) - w(t_0)). \tag{32}$$

Поскольку производная функции, описывающей броуновское движение, не определена в точке z_0, из уравнений (31) следуют условия

$$\varphi^1_{\theta\theta} - \varphi^2\varphi^1_\theta + (\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 + 2\varphi^3 = 0, \qquad 2\varphi^1_\theta - \varphi^3_\theta = 0.$$

Можно показать, что если в случае независимых функций W^1 и W^2, описывающих броуновские движения, имеет место уравнение

$$h^1\, dW^1(z) + h^2\, dW^1(z) = 0, \tag{33}$$

где h^1, h^2 не зависят от z, то $h^1 = 0$, $h^2 = 0$. Таким образом, как и для уравнения (22), в данном случае фактор-система состоит из детерминированных уравнений

$$\varphi^1_{\theta\theta} - \varphi^2\varphi^1_\theta + (\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 + 2\varphi^3 = 0,$$

$$2\varphi^1_\theta - \varphi^3_\theta = 0, \quad \varphi^2_\theta = 0, \quad \psi^{ij}(\theta, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) = 0 \quad (i = 1, 2,\ j = 1, 2).$$

Рассмотрим другой класс инвариантных решений, а именно класс решений, инвариантных относительно подалгебры $\{X_1, X_2\}$. Подынтегральные функции b^{ij} в интеграле Ито должны удовлетворять уравнениям

$$X_2 b^{ij} = b^{ij}_\theta = 0, \qquad X_1 b^{ij} + 2b^{ij} = 2tJ_t + rb^{ij}_r - Ub^{ij}_U - Vb^{ij}_V - 2pb^{ij}_p + 2b^{ij} = 0.$$

Тогда

$$b^{ij} = \frac{\psi^{ij}(z, Ur, Vr, pr^2)}{r^2} \tag{34}$$

и представление инвариантного решения имеет вид

$$U = \frac{\varphi^1(z)}{r}, \qquad V = \frac{\varphi^2(z)}{r}, \qquad p = \frac{\varphi^3(z)}{r^2}, \qquad z = \frac{t}{r^2}. \tag{35}$$

Подставляя (34), (35) в (26), получаем фактор-систему

$$\begin{gathered}
\big(2z\varphi^3_z + (\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 + 2\varphi^3\big)\,dz + \\
+ \psi^{11}(z, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)\,dW^1(z) + \psi^{12}(z, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)\,dW^2(z) = 0, \\
d\varphi^2 = 2z\big(2z\varphi^2_{zz} + (\varphi^1 + 4)\varphi^2_z\big)\,dz + \\
+ \psi^{21}(z, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)\,dW^1(z) + \psi^{22}(z, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)\,dW^2(z), \\
\varphi^1_z = 0,
\end{gathered}$$

где функции $W^i(z)$ определяются по формуле (32).

Заключение. В работе групповой анализ впервые используется при построении инвариантных решений стохастических дифференциальных уравнений газо- и гидродинамики. Установлено, что если в представлении инвариантного решения время t не входит в инвариантную независимую переменную, то фактор-система состоит из детерминированных уравнений и подынтегральные функции в интегралах Ито обращаются в нуль на инвариантном решении. Если время входит в инвариантную независимую переменную, то фактор-система остается системой стохастических дифференциальных уравнений. При этом, если время является инвариантом, то функция, описывающая броуновское движение, остается той же, что и в исходных уравнениях, в противном случае функция, описывающая броуновское движение в фактор-системе, изменяется по сравнению с соответствующей функцией в исходных уравнениях. Другой особенностью получения фактор-системы является то, что подынтегральная функция в интеграле Ито должна иметь особый вид, зависящий от вида допустимой группы.

Авторы выражают благодарность Б. Боучарду за консультации по поводу формул (7) и (33) и В. В. Рагулину за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pope S. B.** Turbulent flows. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
2. **Gardiner C. W.** Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences. 2nd ed. N. Y.: Springer, 1997.
3. **Kampen van N. G.** Stochastic processes in physics and chemistry. 3rd ed. Amsterdam: Elsevier Sci. and Technol. Books, 2007.
4. **Shiryaev A. N.** Essentials of stochastic finance. Facts, models, theory. Hong Kong: World Sci., 1999.

