

О МЕТОДЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОБТЕКАНИЯ ТОНКИХ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

В. В. Сычев

(Москва)

Затупление передних кромок тел, движущихся с большими сверхзвуковыми скоростями, является, по-видимому, необходимым средством предохранения их от оплавления и разрушения в условиях аэродинамического нагрева. Поэтому изучению обтекания затупленных тел в последние годы было уделено очень большое внимание.

Если рассматриваемое тело является тонким, а затупление малым, то влияние такого затупления на характер поля течения обычно рассматривается на основе так называемой теории малых возмущений гиперзвукового потока [1, 2]. При этом действие сопротивления затупления заменяется действием сосредоточенной силы, приложенной к переднему концу тела. Основанное на этой модели решение задачи об обтекании затупленной пластины или цилиндра при нулевом угле атаки, как известно [3, 4], математически эквивалентно решению задачи о сильном взрыве на плоскости или прямой [5]. Для затупленных тел с ненулевым наклоном боковой поверхности соответствующая нестационарная задача наряду с действием сильного взрыва включает также действие поршня, расширяющегося по закону, определенному формой боковой поверхности тела [6, 7].

Во всех случаях решение, основанное на аналогии с сильным взрывом, имеет смысл асимптотического представления точного решения на бесконечности и определяет характер течения лишь на расстояниях весьма больших по сравнению с толщиной или диаметром затупления. Это обстоятельство связано с тем, что теория малых возмущений, строго говоря, неприменима не только в окрестности передней затупленной кромки тела, где возмущения поля скоростей не являются малыми, но также и во всей высокоэнтропийной части потока (энтропийном слое), примыкающей к поверхности тела и занятой линиями тока, пересекающими поверхность ударной волны вблизи ее вершины.

Значения энтропии в этой области течения, определенные на основе приближенных соотношений теории малых возмущений, оказываются столь сильно завышенными, что плотность потока оказывается здесь близкой, а на поверхности тела даже равной нулю. В результате расположение и форма линий тока в энтропийном слое, а следовательно, и его толщина могут оказаться далекими от их истинных значений. Поэтому решение, полученное на основе теории малых возмущений, будет правильно описывать характер течения лишь на таких расстояниях от передней затупленной кромки, на которых относительная толщина энтропийного слоя становится ничтожно малой.

Анализ этого положения были посвящены работы [8, 9], в которых путем рассмотрения течения в энтропийном слое на основе точных соотношений был указан в принципе достаточно простой способ определения исправленной формы контура тела, к которой должно быть отнесено распределение давления, рассчитанное на основе теории малых возмущений, а также определены все остальные параметры течения на поверхности тела.

Однако использование этого метода в каждом конкретном случае связано с необходимостью проведения довольно трудоемких расчетов. Кроме того, это решение, основанное на частичном использовании точных соотношений и частичном использовании приближенных соотношений теории малых возмущений, не является вполне удовлетворительным с математической точки зрения.

Целью настоящей работы является построение приближенного решения задачи обтекания тонкого затупленного тела на основе единого метода малых возмущений.

Основная идея при этом состоит в использовании техники построения решения равномерно справедливого во всей рассматриваемой области течения, предложенной в работе [10] и известной [11] как метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го (ПЛГ).

Необходимость использования метода ПЛГ, как известно, возникает в тех случаях, когда при построении метода последовательных приближений, основанного на малости какого-либо из параметров задачи, в первом приближении возникает особенность, несвойственная точному решению задачи. Следующие приближения, обычно определяемые как следующие члены разложения искомых функций в степенные ряды по малому параметру, как правило, не только сохраняют эту особенность, но делают ее еще

резче выраженной. В результате, начиная с некоторого приближения, решение вблизи этой особенности перестает существовать. Основным в методе ПЛГ является устранение этой трудности путем разложения в ряды по степеням малого параметра не только искомых функций, но также и независимых переменных. Рассматриваемая задача будет как раз задачей такого рода. Теория малых возмущений гиперзвукового потока является, как известно, первым приближением в процессе построения решения в виде рядов по степеням малого параметра, определенного как квадрат относительной толщины тела или относительной ширины возмущенной области течения. При этом поверхность затупленного тела оказывается особой линией, так как энтропия в потоке по мере приближения к этой линии неограниченно возрастает. Как будет показано ниже, попытка построения следующих приближений приводит к усилению этой особенности, которая уже во втором приближении оказывается неинтегрируемой.

