

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТРЕНИЕ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ
В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

C. C. Кутателадзе, A. И. Леонтьев

(Ленинград, Москва)

В работе [1] показано, что для случая движения газа с дозвуковыми скоростями при неизотермических условиях существует предельное решение для отношения C_f/C_{f0} , соответствующее бесконечному значению числа Рейнольдса R ; это отношение коэффициента трения для сжимаемой жидкости C_f к коэффициенту трения для несжимаемой жидкости C_{f0} будем обозначать через $\Psi = C_f/C_{f0}$.

Аналогичным путем можно получить предельное решение для турбулентного пограничного слоя сжимаемого газа. Распространение полуэмпирической теории турбулентности Прандтля на пограничный слой сжимаемого газа приводит к распределению скоростей по закону синуса логарифма [2]

$$\omega = z_1 + z_2 \sin \left(z_3 + z_4 \ln \frac{y}{y_1} \right) \quad (\omega = \frac{W}{W_0}) \quad (1)$$

Здесь W_0 [м/сек] — скорость газа в невозмущенном потоке, W [м/сек] — скорость газа в пограничном слое.

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{\Delta\psi}{2(\psi^* - 1)}, & z_4 &= \frac{1}{\chi} \sqrt{(\psi^* - 1) \frac{C_f}{2}}, & \Psi_2 &= \frac{W_1}{V^*} \sqrt{\frac{C_f}{2}} = \frac{W_1}{W} \\ z_2 &= \frac{1}{2(\psi^* - 1)} \sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2}, \\ z_3 &= \arcsin \frac{2(\psi^* - 1)\Psi_2 + (\Delta\psi)^2}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2}} \\ \psi &= \frac{T_{ct}}{T_0}, \quad \psi^* = \frac{T_{ct}^*}{T_0}, \quad \Delta\psi = \psi - \psi^* \end{aligned}$$

W_1 [м/сек] — скорость газа на границе ламинарного подслоя, T_{ct} [$^{\circ}$ К] — температура стенки, T_{ct}^* [$^{\circ}$ К] — равновесная температура стенки, T_0 [$^{\circ}$ К] — термодинамическая температура в невозмущенном потоке, y_1 [м] — толщина ламинарного подслоя, δ^{**} — толщина потери импульса, δ — толщина пограничного слоя.

При $\psi = \psi^* = 1$ формула (1) переходит в обычный логарифмический закон распределения скоростей.

При $y = \delta = k\delta^{**}$, $W = W_0$

$$\omega = 1$$

и

$$z_4 \ln \frac{k\delta^{**}}{y_1} = \arcsin \frac{1 - z_1}{z_2} - z_3 \quad (2)$$

Для изотермического течения несжимаемой жидкости имеем

$$\frac{1}{\chi} \ln \frac{k_0 \delta_0^{**}}{y_0} = \frac{1}{\chi} \ln \left(\frac{k_0}{\eta_0} R^{**} \sqrt{\frac{C_{f0}}{2}} \right) = \sqrt{\frac{2}{C_{f0}}} - \eta_{10} \quad (3)$$

Здесь индексом 0 обозначены величины, относящиеся к случаю $\psi = \psi^* = 1$. При этом

$$\chi = 0.4, \quad \eta_{10} = 11.6, \quad \Psi_{20} \sqrt{V^{1/2} C_{f0}} = 8.2 \sqrt{C_{f0}}$$

С другой стороны, можно написать

$$\frac{k_0^{**}}{y} = \frac{R^{**}}{\eta_{10}} \left(\Psi_1 \frac{k_0}{k} \sqrt{\frac{C_f}{C_{f0}}} \right)^{-1} \sqrt{\frac{C_{f0}}{2}} \quad (\Psi_1 = \frac{\eta_1}{\eta_{10}}) \quad (4)$$

Произведя сопоставление C_f и C_{f0} при $R^{**} = \text{idem}$ [из (2)], получаем

$$\begin{aligned} \frac{C_f}{C_{f0}} = & \frac{1}{(\psi^* - 1) Z^2} \left[\arcsin \frac{2(\psi^* - 1) + \Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2}} - \right. \\ & \left. - \arcsin \frac{2(\psi^* - 1) \Psi_2 + \Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2}} \right]^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$Z = 1 - \left(\eta_{10} + \frac{1}{\chi} \ln \Psi_1 \frac{k_0}{k} \sqrt{\frac{C_{f0}}{C_f}} \right) \sqrt{\frac{C_{f0}}{2}} \quad (6)$$

