

УДК 539.371, 622.124

**О ДВУХ КОНЦЕПЦИЯХ ОПИСАНИЯ КИНЕМАТИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ: ПОЛЕМ СМЕЩЕНИЙ ТОЧЕК
И ПОЛЯМИ СМЕЩЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПЛОЩАДОК**

А. Ф. Ревуженко

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: revuzhenko@yandex.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Рассмотрен метод описания кинематики деформирования, основанный на концепции смещения материальных площадок среды. Показано, что перемещения площадок описываются двумя векторными полями перемещений или, как альтернатива, одним тензорным полем, полем относительного смещения площадок. Тензор несимметричен, его компоненты не связаны условиями совместности Сен-Венана. Такой подход восстанавливает “равноправие” между кинематическим и силовым описанием процесса деформирования среды. Принятое понятие напряжений относится к силам, действующим на площадки внутри тела, а понятие деформаций — к изменению расстояний между парами точек. Приведен пример построения модели первоначально изотропной геосреды, в которой используется данное описание.

Напряжение, деформация, кинематика, площадка, определяющие уравнения, геосреда

DOI: 10.15372/FTPRI20240403

EDN: HTBXIA

Согласно классическому определению, сплошная среда — это среда, в которой каждая точка арифметического пространства может рассматриваться как материальная точка деформируемой среды. Точка арифметического пространства — это тройка вещественных чисел, момент времени — одно вещественное число.

Если обратиться к теориям напряжений и деформаций сплошной среды, то можно заметить одно принципиальное несоответствие между ними. Теория деформаций основана на концепции, которую можно назвать точечной. Рассматриваются всевозможные пары близких точек. Затем вводится объект для описания изменения расстояний между точками — тензор деформаций. Исторически “точечная” концепция принята для описания внутренних усилий в среде. Рассматривались пары близких точек. Изменение расстояний между ними связывалось с силой, которая возникает между точками. Далее проводилось суммирование для каждой фиксированной точки и на этой основе строилась вся теория [Навье, 1].

Однако так сложилось, что данное направление в дальнейшем не развивалось и была принята другая концепция, которую можно назвать концепцией площадок [Коши, 1]. Здесь за начальное понятие берутся не силы между двумя точками, а силы, действующие на площадку, выделенную внутри деформируемой среды. Далее вся теория внутренних сил пошла по этому “площадочному” пути, в то время как описание кинематики осталось в рамках прежней “точечной” концепции.

Естественно сделать переход к площадкам и для описания кинематики. Тогда кинематика и внутренние усилия будут описываться в рамках одной и той же “площадочной” концепции. Необходимость в этом возникла при исследовании моделей сыпучей среды, в которых используются определенные регулярные упаковки упругих или жестких частиц [2–4]. Модели этого типа используются также при описании твердых тел, в которых учитывается их кристаллическая структура [5, 6], механики кристаллических решеток [7–11] и наноматериалов [12–16].

КОНЦЕПЦИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПЛОЩАДОК

Пусть элемент среды испытывает простой сдвиг. Возможно множество внутренних механизмов, которые реализуют данный сдвиг. Возможно также и множество различных мер напряжений и деформаций простого сдвига. Более адекватной будет математическая модель, в которой достигнуто наибольшее соответствие выбранных мер реальному механизму деформирования. Например, пусть структурные элементы среды представляют собой бесконечно тонкие горизонтальные пластины, а сдвиг происходит вследствие скольжения пластин подобно сдвигу колоды карт. Выберем в исходной конфигурации материальные точки A , B , C так, как показано на рис. 1а.