Использование метода ПЛГ позволяет устранить эту трудность и построить решение, равномерно справедливое во всем потоке, включая энтропийный слой. Практически построение такого решения приводит к определению смещения линий тока вблизи поверхности тела, в результате которого особенность «поглощается» телом и решение вне тела оказывается свободным от особенностей. В первом приближении это смещение контура тела удается определить даже в замкнутом виде.

1. Рассмотрим обтекание тонкого затупленного профиля или тела вращения однородным гиперзвуковым потоком газа с числом $M_\infty \gg 1$.

Относительную толщину тела, определенную как отношение его максимальной толщины или диаметра к длине, будем полагать малой

$$\tau_1 = D/L \ll 1 \quad (1.1)$$

Пусть толщина или диаметр затупления передней кромки будет d . Тогда, следуя работе [9], введем в рассмотрение другой малый параметр

$$\tau = k \left(\frac{d}{L} \right)^{(1+\nu)/(3+\nu)} \ll 1 \quad (1.2)$$

характеризующий влияние этого затупления.

Здесь $\nu = 0.1$ соответственно для плоского и осесимметрического случая; k — постоянный множитель порядка единицы, определенный ниже. Большой из параметров τ_1 , τ будет определять порядок возмущений, вносимых телом в поток.

Имея в виду определить влияние передних затупленных кромок в той области течения, где оно, по крайней мере, того же порядка, что и влияние боковой поверхности, положим $\tau \gtrsim \tau_1$. При этом в силу гиперзвукового характера течения имеем $M_\infty \tau \gtrsim 1$.

Система дифференциальных уравнений газовой динамики плоского или осесимметричного течения может быть представлена в виде

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = -\frac{1}{y^\nu} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p^{1/\gamma}}{\rho} \right) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho u y^\nu}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{u} \quad (1.3)$$

$$u^2 + v^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = U_\infty^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty}$$

Здесь u , v — составляющие вектора скорости в декартовой или цилиндрической системе координат, p — давление, ρ — плотность, ψ — функция тока, γ — отношение удельных теплоемкостей газа. Индекс ∞ относится к условиям в невозмущенном потоке скорости U_∞ .

Система граничных условий на ударной волне $y = Y(x)$ имеет вид

$$\psi = \frac{1}{1+\nu} \rho_\infty U_\infty Y^{1+\nu}(x), \quad u = U_\infty \left[1 - \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{Y'^2}{1+Y'^2} - \frac{1}{M_\infty^2} \right) \right] \quad (1.4)$$

$$v = \frac{2}{\gamma+1} U_\infty \frac{1}{Y'} \left(\frac{Y'^2}{1+Y'^2} - \frac{1}{M_\infty^2} \right)$$

$$p = \frac{2}{\gamma+1} \rho_\infty U_\infty^2 \left(\frac{Y'^2}{1+Y'^2} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{M_\infty^2} \right)$$

$$\rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_\infty \left(1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{M_\infty^2} \frac{1+Y'^2}{Y'^2} \right)^{-1}$$

$$y = Y(x)$$

На поверхности тела

$$\psi = 0, \quad y = y_{b_0}(x) \quad (1.5)$$

Будем искать решение (1.3) — (1.5) в виде разложений по степеням малого параметра τ . Искомые функции можно [2] представить в виде

$$\begin{aligned} u &= U_\infty (1 + \tau^2 u_0 + \tau^4 u_1 + \dots) \\ v &= U_\infty \tau (v_0 + \tau^2 v_1 + \dots) \\ p &= \rho_\infty U_\infty^2 \tau^2 (p_0 + \tau^2 p_1 + \dots) \\ \rho &= \rho_\infty (\rho_0 + \tau^2 \rho_1 + \dots) \\ y &= \tau L (y_0 + \tau^2 y_1 + \dots) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Независимые переменные представим в виде

$$x = L\xi, \quad \Psi = \rho_\infty U_\infty (\tau L)^{1+\nu} [\eta + \tau^2 \psi_1(\xi, \eta) + \dots] \quad (1.7)$$

т. е., разлагая в соответствии с методом ПЛГ одну из независимых переменных так же, как искомые функции по степеням малого параметра τ . Для преобразования производных имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{L} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \tau^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \dots \\ \frac{\partial}{\partial \Psi} &= \frac{1}{\rho_\infty U_\infty (\tau L)^{1+\nu}} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \tau^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнение поверхности ударной волны представим в виде

$$Y(x) = \tau L [Y_0(\xi) + \tau^2 Y_1(\xi) + \dots] \quad (1.9)$$

Подставляя (1.6) — (1.9) в точные соотношения, можно получить уравнения и граничные условия первого и всех последующих приближений. Они будут содержать функции преобразования независимой переменной ψ_1, ψ_2 и т. д. Возможностью произвольного выбора этих функций следует распорядиться так, чтобы попытаться в каждом из приближений получить решение, свободное от особенностей.