При $R \rightarrow \infty$ имеем $C_{f0} \rightarrow 0$, $\Psi_2 \rightarrow 0$, $Z \rightarrow 1$, т. е. для зависимости (5) существует асимптотическое выражение

$$\begin{aligned} \frac{C_f}{C_{f0}} = & \frac{1}{\psi^* - 1} \left[\arcsin \frac{2(\psi^* - 1) + \Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2}} - \right. \\ & \left. - \arcsin \frac{\Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2}} \right]^2 \end{aligned} \quad (7)$$

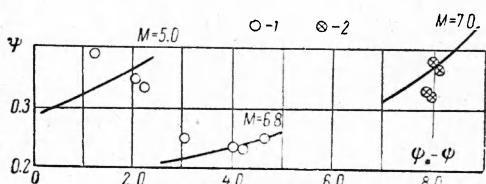
При адиабатическом обтекании пластины $\Delta\psi = 0$, и предельный закон трения принимает весьма простую форму

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \frac{1}{1 - \psi^*} \left(\arcsin \sqrt{\frac{\psi^* - 1}{\psi^*}} \right)^2 \quad (8)$$

Фиг. 1. Зависимость $(C_f / C_{f0})_{R^{**}}$ от M и $\Delta\psi$ при $r = 0.9$

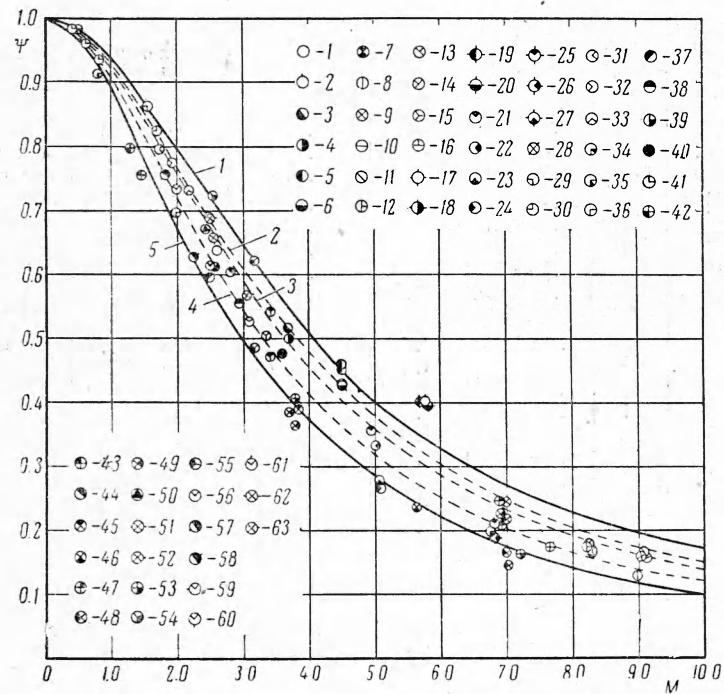
Как видно, предельный закон трения (7), соответствующий обтеканию пластины с весьма большими числами R , не зависит от эмпирических констант турбулентности χ и η_1 . При этом автомодельность относительно η_1 означает независимость предельного закона трения от физических свойств вязкого подслоя, роль которого вырождается при $R \rightarrow \infty$.

Фиг. 2. Влияние теплообмена на трение пластины в сверхзвуковом потоке газа; 1 — опыты Лобба [6], 2 — опыты Соммера [18], сплошная линия — расчет по уравнению (7)



На фиг. 1 показана зависимость $\Psi = C_f / C_{f0}$ от $\Delta\psi$ и ψ^* , рассчитанная по формуле (7). Как видно, с увеличением ψ^* (или M) относительное влияние теплообмена $\Delta\psi$ на C_f уменьшается.