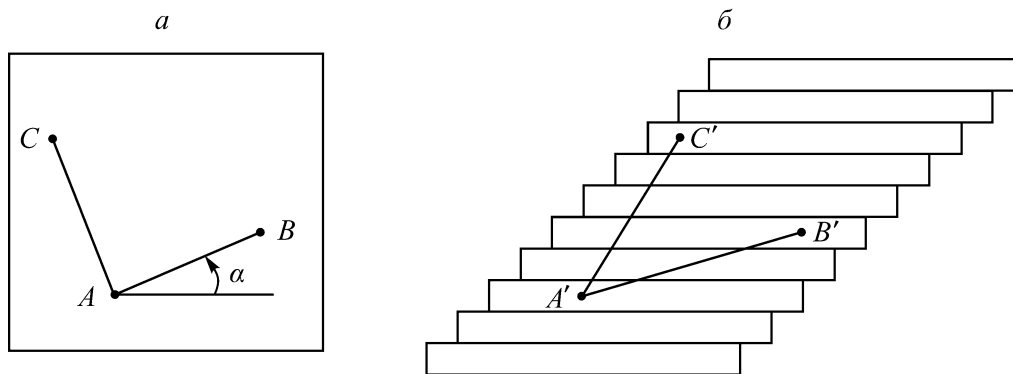


Рис. 1. Исходное положение материальных точек (а) и в результате деформирования (б)

В результате деформирования точки перейдут в новые положения A' , B' , C' (рис. 1б). Тензорное описание позволит вычислить изменение длины материальных волокон AB и AC , изменение угла CAB и т. д. Причем это можно сделать при любой исходной ориентации отрезков AC , AB , т. е. при любых углах α . Однако при $\alpha \neq 0$ никакого физического смысла изменение длины волокна AB и угла CAB не имеет. Более того, никакого материального волокна AB при $\alpha \neq 0$ в действительности нет. Есть только относительное скольжение по горизонтальным площадкам структурных элементов среды. Все остальное — описание того, как выглядит данное скольжение с различных точек зрения. Физический смысл имеет только вектор смещения точки C относительно площадки AB при $\alpha = 0$. В рассматриваемом примере вектор

направлен горизонтально. В общем случае, если учесть дилатансию (неровности поверхности пластин), появляется также вертикальная компонента смещения. Главное, что данный вектор смещения ассоциирован с конкретным семейством площадок. Такие площадки назовем определяющими. Ясно, что адекватная математическая модель деформирования должна описывать физические процессы, которые происходят именно на определяющих площадках.

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

В [2] рассмотрена плоская анизотропная модель среды с двумя семействами определяющих площадок. Ориентация площадок заранее известна. В [17] дано обобщение на трехмерный случай. Рассмотрим обобщение плоской модели на случай первоначально изотропного тела, когда ориентация определяющих площадок заранее неизвестна.

Обратимся к стандартной процедуре построения математических моделей. Предполагается, что кинематика деформирования описывается векторным полем смещений материальных точек (“точечная” концепция). Данное поле является достаточно гладким — существуют все необходимые частные производные (постулат о диффеоморфизме [18]). Внутренние силы описываются тензором напряжений (“площадочная” концепция). Поле напряжений также считается достаточно гладким. Выделяется элементарный объем среды и предполагается, что в пределах объема напряжения могут меняться. Из условий равновесия следует симметрия тензора напряжений и два дифференциальных уравнения относительно напряжений. Второй шаг состоит в том, что напряжения в пределах элементарного объема полагаются постоянными. На этой основе строятся определяющие уравнения. Формально данный подход является непоследовательным: при выводе одних уравнений напряжения в элементе среды считаются переменными, а при выводе других уравнений — постоянными. Более последовательным представляется подход, когда напряжения предполагаются переменными как при выводе уравнений равновесия, так и при выводе определяющих уравнений. Отсюда следует один принципиальный вывод. Четырем граням A, B, C, D элемента соответствуют восемь компонент векторов перемещений и восемь компонент напряжений. Причем и те и другие ассоциированы с указанными гранями — площадками (рис. 2).