2. Подставляя разложения (1.6) — (1.9) в уравнения и граничные условия и сохраняя главные члены, получим:

дифференциальные уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial \eta} &= -\frac{1}{y_0^\nu} \frac{\partial v_0}{\partial \xi}, \quad \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} = S_0(\eta) \\ \frac{\partial y_0}{\partial \eta} &= \frac{1}{\rho_0 y_0^\nu}, \quad \frac{\partial y_0}{\partial \xi} = v_0 \quad (S_0(\eta) - \text{функция энтропии}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$2u_0 + v_0^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{M_\infty^2 \tau^2}$$

граничные условия на поверхности ударной волны

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{1+\nu} Y_0^{1+\nu}(\xi) & v_0 &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{Y_0'} \left(Y_0'^2 - \frac{1}{M_\infty^2 \tau^2} \right) \\ p_0 &= \frac{2}{\gamma+1} \left(Y_0'^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{M_\infty^2 \tau^2} \right) \\ \rho_0 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} Y_0'^2 \left(Y_0'^2 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{M_\infty^2 \tau^2} \right)^{-1} \\ y_0 &= Y_0(\xi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

граничные условия на поверхности тела

$$\eta = 0, \quad y_0 = \frac{\tau_1}{\tau} Y_{b_0}(\zeta) \quad (2.3)$$

Здесь безразмерная функция $Y_{b_0}(\zeta)$, определяющая форму боковой поверхности тела, выбрана так, что для аффинноподобных тел она одинакова. К граничным условиям (2.2), (2.3), как известно [7], должно быть еще присоединено начальное условие, определяющее действие затупления, как действие сосредоточенной силы. Оно может быть получено на основании рассмотрения выражения для сопротивления тела, которое запишем в виде

$$X = 2\pi \int_0^\theta \left(U_\infty - u - \frac{p}{\rho u} \right) d\psi \quad \left(\theta = \frac{1}{1+\nu} \rho_\infty v_\infty Y^{1+\nu}(x) \right) \quad (2.4)$$

Сохраняя главные члены в этом выражении и переходя к пределу при $\zeta \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_0^\vartheta \left(u_0 - \frac{p_0}{\rho_0} \right) d\eta = \frac{C_{x0}}{4^{1+\nu} k^{3+\nu}} \quad \left(\vartheta = \frac{1}{1+\nu} Y_0^{1+\nu}(\zeta) \right) \quad (2.5)$$

Здесь C_{x0} — коэффициент сопротивления затупления

$$C_{x0} = \frac{X_0}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \pi^{\frac{1}{2}} d^{1+\nu} / 4^\nu} \quad (2.6)$$

При выводе (2.5) было использовано для параметра τ определение (1.2), в котором постоянный множитель теперь выберем как

$$k = C_{x0}^{\frac{1}{3+\nu}} \quad (2.7)$$

В результате начальное условие (2.5) принимает окончательный вид

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left\{ 4^{1+\nu} \int_0^\vartheta \left(u_0 - \frac{p_0}{\rho_0} \right) d\eta \right\} = 1 \quad \left(\vartheta = \frac{1}{1+\nu} Y_0^{1+\nu}(\zeta) \right) \quad (2.8)$$

Система соотношений (2.1) — (2.3), (2.8) полностью определяет решение первого приближения. Легко видеть, что она эквивалентна системе точных соотношений задачи об одномерном неустановившемся движении газа в переменных Лагранжа [5]. Решение задачи первого приближения зависит только от двух параметров $M_\infty \tau$ и τ_1 / τ , что определяет подобие течений около аффинноподобных тел [1, 7].

Существенным для дальнейшего является выяснение поведения решения вблизи поверхности тела при $\eta \rightarrow 0$. Определим прежде всего поведение энтропии в этой области течения. Так как решение при $\zeta \rightarrow 0$ полностью определяется действием затупления (2.8), то форма поверхности ударной волны здесь будет [1]

$$Y_0(\zeta) \approx \kappa_1 \zeta^{\frac{2}{3+\nu}} \quad (2.9)$$

где κ_1 — постоянная зависящая от ν и γ . В граничных условиях (2.2) члены порядка $1 / M_\infty^2 \tau^2$ при $\zeta \rightarrow 0$ становятся несущественными, и для функции $S_0(\eta)$ легко находится следующее приближенное выражение, пригодное при значениях η , близких к нулю, т. е. на линиях тока, пересекающих рассматриваемую малую окрестность вершины ударной волны

$$S_0(\eta) \approx A \eta^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad A = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{2}{3+\nu} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \kappa_1^{\frac{3+\nu}{\gamma}} (1+\nu)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (2.10)$$