На фиг. 2 дано сопоставление расчетов по той же формуле с опытами Соммера и Шота [13] и Лобба, Винклера и Перша [6], проведенными при относительно больших числах R^{**} и интенсивном теплообмене. Сводка опубликованных опытных данных приведена в табл. 1 и 2. Можно отме-



Фиг. 3. Зависимость $(C_f / C_{f0})_{R^{**}}$ от M и R^{**} . Опыты с теплообменом приведены к теплоизолированным условиям по уравнению [7] 1 — $R^* = 1000$, 2 — $R^{**} = 4000$, 3 — $R^{**} = 14000$, 4 — $R^{**} = 1000000$, 5 — $R^{**} = \infty$

тить не только качественное, но и удовлетворительное количественное согласование теории и эксперимента. Это означает, что предельный закон трения достаточно хорошо описывает реальные течения с конечными значениями чисел R , т. е. отношение Ψ является сравнительно слабой функцией от R^{**} . Это обстоятельство позволяет ограничиться введением в общую формулу (7) первого приближения входящих в нее неизвестных функций, т. е. положить

$$\Psi_2 = \Psi_{20} = \eta_{10} V^{1/2} C_{f0}, \quad Z = Z_0 = 1 - \eta_{10} V^{1/2} C_{f0}, \quad \eta_{10} = 11.6 \quad (9)$$

В этом случае имеем

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \frac{1}{(\psi^* - 1)(1 - 8.2 V C_{f0})^2} \left[\arcsin \frac{2(\psi^* - 1) + \Delta\psi}{V^4 (\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2} - \arcsin \frac{16.4(\psi^* - 1) V C_{f0} + \Delta\psi}{V^4 (\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + \Delta\psi^2} \right]^2 \quad (10)$$

и, соответственно, при $\Delta\psi = 0$

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \frac{1}{\psi^* - 1} \left[\frac{1}{1 - 8.2 C_{f0}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{\psi^* - 1}{\psi^*}} - \arcsin 8.2 \sqrt{\frac{\psi^* - 1}{\psi^*} C_{f0}} \right) \right]^2 \quad (11)$$

Таблица 1

Сравнение опытных данных по турбулентному трению на плоской пластине
 $(\Theta = T_{ct}^*/T_{ct}, \Psi = C_f/C_{f0})$

| Авторы | Точки (фиг. 3) | M | R^{**} | Θ | Ψ | Условия опыта | Метод определения C_f |
|---|----------------|-------|----------|----------|--------|---|---|
| Колес [4] $R^{**} = \text{idem}$ $R_x \approx 8 \cdot 10^6$ | 1 | 2.6 | 6600 | 1.0 | 0.638 | Теплоизолированная пластина | Непосредственное измерение при помощи плавающего элемента |
| | 2 | 2.6 | 10200 | 1.0 | 0.641 | | |
| | 3 | 3.7 | 4100 | 1.0 | 0.516 | | |
| | 4 | 3.7 | 7560 | 1.0 | 0.499 | | |
| | 5 { | 4.5 | 2900 | 1.0 | 0.460 | | |
| | | 4.5 | 3470 | 1.0 | 0.455 | | |
| | 6 | 4.5 | 5240 | 1.0 | 0.424 | | |
| Хилл [5] $R^{**} = \text{idem}$ | 7 | 4.5 | 6590 | 1.0 | 0.429 | | |
| | 8 | 8.99 | 1245 | 0.448 | 0.197 | Охлаждаемая стенка конического сопла | По градиенту скоростей на стенке |
| | 9 | 9.04 | 1607 | 0.460 | 0.235 | | |
| | 10 | 9.07 | 1908 | 0.474 | 0.234 | | |
| | 11 | 9.10 | 2287 | 0.495 | 0.227 | | |
| | 12 | 8.22 | 2081 | 0.493 | 0.257 | | |
| | 13 | 8.35 | 2498 | 0.497 | 0.265 | | |
| | 14 | 8.27 | 2885 | 0.500 | 0.259 | | |
| | 15 | 8.29 | 3202 | 0.500 | 0.247 | | |
| | 16 | 8.29 | 3451 | 0.502 | 0.239 | | |
| Коркеджи [7] $R^{**} = \text{idem}$ | 17 | 5.787 | 2477 | 1.0 | 0.403 | Теплоизолированная пластина | Непосредственное измерение при помощи плавающего элемента |
| | 18 | 5.77 | 2780 | 1.0 | 0.400 | | |
| | 19 | 5.793 | 3429 | 1.0 | 0.400 | | |
| | 20 | 5.805 | 4040 | 1.0 | 0.397 | | |
| | | | | | | | |
| Лобб, Винклер, Перш [6] $R^{**} = \text{idem}$ | 21 | 4.93 | 5350 | 0.924 | 0.369 | Охлаждаемая стенка плоского сопла | По градиенту скоростей на стенке и через аналогию Рейнольдса по измерениям тепловых потоков в исследуемом сечении |
| | 22 | 5.01 | 6480 | 0.713 | 0.381 | | |
| | 23 | 5.03 | 7950 | 0.575 | 0.341 | | |
| | 24 | 5.06 | 7370 | 0.535 | 0.329 | | |
| | 25 | 6.83 | 8550 | 0.613 | 0.251 | | |
| | 26 | 6.83 | 12640 | 0.508 | 0.234 | | |
| | 27 { | 6.78 | 8400 | 0.513 | 0.244 | | |
| | | 6.78 | 7960 | 0.457 | 0.251 | | |
| | 28 | 7.67 | 8440 | 0.465 | 0.217 | | |
| | | | | | | | |
| Вильсон [10] $R_x = \text{idem}$ $R_x \approx 10^7$ | 29 | 1.55 | | 1.0 | 0.885 | Теплоизолированная пластина | По измерениям профилей скоростей и уравнению импульсов |
| | 30 | 1.70 | | 1.0 | 0.851 | | |
| | 31 | 1.75 | | 1.0 | 0.828 | | |
| | 32 | 1.93 | | 1.0 | 0.810 | | |
| | 33 | 2.18 | | 1.0 | 0.770 | | |
| Чапман, Кестер [8] $R_x = \text{idem}$ $R_x = (6 \div 16) \cdot 10^6$ | 34 | 0.51 | | 1.0 | 0.985 | Обтекание теплоизолированного цилиндра в продольном направлении | Непосредственное измерение средних значений |
| | 35 | 0.81 | | 1.0 | 0.929 | | |
| | 36 | 1.99 | | 1.0 | 0.746 | | |
| | 37 | 2.49 | | 1.0 | 0.671 | | |
| | 38 | 2.95 | | 1.0 | 0.623 | | |
| | 39 | 3.36 | | 1.0 | 0.578 | | |
| | 40 | 3.60 | | 1.0 | 0.551 | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| Липман, Даван [9] $R = \text{idem}$ $R_x \approx 4 \cdot 10^6$ | 41 { | 0.42 | | 1.0 | 0.989 | Обтекание теплоизолированной пластины | Непосредственное измерение локальных значений |
| | | 0.63 | | 1.0 | 0.966 | | |
| | | 0.82 | | 1.0 | 0.965 | | |
| | 42 | 1.28 | | 1.0 | 0.829 | | |
| | 43 | 1.45 | | 1.0 | 0.790 | | |