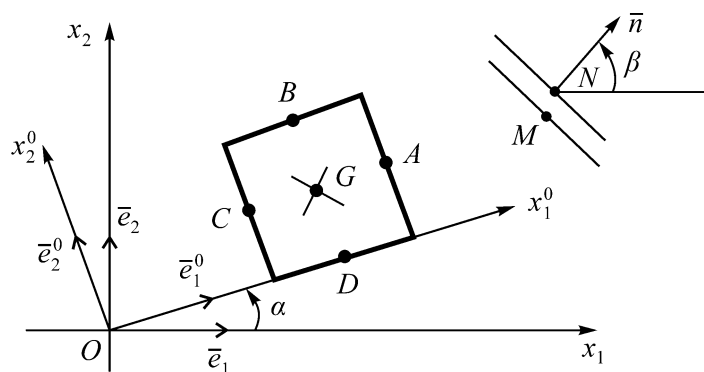


Рис. 2. Элемент среды, выделенный определяющими площадками

Три условия равновесия и три условия инвариантности уравнений относительно жесткого переноса и поворота элемента означают, что определяющих уравнений должно быть пять, а не три, как при стандартном подходе. Рассмотрим их вывод.

Предположим, что определяющие площадки ортогональны между собой. Введем криволинейную систему координат $Ox_1^0x_2^0$ с координатными линиями, касательными к определяющим площадкам. Все переменные, относящиеся к этим координатам, будем отмечать индексом “0”. Силы, действующие на элемент среды в точках A, B , обозначим $\overline{f^0(A)}, \overline{f^0(B)}$, смещения точек — $\overline{u^0(A)}, \overline{u^0(B)}$. В разностных уравнениях и краевых условиях фигурируют все точки A, B, C, D для всех элементов. Уравнения равновесия, определяющие уравнения и условия на контактах, приводят к замкнутой системе уравнений — число неизвестных равно числу уравнений. Однако при переходе к континуальным уравнениям возникает проблема. Действительно, условие $AB \rightarrow 0$ означает, что все точки граней стремятся к центру элемента G . “Площадочная” концепция напряжений требует, чтобы

$$\begin{aligned}\overline{f^0(A)} &\rightarrow \{\sigma_{11}^0(G), \sigma_{12}^0(G)\}, \\ \overline{f^0(B)} &\rightarrow \{\sigma_{21}^0(G), \sigma_{22}^0(G)\}.\end{aligned}\quad (1)$$

При этом “точечная” концепция перемещений дает принципиально другой результат:

$$\overline{u^0(A)} \rightarrow \overline{u^0(G)}, \quad \overline{u^0(B)} \rightarrow \overline{u^0(G)}.\quad (2)$$

Значит, $\overline{u^0(A)} \rightarrow \overline{u^0(B)}$. Подсчет баланса континуальных уравнений и неизвестных указывает на переопределенность системы — число уравнений превышает число неизвестных. Парадокс, так как в разностной системе баланс был. Баланс восстанавливается, если отказаться от “точечной” концепции описания кинематики. В этом случае переход (2) меняется на переход того же вида, что и (1):

$$\begin{aligned}\overline{u^0(A)} &\rightarrow \overline{v^0(G)}, \\ \overline{u^0(B)} &\rightarrow \overline{w^0(G)}.\end{aligned}\quad (3)$$

Баланс восстанавливается.

Дальнейшие построения удобнее делать, исходя из выражения для удельной энергии деформирования. Суммирование работы по всем четырем площадкам элемента среды приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned}\Pi = & \frac{\partial}{\partial x_1^0} (\sigma_{11}^0 v_1^0 + \sigma_{12}^0 v_2^0) + \frac{\partial}{\partial x_2^0} (\sigma_{12}^0 w_1^0 + \sigma_{22}^0 w_2^0) = \sigma_{11}^0 \frac{\partial v_1^0}{\partial x_1^0} + \sigma_{12}^0 \left(\frac{\partial v_2^0}{\partial x_1^0} + \frac{\partial w_1^0}{\partial x_2^0} \right) + \\ & + \sigma_{22}^0 \frac{\partial w_2^0}{\partial x_2^0} + \left(\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial x_1^0} - \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_2^0} \right) \frac{v_1^0 - w_1^0}{2} + \left(\frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_1^0} - \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial x_2^0} \right) \frac{v_2^0 - w_2^0}{2} + \\ & + \left(\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial x_1^0} + \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_2^0} \right) \frac{v_1^0 + w_1^0}{2} + \left(\frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_1^0} + \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial x_2^0} \right) \frac{v_2^0 + w_2^0}{2}.\end{aligned}\quad (4)$$