Так как давление на поверхности тела имеет конечные отличные от нуля значения $p_0(\zeta, 0) = p_{00}(\zeta)$, то плотность потока здесь будет

$$\rho_0 \approx \frac{1}{A} p_{00}^{\frac{1}{\gamma}} \eta^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.11)$$

Из последнего уравнения (2.1) для продольной составляющей скорости имеем

$$u_0 \approx -\frac{\gamma}{\gamma-1} A p_{00}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \eta^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (2.12)$$

Интегрируя третье из уравнений (2.1), получаем

$$y_0^{1+\nu} \approx \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1+\nu} Y_{b0}^{1+\nu} + \frac{\gamma(1+\nu)}{\gamma-1} p_{00}^{-\frac{1}{\gamma}} A \eta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2.13)$$

Отсюда для общего случая тела с ненулевым наклоном боковой поверхности

$$y_0 \approx \frac{\tau_1}{\tau} Y_{b0} + \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{\nu} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{A}{p_{00}^{1/\gamma}} \frac{1}{Y_{b0}^{\nu}} \eta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2.14)$$

и, дифференцируя по ζ , получаем для v_0

$$v_0 \approx \frac{\tau_1}{\tau} Y_{b0}' + \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{\nu} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{A}{p_{00}^{1/\gamma}} \frac{1}{Y_{b0}^{\nu}}\right)' \eta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2.15)$$

Для случаев затупленной пластины или цилиндра первый член в выражении (2.13) будет отсутствовать и тогда получим

$$y_0 \approx \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1+\nu}{p_{00}^{1/\gamma}} A\right)^{\frac{1}{1+\nu}} \eta^{\frac{\gamma-1}{\gamma(1+\nu)}} \quad (2.16)$$

$$v_0 \approx \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} (1+\nu) A\right]^{\frac{1}{1+\nu}} \left[p_{00}^{-\frac{1}{\gamma(1+\nu)}}\right] \eta^{\frac{\gamma-1}{\gamma(1+\nu)}} \quad (2.17)$$

Соотношения (2.14) — (2.17) позволяют теперь при помощи первого из уравнений (2.1) определить производную $\partial p / \partial \eta$ при $\eta \rightarrow 0$. При этом необходимо иметь в виду, что для тел с линейной образующей боковой поверхности (клина и конуса) $Y_b'' = 0$. Собирая результаты, получаем для давления вблизи поверхности тела

$$p_0 = p_{00}(\zeta) + p_{01}(\zeta) \eta^{\beta} \quad (\beta \geq 1) \quad (2.18)$$

Здесь

$$\beta = 1, \quad \beta = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} (1-\nu), \quad \beta = 2 - \frac{1}{\gamma}$$

соответственно в общем случае, для случаев пластины или цилиндра и для случаев клина или конуса; функция $p_{01}(\zeta)$ в этих трех случаях также будет различной; однако ее вид для дальнейшего несуществен.

3. Собирая после подстановки разложений (1.6) — (1.9) в уравнения и граничные условия (1.3) — (1.4) члены порядка τ^2 , получим систему соотношений второго приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \eta} - \frac{\partial p_0}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} &= -\frac{1}{y_0^{\nu}} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \zeta} - \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} \right) + \nu \frac{y_1}{y_0^2} \frac{\partial v_0}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{\gamma} \frac{p_1}{p_0} - \frac{p_1}{p_0} &= S_1(\eta) + \frac{S_0'}{S_0} \psi_1 \\ \frac{\partial y_1}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \frac{\partial y_0}{\partial \eta} &= -\frac{p_1}{\rho_0^2 y_0^{\nu}} - \frac{u_0}{\rho_0 y_0^{\nu}} - \nu \frac{y_1}{\rho_0 y_0^2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} \frac{\partial y_0}{\partial \zeta} &= v_1 - v_0 u_0 \\ 2u_1 + u_0^2 + 2v_0 v_1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p_1}{p_0} - \frac{p_1}{\rho_0} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Граничные условия на поверхности ударной волны после обычных преобразований, связанных с «сносением» на исходную форму поверхности, принимают вид