5. **Bensoussan A., Temam R.** Equatios stochastique du type Navier — Stokes // J. Funct. Anal. 1973. V. 13. P. 195–222.
6. **Mikulevicius R., Rozovskii B. L.** Stochastic Navier — Stokes equations for turbulent flows // SIAM J. Math. Anal. 2004. V. 35, N 5. P. 1250–1310.
7. **Насыров Ф. С.** Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. M.: Физматлит, 2011.
8. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. **CRC handbook** of Lie group analysis of differential equations / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton: CRC Press, 1994. V. 1.
10. **CRC handbook** of Lie group analysis of differential equations / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton: CRC Press, 1995. V. 2.
11. **CRC handbook** of Lie group analysis of differential equations / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton: CRC Press, 1996. V. 3.
12. **Овсянников Л. В.** Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 3. С. 439–442.
13. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
14. **Овсянников Л. В.** Некоторые итоги выполнения программы ПОДМОДЕЛИ для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372.
15. **Пухначев В. В.** Групповые свойства уравнений Навье — Стокса в плоском случае // ПМТФ. 1960. № 1. С. 83–90.
16. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1994.
17. **Пухначев В. В.** Симметрии в уравнениях Навье — Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 6–76.
18. **Meleshko S. V.** Methods for constructing exact solutions of partial differential equations // Mathematical and analytical techniques with applications to engineering. N. Y.: Springer, 2005.
19. **Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V.** Symmetries of integro-differential equations and their applications in mechanics and plasma physics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. (Lecture Notes Phys; V. 806).
20. **Misawa T.** New conserved quantities form symmetry for stochastic dynamical systems // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 177–192.
21. **Albeverio S., Fei S.** Remark on symmetry of stochastic dynamical systems and their conserved quantities // J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 6363–6371.
22. **Александрова О. В.** Групповой анализ двумерного стохастического уравнения Ито // Вестн. Дон — НАСА. 2005. Т. 1. С. 140–145.
23. **Alexandrova O. V.** Group analysis of the Itô stochastic system // Different. Equat. Dynam. Syst. 2006. V. 14, N 3/4. P. 255–280.
24. **Gaeta G., Quinter N. R.** Lie-point symmetries and differential equations // J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 8485–8505.
25. **Gaeta G.** Symmetry of stochastic equations // Symmetry in nonlinear mathematical physics. Kyiv: Inst. of Math. of NAS of Ukraine, 2004. P. 98–109.
26. **Ünal G.** Symmetries of Ito and Stratonovich dynamical systems and their conserved quantities // Nonlinear Dynam. 2003. V. 32. P. 417–426.
27. **Ünal G., Sun J. Q.** Symmetries conserved quantities of stochastic dynamical control systems // Nonlinear Dynam. 2004. V. 36. P. 107–122.

28. **Ibragimov N. H., Ünal G., Jogréus C.** Approximate symmetries and conservation laws for Itô and Stratonovich dynamical systems // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 297. P. 152–168.
29. **Mahomed F. M., Wafo Soh C.** Integration of stochastic ordinary differential equations from a symmetry standpoint // J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 777–782.
30. **Melnick S. A.** The group analysis of stochastic partial differential equations // Theory Stochast. Proc. 2003. V. 9, N 1/2. P. 99–107.
31. **Srihirun B., Meleshko S. V., Schulz E.** On the definition of an admitted Lie group for stochastic differential equations // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2007. V. 12, N 8. P. 1379–1389.
32. **Srihirun B., Meleshko S. V., Schulz E.** On the definition of an admitted Lie group for stochastic differential equations with multi-Brownian motion // J. Phys. A. 2006. V. 39. P. 13951–13966.
33. **Øksendal B.** Stochastic ordinary differential equations. An introduction with applications. 5th ed. Berlin: Springer, 1998.
34. **Nualart D.** Malliavin calculus and related topics. 2nd ed. N. Y.: Springer, 2006.
35. **Hearn A. C.** Reduce users manual, ver. 3.3. Santa Monica: Rand Corp. CP 78, 1987.

Поступила в редакцию 13/II 2012 г.