Полученное равенство (4) представляет собой тождество. Поэтому $\overline{v^0}, \overline{w^0}$ заменим на $d\overline{v^0}, d\overline{w^0}$ и предположим, что значение левой части $d\Pi$ есть полный дифференциал. В результате получим выражения для упругих деформаций. Добавляя к ним пластические деформации и выбирая тот или иной потенциал, получим соответствующие определяющие уравнения, например следующие [2]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial x_1^0} + \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_2^0} + F_1^0 &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_1^0} + \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial x_2^0} + F_2^0 = 0, \\
\frac{\partial v_1^0}{\partial x_1^0} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11}^0 - \nu \sigma_{22}^0] + r_{11}(\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0), \\
\frac{\partial w_2^0}{\partial x_2^0} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22}^0 - \nu \sigma_{11}^0] + r_{22}^0, \\
\frac{\partial v_2^0}{\partial x_1^0} + \frac{\partial w_1^0}{\partial x_2^0} &= \frac{\sigma_{12}^0}{\mu} + r_{12}^0 + r_{21}^0, \\
v_1^0 - w_1^0 &= \eta \left[\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial x_1^0} - \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_2^0} \right], \\
v_2^0 - w_2^0 &= \eta \left[\frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_1^0} - \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial x_2^0} \right],
\end{aligned} \tag{5}$$

где F_1^0, F_2^0 — компоненты объемной силы; E, ν, μ, η — параметры среды; $r_{ij}^0, i = 1, 2$ — компоненты пластических деформаций. Уравнения записаны в локальной системе координат, оси которой ориентированы вдоль определяющих площадок, где α — угол между локальной и исходной системой координат Ox_1x_2 (см. рис. 2). Если угол α известен из дополнительных соображений, то система (2) становится замкнутой — семь уравнений относительно семи неизвестных:

$$\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0; v_1^0, v_2^0, w_1^0, w_2^0. \tag{6}$$

По формуле Коши краевые условия относительно напряжений σ_{ij} преобразуются в условия для напряжений (6). Для смещений ситуация сложнее. Если на границе значение $\alpha = 0$, то на участках $x_1^0 = x_1 = \text{const}$ граничное перемещение равно v_1^0, v_2^0 , а на участках $x_2^0 = x_2 = \text{const}$ — w_1^0, w_2^0 . Общий случай $\alpha \neq 0$ рассмотрим далее.

ИЗОТРОПНАЯ МОДЕЛЬ

Итак, при заданном угле α система (5) описывает поведение анизотропной среды. Вид анизотропии связан с ориентацией определяющих площадок. Представляет интерес случай, когда среда первоначально является изотропной, а сами определяющие площадки формируются в процессе нагружения. В классических моделях сыпучей среды такая ситуация является типичной [19]. В изотропном случае ставится условие “обыкновенной предельной зависимости”. Уравнения Кеттера показывают, что в этом случае ориентация площадок скольжения будет определяться углом внутреннего трения наибольшего сжатия элементарных объемов среды. С направлением наибольшего сжатия можно связать также и ориентацию определяющих площадок.