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{1+\nu} Y_0^{1+\nu}(\xi) \\ \vartheta_1 + \frac{\partial v_0}{\partial \eta} (Y_0^\nu Y_1 - \psi_1) &= \frac{2}{\gamma+1} (Y'_1 - Y_0^3) \\ p_1 + \frac{\partial p_0}{\partial \eta} (Y_0^\nu Y_1 - \psi_1) &= \frac{2}{\gamma+1} (2Y'_0 Y'_1 - Y_0^4) \\ p_1 + \frac{\partial p_0}{\partial \eta} (Y_0^\nu Y_1 - \psi_1) &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{Y_0^2}{(Y_0^2 - 2/(\gamma-1) M_\infty^2 \tau^2)} \\ &\quad \left(2 \frac{Y'_1}{Y'_0} - 2 \frac{Y'_0 Y'_1 + Y_0^2/(\gamma-1) M_\infty^2 \tau^2}{Y_0^2 + 2/(\gamma-1) M_\infty^2 \tau^2} \right) \\ y_1 + \frac{\partial y_0}{\partial \eta} (Y_0^\nu Y_1 - \psi_1) &= Y_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из рассмотрения (3.1) следует, что при $\psi_1 \equiv 0$, т. е. при обычном методе определения второго приближения, особенность в поведении решения (3.1) при $\eta \rightarrow 0$ оказывается более сильной, чем в первом приближении. В самом деле, третье из уравнений (3.1) содержит, например, член, который при $\eta \rightarrow 0$ может быть приближенно представлен в виде

$$\frac{u_0}{\rho_0 y_0^\nu} \approx - A^2 \frac{\gamma}{\gamma-1} p_{00}^{\frac{\gamma-2}{\gamma}} \left(\frac{\tau}{\tau_1} \right)^{1+\nu} y_{b0}^{-(1+\nu)} \eta^{-\frac{2}{\gamma}} \quad (3.3)$$

и при $\gamma < 2$ является неинтегрируемым. Для устранения особенности в этом уравнении положим

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = \frac{p_1}{\rho_0} + u_0 \quad (3.4)$$

Тогда оно с учетом (2.1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (y_0^\nu y_1) = 0 \quad (3.5)$$

В качестве граничного условия для ψ_1 примем

$$\psi_1 = 0 \quad \text{при } \eta = \frac{1}{1+\nu} Y_0^{1+\nu} \quad (3.6)$$

т. е. устраним смещение линий тока у поверхности ударной волны. Кроме того, вместо рассмотрения граничных условий второго приближения на поверхности тела положим

$$Y_1(\xi) = 0 \quad (3.7)$$

т. е. поставим задачу об определении во втором приближении течения за ударной волной исходной формы первого приближения. Тогда интегрирование уравнения (3.5) дает

$$y_1 = 0 \quad (3.8)$$

В результате система уравнений (3.1) с учетом (3.4) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \eta} &= \frac{\partial p_0}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} - \frac{1}{y_0^\nu} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \right) \\ \frac{1}{\gamma} \frac{p_1}{\rho_0} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} - u_0 + S_1(\eta) + \frac{S'_0}{S_0} \psi_1 \\ v_1 &= v_0 u_0 - \frac{\partial y_0}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}, \quad \frac{p_1}{\rho_0} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} - u_0 \\ 2u_1 + u_0^2 + 2v_0 v_1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p_1}{\rho_0} - \frac{p_1}{\rho_0} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Заметим, что первые три уравнения этой системы будут независимыми. Граничные условия с учетом (3.7), (3.8) принимают вид

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{1+\nu} Y_0^{1+\nu}(\xi) \\ v_1 &= -\frac{2}{\gamma+1} Y_0'^3, \quad p_1 = -\frac{2}{\gamma+1} Y_0'^4 \\ \rho_1 &= -\frac{2}{\gamma+1} \rho_0^2 \frac{1}{M_\infty^2 \tau^2}, \quad \psi_1 = 0\end{aligned}\quad (3.10)$$

и полностью определяют решение (3.9).

Для дальнейшего необходимо исследовать поведение решения второго приближения при $\eta \rightarrow 0$.

Прежде всего определим поведение энтропийной функции $S_1(\eta)$ во втором из этих уравнений. Так как в окрестности вершины ударной волны (при $\xi \rightarrow 0$) ее форма определяется уравнением (2.9), то при помощи второго и четвертого уравнений системы (3.9) и граничных условий (2.2) и (3.10) получаем

$$S_1 \approx -B\eta^{-1}, \quad B = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{2}{3+\nu} \right)^2 \frac{\kappa_1^{3+\nu}}{1+\nu} \quad \text{при } \eta \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

При выводе этого выражения, так же как при определении функции $S_0(\eta)$, были отброшены как несущественные члены, содержащие параметр $1/M_\infty^2 \tau^2$.