Таблица 1 (продолжение)

| Авторы | Точки (фиг. 3) | M | R^{**} | θ | Ψ | Условия опыта | Метод определения C_f |
|--------------------------------|---------------------|------|----------|----------|-------------|---|-------------------------------------|
| Сомер, Шорт [13] | 44 | 2.81 | | 0.400 | 0.867 | Выстрел пустотелым цилиндром в аэродинамической трубе на встречу потоку | По изменению скорости полета модели |
| | 45 | 3.82 | | 0.268 | 0.730 | | |
| | 46 | 5.63 | | 0.176 | 0.562 | | |
| | 47 | 6.90 | | 0.161 | 0.404—0.451 | | |
| | 48 | 7.00 | | 0.162 | 0.395—0.446 | | |
| | $R_x = \text{idem}$ | | | 0.272 | 0.694 | | |
| $R_x = (3 \div 9) \cdot 10^6$ | 49 { | 3.78 | | 0.285 | 0.724 | | |
| | | 3.67 | | | | | |
| Моноган [19] | | | | | | | |
| $R^{**} = \text{idem}$ | 50 | 2.43 | | 1.0 | 0.680 | | |
| Рубезин [11] | 51 | 2.55 | | 1.0 | 0.705 | | По измерениям профилей скоростей |
| $R_x = \text{idem}$ | | | | | | | |
| $R_x = 7 \cdot 10^6$ | | | | | | | |
| Бринич [12] | 52 | 3.05 | | 1.0 | 0.625 | Цилиндрическая поверхность | По профилям скоростей |
| $R_x = \text{idem}$ | | | | | | | |
| $R_x = (3 \div 18) \cdot 10^6$ | | | | | | | |
| Абботт [14] | 53 { | 3.80 | | 0.278 | 0.720 | | |
| $R_x = \text{idem}$ | | 7.20 | | 0.173 | 0.340 | | |
| $R_x = 5 \cdot 10^6$ | | | | | | | |