Вторая возможность связана с последними уравнениями системы (5). Они описывают локальные изгибы элементарного объема в направлениях \bar{e}_1^0, \bar{e}_2^0 . Из всевозможных направлений выделяется одно — направление, по которому изгиб есть (например, по Ox_1^0), а по второму направлению изгиб отсутствует ($v_2^0 - w_2^0 = 0$). Следовательно, при $\eta \neq 0$ имеем

$$\frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_1^0} = \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial x_2^0}. \quad (7)$$

Уравнение (7) включается в систему (5), а угол α — в список неизвестных (6). В результате приходим к замкнутой модели первоначально изотропной среды. Здесь исходная упаковка частиц предполагается стохастической и изотропной. Ориентация определяющих площадок заранее неизвестна и определяется напряженно-деформированным состоянием среды.

ПОЛЕ СМЕЩЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПЛОЩАДОК

Для построения замкнутой модели достаточно рассмотреть напряжения только на определяющих площадках и два поля смещений этих площадок. Каждое из таких полей относится к своему семейству площадок, т. е. ассоциировано с соответствующими площадками. Для полноты описания необходимо ответить на вопрос: как выглядит указанный процесс сдвигов по определяющим площадкам в произвольной системе координат? Иными словами, речь идет о построении “площадочной” кинематики деформирования для любых площадок.

Пусть \bar{n} — нормаль к близким площадкам M и N (см. рис. 2). Вектором относительных смещений площадок M и N назовем предел

$$\bar{E}_n = \lim_{MN \rightarrow 0} \frac{\bar{u}_n(M) - \bar{u}_n(N)}{MN}, \quad (8)$$

здесь $\bar{u}_n(M)$, $\bar{u}_n(N)$ — векторы смещения точек M и N , ассоциированные с нормалью \bar{n} .

Понятие ассоциированности определим следующим образом. Если направление \bar{n} относится к определяющим площадкам, то положим

$$\begin{aligned} \bar{E}_n &= E_{11}^0 \bar{e}_1^0 + E_{12}^0 \bar{e}_2^0 \quad \text{при } \bar{n} = \bar{e}_1^0, \\ \bar{E}_n &= E_{21}^0 \bar{e}_1^0 + E_{22}^0 \bar{e}_2^0 \quad \text{при } \bar{n} = \bar{e}_2^0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$E_{11}^0 = \frac{\partial v_1^0}{\partial x_1^0}, \quad E_{12}^0 = \frac{\partial v_2^0}{\partial x_1^0}, \quad E_{21}^0 = \frac{\partial w_1^0}{\partial x_2^0}, \quad E_{22}^0 = \frac{\partial w_2^0}{\partial x_2^0}. \quad (10)$$

Далее необходимо определить относительные смещения для площадок произвольной ориентации. Как известно, понятие смещения является первичным по отношению к понятию работы: работа равна скалярному произведению вектора силы на вектор смещения. Основная идея состоит в том, чтобы для элемента среды, выделенного определяющими площадками, работу вычислить как сумму соответствующих скалярных произведений. А для элементов среды, выделенных произвольными площадками, поступить по-другому. Работу и силы считать первичными понятиями, а смещение найти как частное от деления работы на силу. Точнее, вектор смещения необходимо найти из условия: скалярное произведение искомого вектора на известный вектор напряжения должно давать известный скаляр удельной работы.

Вычислим удельную работу W , совершаемую над элементарным объемом, выделенным определяющими площадками. Напряжения в пределах объема считаем постоянными:

$$W = \sigma_{11}^0 E_{11}^0 + \sigma_{22}^0 E_{22}^0 + \sigma_{12}^0 E_{12}^0 + \sigma_{21}^0 E_{21}^0. \quad (11)$$

