Аналогичным образом нетрудно доказать также и равномерную сходимость двойного ряда S_4.

Приведенные выше доказательства равномерной сходимости рядов (5.1) остаются в силе также и для рядов S_i^*, получаемых из S_i заменой в них f_k, C_{kn}, D_{kn}, $\cos(\nu\varphi)$ соответственно на

$$f_k^*, \; C_{kn}^*, \; D_{kn}^*, \quad \sin(\nu\varphi)$$

Таким образом, равномерная сходимость рядов, входящих в выражение (4.5) безразмерной неосесимметричной температурной функции бесконечно длинного, полого, ортотропного цилиндра, доказана.

Статья находилась в печати, когда автору стало известно о работе Чанелли [6], в которой, применением конечного преобразования Генкеля по пространственным координатам, рассмотрена задача, аналогичная той, которая решена в настоящей заметке применением интегрального преобразования Лапласа по временной координате.

Поступила 1 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд-во «Наука» 1964.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. Гостехиздат, 1950.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз. 1962.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. Изд. иностр лит., 1949.
5. Дургарьян С. М. К определению неосесимметричного температурного поля ортотропного полого цилиндра и шара. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
6. Cinelli. An extension of the finite Hankel transform and applications (Int. J. Engng Sci., vol. 3, p. 539—559, Pergamon Press 1965).

ВЛИЯНИЕ КОЛЕБАНИЙ НА МАССООТДАЧУ ОТ СФЕРЫ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПРАНДТЛЯ

А. П. Бурдуков, В. Е. Накоряков

(Новосибирск)

Известно, что звуковые колебания используются для интенсификации диффузионных процессов химической технологии [1]. В предыдущих работах [2-4] исследовалось влияние звуковых колебаний на процессы переноса в газовых средах (числа Прандтля меньше или равны единице). Ниже делается попытка распространения результатов на процессы гетерогенного массообмена в жидкостях (числа Прандтля велики).

Оказалось, что перенос массы в этом случае осуществляется внутренними, а не внешними вторичными течениями. Основные результаты расчета проверены экспериментально.

Обозначения

u, v — продольная и поперечная составляющие скорости;
x, y — продольная и поперечная координаты;
R — радиус сферы;
r — текущий радиус сферы;
λ — длина волны колебаний;
ω — частота колебаний;
B — амплитуда скорости колебаний;
s — амплитуда смещения при колебаниях;
m — безразмерная концентрация диффундирующего вещества;
D — коэффициент диффузии;
μ — динамическая вязкость;
ρ — плотность;
ν — кинематическая вязкость;
q — поток вещества от поверхности сферы;
β — коэффициент массообмена;
N — число Нуссельта;
P — число Прандтля;
Γ — гамма-функция.

Рассмотрим сферу, помещенную в колеблющуюся по гармоническому закону жидкость. Между сферой и жидкостью происходят процессы массообмена, причем предполагается, что числа Прандтля очень велики ($P \to \infty$). Оставим в силе введенные в работе [2-4] предположения

$$\lambda / R \gg 1, \quad \nu = \mathrm{const}, \quad \mu = \mathrm{const}, \quad D = \mathrm{const}, \quad \rho = \mathrm{const}$$

Рассмотрим случай, когда отношение амплитуды смещения частиц среды к радиусу тела значительно меньше единицы ($s/R \ll 1$).

В этом случае в окрестности сферы возникают вторичные течения (фиг. 1), аналитическое выражение для которых приведено в [3].

При $P \to \infty$ поля скоростей у поверхности сферы можно представить в виде $u = \tau y/\mu$, где τ — локальное трение, вычисляемое по выражению (2.6) работы [3] авторов. (Отметим, что эта формула несколько отличается от аналогичной формулы Шлихтинга наличием членов, учитывающих осевую симметрию).