Для определения поведения всех остальных функций системы (3.9) в области малых η представим функцию смещения координат ψ_1 в виде

$$\psi_1 \approx \psi_{10}(\xi) + \psi_{11}(\xi) \eta^\alpha \quad (3.12)$$

и воспользуемся приближенными соотношениями (2.10) — (2.18).

Рассмотрим общий случай тела с ненулевым наклоном боковой поверхности отличной от нуля кривизны. Из последнего уравнения (3.9) имеем

$$v_1 \approx v_{10}(\xi) \eta^{-\frac{1}{\gamma}} + v_{11}(\xi) \eta^{\alpha - \frac{1}{\gamma}} \quad \text{при } \eta \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

При этом из первого и второго уравнений (3.9) получим

$$\frac{\partial p_1}{\partial \eta} \approx \pi_{10}(\xi) \eta^{-\frac{1}{\gamma}} + \pi_{11}(\xi) \eta^{\alpha - \frac{1}{\gamma}} \quad (3.14)$$

$$p_1 \approx \gamma p_{00} \left[\alpha \psi_{11} \eta^{\alpha-1} + \frac{\gamma}{\gamma-1} A p_{00}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \eta^{-\frac{1}{\gamma}} - B \eta^{-1} - \frac{1}{\gamma} \eta^{-1} (\psi_{10} + \psi_{11} \eta^\alpha) \right] \quad (3.15)$$

Из совместного рассмотрения этих соотношений прежде всего заключаем, что показатель степени α будет положительным. В самом деле предположение $\alpha < 0$ на основании (3.15) приводит к результату

$$p_1 \approx \gamma p_{00} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma} \right) \psi_{11} \eta^{\alpha-1} \quad (3.16)$$

противоречащему (3.14).

Но если $\alpha > 0$, то главным членом (3.15) будет

$$p_1 \approx -\gamma p_{00} \left(B + \frac{1}{\gamma} \psi_{10} \right) \eta^{-1} \quad (3.17)$$

и этот результат не противоречит (3.14) лишь в том случае, если

$$\psi_{10} = -\gamma B = \text{const} \quad (3.18)$$

Тогда (3.15) примет вид

$$p_1 \approx \gamma p_{00} \left[\left(\alpha - \frac{1}{\gamma} \right) \psi_{11} \eta^{\alpha-1} + \frac{\gamma}{\gamma-1} A p_{00}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \eta^{-\frac{1}{\gamma}} \right] \quad (3.19)$$

Отсюда, вновь сопоставляя этот результат с (3.14), заключаем, что

$$\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma}, \quad \psi_{11}(\xi) = - \frac{\gamma^2 A}{(\gamma-1)(\gamma+2)} p_{00}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (3.20)$$

и на основании (3.14) при $\eta \rightarrow 0$ приходим к следующему представлению:

$$p_1 = p_{10}(\xi) + p_{11}(\xi) \eta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (\eta \rightarrow 0) \quad (3.21)$$

Наконец, четвертое из уравнений (3.9) дает

$$p_1 \approx p_{10}(\xi) \quad (3.22)$$

Выражения для переменных коэффициентов в формулах (3.13), (3.21), (3.22) здесь не приводятся, так как для дальнейшего они несущественны.

К тем же результатам приводит и аналогичное рассмотрение случаев затупленного клина или конуса, а также пластины или цилиндра. Исключение составляет лишь выражение для v_1 , которое в последнем случае принимает вид

$$v_1 \approx v_{10}(\xi) \eta^{\frac{\gamma-1}{\gamma(1+\nu)}} - \frac{1}{\gamma} \quad (3.23)$$

Для изменения продольной составляющей вектора скорости вблизи поверхности тела во всех случаях имеем

$$u_1 \approx u_{10}(\xi) \eta^{-\frac{2}{\gamma}} \quad (3.24)$$

4. Полученные в предыдущем разделе результаты позволяют определить необходимое смещение линий тока вблизи поверхности тела и форму его смещенного контура. Из (1.7) заключаем, что на поверхности тела

$$\eta + \tau^2 \psi_1(\xi, \eta) + \dots = 0 \quad (4.1)$$

или, пользуясь соотношениями предыдущего раздела

$$\eta \approx \tau^2 \gamma B \quad (4.2)$$

Тогда при помощи (2.13) получаем уравнение поверхности тела в виде

$$y_0^{1+\nu} = \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1+\nu} Y_{b0}^{1+\nu} + \frac{\gamma(1+\nu)}{\gamma-1} p_{00}^{-\frac{1}{\gamma}} A (\gamma B)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (4.3)$$