Воспользуемся формулами тензорного проектирования для напряжений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^0 &= \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\alpha, \\
 \sigma_{22}^0 &= \sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha - \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\alpha, \\
 \sigma_{12}^0 &= -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{12} \cos^2 \alpha - \sigma_{21} \sin^2 \alpha, \\
 \sigma_{21}^0 &= -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\alpha - \sigma_{12} \sin^2 \alpha + \sigma_{21} \cos^2 \alpha.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Подставив (12) в (11), получим

$$W = \sigma_{11} E_{11} + \sigma_{22} E_{22} + \sigma_{12} E_{12} + \sigma_{21} E_{21}, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= E_{11}^0 \cos^2 \alpha + E_{22}^0 \sin^2 \alpha - \frac{E_{12}^0 + E_{21}^0}{2} \sin 2\alpha, \\
 E_{22} &= E_{11}^0 \sin^2 \alpha + E_{22}^0 \cos^2 \alpha + \frac{E_{12}^0 + E_{21}^0}{2} \sin 2\alpha, \\
 E_{12} &= \frac{E_{11}^0 - E_{22}^0}{2} \sin 2\alpha + E_{12}^0 \cos^2 \alpha - E_{21}^0 \sin^2 \alpha, \\
 E_{21} &= \frac{E_{11}^0 - E_{22}^0}{2} \sin 2\alpha - E_{12}^0 \sin^2 \alpha + E_{21}^0 \cos^2 \alpha.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда следует, что векторы

$$\begin{aligned}
 E_{11} \bar{e}_1 + E_{12} \bar{e}_2, \\
 E_{21} \bar{e}_1 + E_{22} \bar{e}_2
 \end{aligned} \tag{15}$$

можно считать относительными смещениями площадок с нормальными $\bar{n} = \bar{e}_1$ и $\bar{n} = \bar{e}_2$, т. е. относительными смещениями площадок, отклоняющихся от определяющих площадок на любой заданный угол α . Обозначим компоненты смещения площадки $\bar{n} = \bar{e}_1$ через $v_1(\alpha)$, $v_2(\alpha)$, а для площадки $\bar{n} = \bar{e}_2$ — через $w_1(\alpha)$, $w_2(\alpha)$ (т. е. без индекса “0”). Тогда из (15) имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_1(\alpha)}{\partial x_1} &= E_{11}, & \frac{\partial v_2(\alpha)}{\partial x_1} &= E_{12}, \\
 \frac{\partial w_1(\alpha)}{\partial x_2} &= E_{21}, & \frac{\partial w_2(\alpha)}{\partial x_2} &= E_{22}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Заменим правые части выражениями (14) и (10). Получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= \cos^2 \alpha \frac{\partial v_1^0}{\partial x_1^0} + \sin^2 \alpha \frac{\partial w_2^0}{\partial x_2^0} - \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{\partial v_2^0}{\partial x_1^0} + \frac{\partial w_1^0}{\partial x_2^0} \right), \\
 \frac{\partial w_2}{\partial x_2} &= \sin^2 \alpha \frac{\partial v_1^0}{\partial x_1^0} + \cos^2 \alpha \frac{\partial w_2^0}{\partial x_2^0} + \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{\partial v_2^0}{\partial x_1^0} + \frac{\partial w_1^0}{\partial x_2^0} \right), \\
 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} &= \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{\partial v_1^0}{\partial x_1^0} - \frac{\partial w_2^0}{\partial x_2^0} \right) + \cos^2 \alpha \frac{\partial v_2^0}{\partial x_1^0} - \sin^2 \alpha \frac{\partial w_1^0}{\partial x_2^0}, \\
 \frac{\partial w_1}{\partial x_2} &= \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{\partial v_1^0}{\partial x_1^0} - \frac{\partial w_2^0}{\partial x_2^0} \right) - \sin^2 \alpha \frac{\partial v_2^0}{\partial x_1^0} + \cos^2 \alpha \frac{\partial w_1^0}{\partial x_2^0}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Правые части представляют собой формулы тензорного проектирования, поэтому объект