Тогда из уравнения неразрывности получим

$$v = -\frac{y^2}{2\mu}\frac{\partial\tau}{\partial x} - \frac{\tau}{2\mu}\frac{\partial \ln r}{\partial x} y^2$$

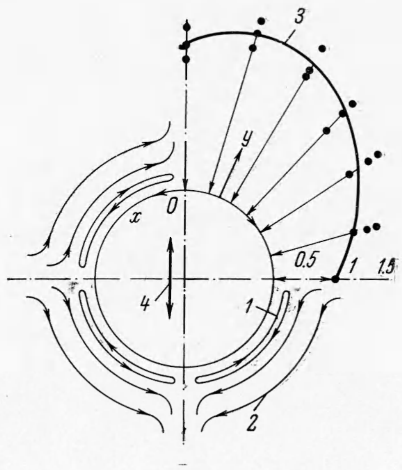
Диффузионное уравнение с граничными условиями в системе координат xy (фиг. 1) (пренебрегая влиянием пульсаций скорости на средний профиль концентраций) [2–4] представим в виде

$$\frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + A(x)\, y^2 \frac{\partial m}{\partial y} = B(x)\, y\, \frac{\partial m}{\partial x}$$

$$m = m_1 \quad \text{при } y = 0$$

$$m = 0 \quad \text{при } y = \infty \qquad (1)$$

$$A(x) = \frac{1}{2\mu D}\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\tau}{2\mu D}\frac{\partial \ln r}{\partial x}, \qquad B(x) = \frac{\tau}{\mu D}$$



Фиг. 1

Введем новую независимую переменную (предложенную в работе Швеца [5])

$$\eta = y\left[e^{-F(x)}\int_0^x \frac{e^{F(x)}}{B(x)}\,dx\right]^{-1/3}, \qquad F(x) = 3\int_0^x \frac{A(x)}{B(x)}\,dx \qquad (2)$$

Тогда из (1) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 m}{d\eta^2} + \frac{\eta^2}{3}\frac{dm}{d\eta} = 0 \qquad \begin{matrix} m = m_1 & \text{при } \eta = 0 \\ m = 0 & \text{при } \eta = \infty \end{matrix} \qquad (3)$$

Интеграл уравнения (4), удовлетворяющий граничными условиями, известен

$$m = m_1\left(1 - \frac{\Phi(\eta)}{\Phi(\infty)}\right), \qquad \Phi(\eta) = \int_0^\eta \exp\left(\frac{-\eta^3}{9}\right) d\eta, \qquad (4)$$

$$\Phi(\infty) = 3^{-1/3}\,\Gamma(1/3) = 1.86$$

Для сферы [3]

$$\tau = \frac{9}{16\sqrt{2}}\frac{B^2\mu}{\sqrt{\omega\nu}R}\sin\frac{2x}{R}$$

поэтому

$$\eta = 0.928\left(\frac{B^2}{\sqrt{\omega\nu}DR^2}\right)^{1/3}\frac{\sin\varphi\cdot\cos^{1/2}\varphi\cdot y}{[1/2\,(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)]^{1/3}}, \qquad \varphi = \frac{x}{R}$$

Из (4) имеем

$$q = -\rho D\left[\left(\frac{\partial m}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]_{\eta=0} = 0.63\,\rho m_1\left(\frac{B^2D^2}{\sqrt{\omega\nu}R^2}\right)^{1/3}\frac{\sin\varphi\cos^{1/2}\varphi}{[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi]^{1/3}}$$

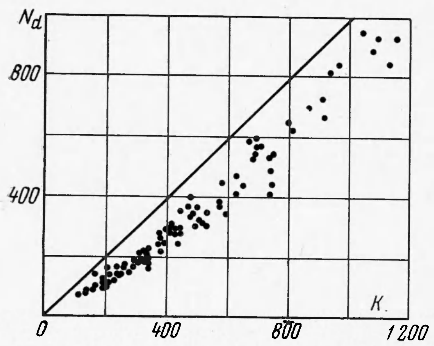
Для числа Нуссельта, построенного по радиусу, получим:

$$N = 0.63\,K\,\frac{\sin\varphi\cos^{1/2}\varphi}{(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)^{1/3}}, \qquad K = \left(\frac{B^2R}{\sqrt{\omega\nu}\,D}\right)^{1/3} \qquad (5)$$