т. е. исходный контур нужно деформировать на величину порядка $\tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

Давление на поверхности тела согласно (2.18) и плотность согласно (2.11) в первом приближении соответственно будут

$$p_0 \approx p_{00}(\xi), \quad \rho_0 \approx \frac{1}{A} p_{00}^{\frac{1}{\gamma}} (\gamma B)^{\frac{1}{\gamma}} \tau^{\frac{2}{\gamma}} \quad (4.4)$$

Для составляющих возмущенной скорости согласно (2.12), (2.15), (2.16) имеем

$$u_0 \approx - \frac{\gamma}{\gamma-1} A p_{00}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (\gamma B)^{-\frac{1}{\gamma}} \tau^{-\frac{2}{\gamma}} \quad (4.5)$$

$$v_0 \approx \frac{\tau_1}{\tau} Y'_{b0} + A \frac{\gamma}{\gamma-1} p_{00}^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{Y_{b0}^{\nu}} \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{\nu} (\gamma B)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (4.6)$$

или

$$v_0 \approx \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} (1+\nu) A \right]^{\frac{1}{1+\nu}} \left(p_{00}^{-\frac{1}{(1+\nu)\gamma}} \right)' (\gamma B)^{\frac{\gamma-1}{\gamma(1+\nu)}} \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma(1+\nu)}} \quad (4.7)$$

Для энтропийной функции согласно (2.10) получим

$$S_0 \approx A (\gamma B)^{-\frac{1}{\gamma} \tau - \frac{2}{\gamma}} \quad (4.8)$$

Заметим, что это выражение приводит к точному значению энтропии на поверхности тела при $M_\infty \rightarrow \infty$. Относительная ошибка всех полученных результатов не превышает величины порядка

$$\tau^2 \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

Тогда, обращаясь к исходным разложениям (1.6) и результатам исследования второго приближения (3.11) — (3.24), замечаем, что решение первого приближения для тела со смещенным контуром свободно от особенностей и равномерно справедливо во всем потоке с этой относительной ошибкой, не превышающей величину порядка

$$\tau^2 \frac{\gamma-1}{\gamma}.$$

С той же точностью согласно первому из соотношений (1.6) и формуле (4.5) оказывается справедливым и закон плоских сечений¹.

Собирая полученные результаты, приведем окончательные формулы, определяющие форму контура тела и распределение давления по его поверхности в первом приближении.

Воспользуемся для этого исходными представлениями (1.6) функции y и p , подставив в них полученные результаты (4.3), (4.4). Полагая во всех формулах $x = L$ и используя выражения (1.1), (1.2), (2.7) для малых параметров τ_1 и τ , а также (2.10), (3.11) для постоянных A и B , получим

$$\left(\frac{y_b}{d}\right)^{1+\nu} = \left(\frac{y_{b0}}{d}\right)^{1+\nu} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{2}{3+\nu}\right)^2 \kappa_1^{3+\nu} p_{00}^{\frac{1}{\gamma}} (k_1, k_2) C_{x0}^{\frac{\gamma(1+\nu)+2(\gamma-1)}{\gamma(3+\nu)}} \left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{2(1+\nu)}{\gamma(3+\nu)}} \quad (4.9)$$

$$\frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2} = p_{00} (k_1, k_2) C_{x0}^{\frac{2}{3+\nu}} \left(\frac{d}{x}\right)^2 \frac{1+\nu}{3+\nu} \quad (4.10)$$

Здесь

$$k_1 = \frac{\tau_1}{\tau} = \frac{2y_{b0}(x)}{d} C_{x0} - \frac{1}{3+\nu} \left(\frac{d}{x}\right)^{\frac{2}{3+\nu}}, \quad k_2 = M_\infty \tau = M_\infty C_{x0}^{\frac{1}{3+\nu}} \left(\frac{d}{x}\right)^{\frac{1+\nu}{3+\nu}} \quad (4.11)$$

В предельном случае гиперзвукового течения при $M_\infty \rightarrow \infty$ решение не будет зависеть от параметра k_2 .

Из полученного выражения (4.9) видно, что поправка на контур тела, к которому должно быть отнесено распределение давления (4.10), становится определяющей для тел с очень малым наклоном боковой поверхности и во всех случаях позволяет улучшить решение на конечных расстояниях от передней кромки.