$$E = E_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j$$

можно назвать тензором относительных смещений площадок. Тензор несимметричен и зависит от поворота объема среды. Главное его отличие от тензора деформаций, отвечающего принятому “точечному” описанию кинематики, состоит в том, что для его компонент не требуется выполнение условия совместности Сен-Венана.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. В уравнениях (17) значение угла $\alpha = \text{const}$. Решение представляет собой интегралы от правых частей. Основной вопрос: как функции v_1 , v_2 , w_1 , w_2 , зависящие от угла α , связаны со спецификой правых частей (17). Перейдем в (17) к производным по x_1^0 , x_2^0 и перепишем уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_1^0} \cos \alpha [v_1 - (\cos \alpha v_1^0 - \sin \alpha v_2^0)] - \frac{\partial}{\partial x_2^0} \sin \alpha [v_1 - (\cos \alpha w_1^0 - \sin \alpha w_2^0)] &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial x_1^0} \sin \alpha [w_2 - (\sin \alpha v_1^0 + \cos \alpha v_2^0)] + \frac{\partial}{\partial x_2^0} \cos \alpha [w_2 - (\sin \alpha w_1^0 + \cos \alpha w_2^0)] &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial x_1^0} \cos \alpha [v_2 - (\sin \alpha v_1^0 + \cos \alpha v_2^0)] - \frac{\partial}{\partial x_2^0} \sin \alpha [v_2 - (\sin \alpha w_1^0 + \cos \alpha w_2^0)] &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial x_1^0} \sin \alpha [w_1 - (\cos \alpha v_1^0 - \sin \alpha v_2^0)] + \frac{\partial}{\partial x_2^0} \cos \alpha [w_1 - (\cos \alpha w_1^0 - \sin \alpha w_2^0)] &= 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Получаем решение, которое обращает в ноль не только суммы (18), но и каждое из выражений под знаком производной. Правда, это возможно только при

$$\begin{aligned}
 v_1^0 &= w_1^0 = u_1^0, \\
 v_2^0 &= w_2^0 = u_2^0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 v_1 &= w_1 = \cos u_1^0 - \sin u_2^0, \\
 v_2 &= w_2 = \sin u_1^0 + \cos u_2^0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, здесь “площадочное” описание кинематики фактически перешло в “точечное”. Значит, если векторы смещений на определяющих площадках совпадают между собой (условия (19)), то определение компонент вектора, ассоциированного с любой площадкой, делается по правилам векторного проектирования (20). Фактически это и есть общепринятое,

“точечное” описание кинематики. Действительно, если исходить из заданного поля смещений $\bar{u}(x_1, x_2)$ и подсчитать относительное смещение площадок (8), то приходим к формулам тензорного проектирования, причем компоненты тензора будут удовлетворять условиям совместности Сен-Венана. Следовательно, необходимое условие согласованности двух методов описания кинематики деформирования выполняются, а “площадочный” подход к описанию кинематики приводит к моделям механики обобщенных сплошных сред [20, 21].

ВЫВОДЫ

“Точечная” кинематика деформирования среды описывается одним векторным полем перемещений. Альтернативное описание — тензором деформаций, компоненты которого удовлетворяют условиям совместности Сен-Венана.

“Площадочная” кинематика описывается двумя векторными полями перемещений. Альтернативное описание — тензором второго ранга (тензором относительного смещения площадок). На компоненты тензора условия Сен-Венана не накладываются.