В среднем по всей сфере для числа Нуссельта по диаметру имеем:

$$N_d = \frac{\beta d}{D} = 0.99K \qquad (6)$$

Для проверки закономерностей переноса при колебаниях сферы в жидкости были поставлены эксперименты по массообмену в системе бензойная кислота — вода. Стеклянные шарики, покрытые тонким слоем бензойной кислоты, осциллировали в воде с различной амплитудой и частотой колебаний. Колебания образца осуществлялись при помощи механического вибратора с кривошипношатунным механизмом. Частота колебаний менялась в пределах 10—125 *гц*. Амплитуда колебаний шариков в воде определялась катетометром КМ-6; частота колебаний регистрировалась при помощи схемы, состоящей из вращающегося с определенной частотой перфорированного диска, источника света, фотодиода и частотомера ИЧ-6.



Фиг. 2

Нанесение слоя бензойной кислоты на тонкостенную стеклянную подложку осуществлялось помещением ее на короткое время в сосуд с расплавленной кислотой. В результате на поверхности шарика оставался слой кислоты толщиной 0.3—0.5 *мм* и весом около 150 *мг*. Общий вес образца вместе с державкой составлял $\sim$1.3 *г*; абсолютное изменение образца в опыте от 5 до 10 *мг*, т. е. находилось в пределах оптической шкалы весов. Контроль поверхности шариков под микроскопом позволял выбрать для опытов образцы с наиболее гладким покрытием.

За поверхность растворения принималась внешняя геометрическая поверхность шарика, определенная по среднему диаметру образца, полученному из нескольких замеров в разных сечениях на горизонтальном компараторе.

Коэффициент диффузии бензойной кислоты в воде рассчитывался по известным формулам [6].

Локальные коэффициенты переноса определялись на горизонтальном компараторе ИЗА-2 измерением диаметра до и после опыта в семи сечениях. Результаты этих измерений представлены на фиг. 1, где *1* — внутренняя область течений, *2* — область внешних течений, *3* — кривая сноса, построенная в масштабе, в котором снос в лобовой точке принят за 1, *4* — направление колебаний.

В отличие от массообмена в газовых средах, снос максимален в точках, являющихся лобовыми для колебательного движения. Это объясняется превалирующим влиянием внутренних, а не внешних, как при $P \leqslant 1$, течений. Полученные данные подтверждают результаты расчета (формула (5)).

Суммарные коэффициенты массообмена определились по весовой методике. Результаты эксперимента и расчета представлены на фиг. 2. Линия проведена по формуле (6).

Таким образом, из результатов работы следует, что в случае массообмена при больших числах Прандтля и малом значении отношения амплитуды смещения к радиусу сферы конвективная диффузия определяется закономерностями внутренней области вторичных течений.

Зависимость (5) существенно отличается от аналогичных зависимостей, полученных ранее [2-4] для теплообмена при $P \leqslant 1$.

Полученные данные могут быть использованы для оценки влияния колебаний на процессы переноса в жидких средах.

Поступила 5 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинстлинг А. Н., Барам А. А. Ультразвук в процессах химической технологии. Госхимиздат, 1960.
2. Бурдуков А. П., Накоряков В. Е. Теплообмен от цилиндра в звуковом поле. ПМТФ, 1965, № 1.
3. Бурдуков А. П., Накоряков В. Е. О переносе массы в звуковом поле. ПМТФ, 1965, № 2.
4. Бурдуков А. П., Накоряков В. Е., Зауличный Е. Г. Теплоотдача цилиндра в звуковом поле. Изв. СО АН СССР Сер. техн., 1965, № 2.
5. Швец М. Е. О решении одной задачи для уравнения параболического типа. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2, стр. 243.
6. Хоблер Т. Массопередача и абсорбция. Госхимиздат, 1964.