Отброшенные в формуле (4.9) члены имеют порядок

$$\tau^4 \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

Аналогичным образом могут быть получены выражения для всех остальных параметров на поверхности тела, которые здесь не выписываются.

В заключение этого раздела заметим, что полученные здесь результаты полностью соответствуют оценкам работы [9], полученным на основании рассмотрения точных соотношений.

¹ Отсюда, в частности, следует, что этот закон теряет смысл при $\gamma \rightarrow 1$.

5. В качестве примера рассмотрим решение для случая, когда исходным телом будет затупленная пластина или цилиндр ($k_1 \approx 0$).

Если при этом число Маха невозмущенного потока бесконечно велико ($k_2 \rightarrow \infty$), то исходное решение, как известно, соответствует точному решению задачи о сильном взрыве.

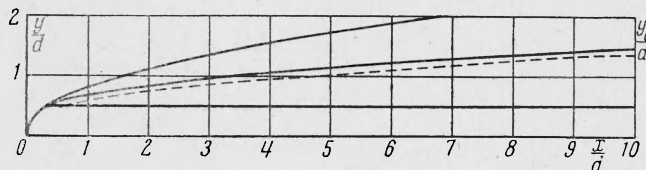
Для p_{00} имеем в этом случае следующее простое выражение [1]:

$$p_{00} = \frac{1}{2} \kappa_2 \quad (5.1)$$

где постоянная κ_2 , так же как κ_1 , зависит от γ и ν . Уравнение смещенного контура тела (4.9) тогда принимает вид

$$\frac{y_b}{d} = \left[\frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{2}{3+\nu} \right)^2 \kappa_1^{3+\nu} \left(\frac{2}{\kappa_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{1+\nu}} C_{x_0}^{\frac{\gamma(1+\nu)+2(\gamma-1)}{\gamma(3+\nu)(1+\nu)}} \left(\frac{x}{d} \right)^{\frac{2}{\gamma(3+\nu)}} \quad (5.2)$$

Таким образом, контур тела, к которому должно быть отнесено распределение давления, определенное на основании аналогии с сильным взрывом, определяется законом $y_b \sim x^{1/3\gamma}$ в плоском случае и законом $y_b \sim x^{1/2\gamma}$ в осесимметричном случае. Так как эти законы роста y_b более медленные, чем закон роста ординаты



ударной волны (соответственно $x^{1/3}$ и $x^{1/2}$), то в пределе при $x \rightarrow \infty$, $y_b/Y \rightarrow 0$ и автомодельное решение задачи о сильном взрыве дает правильное асимптотическое представление поля течения на бесконечности.

На фигуре приводятся результаты расчета смещенного контура осесимметричного тела по формуле (5.2). Величина сопротивления затупления при этом принималась равной $c_{x_0} = 0.88$ (сферическое затупление), а коэффициенты κ_1 и κ_2 на основании [12] равными: $\kappa_1 = 0.7951$, $\kappa_2 = 0.0981$.

Здесь же приведены результаты расчетов работы [8]. Как видно, их совпадение оказывается вполне удовлетворительным.

Поступила 3 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
2. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory Academic press. N.-Y., 1959.
3. Cheng H. K., Pallone A. S. Inviscid leading-edge effect in hypersonic flow S. Aero. Sci., 1956, vol. 23, No. 7.
4. Lees L., Kubota T. Inviscid hypersonic flow over blunt — nosed slender bodies. S. Aero. Sci., 1957, vol. 24, No 3.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
6. Черный Г. Г. Влияние малого затупления переднего конца тела на его обтекание потоком большой сверхзвуковой скорости. Изв. АН СССР, ОН, 1958, №4.
7. Cheng H. K. Similitude of hypersonic real — gas flows over slender bodies with blunted noses. J. Aero. Sci., 1959, vol. 26, No 9.
8. Сычев В. В. К теории гиперзвуковых течений газа со скачками уплотнения степенной формы. ПММ, 1960, № 3.
9. Sychev V. V. On the theory of hypersonic flow over blunt — nosed slender bodies. Advances in Aero. Sci. Pergamon press, 1961, vol. III.
10. Lighthill M. J. A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. Philos. Mag., July, 1949, vol. 40.
11. Tsien H. S. Poincare — Lighthill — Kuo method Adv. in Appl. Mech. Academic press. N. Y., 1956.
12. Swigart R. J. On the shock shape and pressure distribution about blunt — nosed cylinders using blunt — wave theory J. Aero-Space. Sci., 1961, vol. 28, No 10.