Наличие двух полей перемещений означает, что каждая материальная точка среды заменяется бесконечно малым материальным объемом. Одно поле соответствует смещениям точек на концах выбранного диаметра элементарного объема, второе поле — это смещение концов диаметра, ортогонального первому.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляв А. Математическая теория упругости. — М.; Л.: Объединенное науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 1935. — 675 с.
2. Ревуженко А. Ф., Микенина О. А. Упругопластическая модель горной породы с линейным структурным параметром // ПМТФ. — 2018. — Т. 59. — № 2. — С. 167–176.
3. Ревуженко А. Ф., Микенина О. А. Упругопластическая модель горной породы с внутренними самоуравновешенными приближениями // ФТПРПИ. — 2018. — № 3. — С. 11–21.
4. Ревуженко А. Ф., Микенина О. А. Упругопластическая модель горной породы с внутренними самоуравновешенными напряжениями. Континуальное приближение // ФТПРПИ. — 2020. — № 2. — С. 3–11.
5. Павлов И. С. Упругие волны в двумерной зернистой среде // Проблемы прочности и пластичности. — 2005. — Вып. 67. — С. 119–131.
6. Павлов И. С., Потапов А. И. Двумерная модель зернистой среды // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2007. — № 2. — С. 110–121.
7. Povstenko Y. Дробная нелокальная теория упругости и решения для прямых винтовых и краевых дислокаций // Физ. мезомеханика. — 2020. — № 2. — С. 35–44.
8. Макаров П. В., Бакеев Р. А., Смолин И. Ю. Моделирование локализованной неупругой деформации на мезоуровне с учетом локальной кривизны кристаллической решетки в рамках несимметричной теории Коссера // Физ. мезомеханика. — 2019. — № 4. — С. 29–38.
9. Rys M. and Petryk H. Gradient crystal plasticity models with a natural length scale in the hardening law, Int. J. Plast., 2018, Vol. 111. — P. 168–187.
10. Pouriaeyevali H. and Xu B.-X. Decomposition of dislocation densities at grain boundary in a finitedeformation gradient crystal-plasticity framework, Int. J. Plast., 2017, Vol. 96. — P. 36–55.

11. **Ерофеев В. И., Павлов И. С.** Параметрическая идентификация кристаллов, имеющих кубическую решетку, с отрицательным коэффициентом Пуассона // ПМТФ. — 2015. — Т. 56. — № 6. — С. 94–101.
12. **Zenkour A. M. and Radwan A. F.** Нелокальная теория градиента деформации для изогнутых нанобалок из пористого функционально градиентного материала при различных граничных условиях // Физ. мезомеханика. — 2020. — № 3. — С. 77–92.
13. **Chih-Ping Wu and Jung-Jen Yu.** A review of mechanical analyses of rectangular nanobeams and single-, double-, and multi-walled carbon nanotubes using Eringen's nonlocal elasticity theory, J. Arch. Appl. Mech., 2019, Vol. 89. — P. 1761–1792.
14. **Седечи М., Ягутян А.** Исследование на основе уравнений теории упругости динамической неустойчивости колебаний углеродных нанотрубок, расположенных вблизи графитовых листов // ПМТФ. — 2016. — Т. 57. — № 1. — С. 105–117.
15. **Павлов И. С., Лазарев В. А.** Нелинейные упругие волны в двумерной нанокристаллической среде // Вестн. науч.-технол. развития. Национальная технологическая группа. — 2008. — № 4 (8). — С. 45–53.
16. **Лобода О. С., Кравцов А. М.** Влияние масштабного фактора на модель упругости трехмерного нанокристалла // Изв. РАН. МТТ. — 2005. — № 4. — С. 27–41.
17. **Ревуженко А. Ф.** Трехмерная модель линейно упругого тела со структурой // Физ. мезомеханика. — 2021. — Т. 24. — № 3. — С. 26–35.
18. **Трусов П. В.** Некоторые вопросы нелинейной механики деформируемого тела (в порядке обсуждения) // Математическое моделирование систем и процессов. — 2009. — № 12. — С. 85–95.
19. **Соколовский В. В.** Статика сыпучей среды. — М.: Наука, 1990. — 272 с.
20. **Смолин И. Ю.** Использование микрополярных моделей для описания пластического деформирования на мезоуровне // Математическое моделирование систем и процессов. — 2006. — № 14. — С. 189–205.
21. **Ерофеев В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. — М.: МГУ, 1999. — 328 с.

Поступила в редакцию 13/VI 2024

После доработки 25/VI 2024

Принята к публикации 27/VI 2024