Таблица 2

Сравнение опытных данных по турбулентному теплообмену на плоской пластине (отношения чисел Стантона S/S_0 при числе $R_x = \text{idem}$)

| Авторы | Точки (фиг. 3) | M | S/S_0 | Условия опыта | Метод определения S |
|---------------------------------------|-------------------|-------|-------------|-----------------------------------|--|
| Бредфилд, Де-курзин [20] ¹ | 54 | 2.586 | 0.67—0.77 | Обтекание конуса | Измерение теплообмена нестационарным методом |
| | 55 | 8·180 | 0.535—0.700 | | |
| | 56 | 3.410 | 0.547—0.610 | | |
| Папес [15] ¹ | 57 | 1.823 | 0.795—0.900 | Пластина с равномерным подогревом | По расходу электроэнергии и температуре стенки |
| | 58 | 2.290 | 0.675—0.790 | | |
| Шульберг [16] ¹ | 59 | 2.00 | 0.763 | Пластина с равномерным подогревом | По расходу электроэнергии и температуре стенки |
| | 60 | 2.50 | 0.675 | | |
| | 61 | 3.09 | 0.600 | | |
| Слак [17] | 62 | 2.5 | 0.744 | Данные не приводятся | |
| Фаллес [18] | 63 | 2.5 | 0.745 | | |

¹ Данные приведены к теплоизолированным условиям по методике Дрейста.

На фиг. 3 показана зависимость $\Psi = C_f / C_{f0}$ от ψ^* и R^{**} , построенная по формуле (11). Там же нанесены различные опытные данные. Совпадение теоретического расчета с результатами опытов можно считать весьма удовлетворительным. При этом следует отметить, что опыты подтверждают относительно слабое влияние R^{**} на $\Psi = C_f / C_{f0}$, что позволяет в достаточно широких интервалах чисел R^{**} положить

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = \Psi(\Delta\psi, \psi^*) \quad (12)$$

вычисляя эту функцию по формуле (7) при постоянном значении C_{f_0} , равном среднему в выбранном интервале изменения R^{**} . Согласно аналогии Рейнольдса

$$\frac{C_f}{C_{f_0}} = \frac{S}{S_0} \quad (13)$$

где S — число Стантона, S_0 — число Стантона для случая $\psi^* = 1$. Экспериментальные данные, приведенные на фиг. 3, подтверждают это равенство.

В работах В. М. Иевлева [3] показано, что законы сопротивления и теплообмена турбулентного пограничного слоя мало чувствительны к изменению давления в невозмущенном потоке и температуры стенки. На этом основании полученный закон трения (10) можно использовать при расчетах трения и теплообмена при градиентных течениях газа. В этом случае влияние градиента давления и градиента температуры стенки на коэффициенты трения и теплообмена будут учитываться интегральными соотношениями импульсов и энергии.

Поступила 29 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С. Влияние температурного фактора на дозвуковое турбулентное течение газа. ПМТФ, 1960, № 1.
2. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. Машгиз, 1957.
3. Иевлев В. М. Некоторые вопросы гидродинамической теории теплообмена при течении газа. Докл. АН СССР, 1952, 86, № 1.
4. Coles D. Measurements of Turbulent Friction on a Smooth Flat Plate in Supersonic Flow. J. A. S., 1954, V. 21, № 7, p. 433—448.
5. Hill F. K. Boundary — Layer Measurements in Hypersonic Flow. J. A. S., 1956, V. 23, № 1, p. 35—42.
6. Lobb R. K., Winkler E. M., Persh J. Experimental Investigations of Turbulent Boundary layers in Hypersonic Flow. J. A. S., 1955, V. 22, № 1, p. 1—10.
7. Korkegi R. H. Transition Studies and Skin — Friction Measurements on an Insulated Flat Plate at a Mach Number of 5.8. J. A. S., 1956, V. 23, № 2.
8. Chapman D., Kester R. Measurements of Turbulent Skin — Friction on Cylinders in Axial Flow at Subsonic and Supersonic Velocities. J. A. S., 1959, V. 20, № 7, p. 441—448.
9. Liepmann H. W., Dhawhan S. NACA, TN 1952, № 2567. (Займствовано из [8]).
10. Wilson R. E. Turbulent Boundary — Layer Characteristics at Supersonic Speeds — Theory and Experiments. J. A. S., 1950, V. 17, № 9, p. 585—594.
11. Rubensin M. W. An Analytical and Experimental Investigation of the Skin Friction of the Turbulent Boundary Layer on a Flat Plate at Supersonic Speeds. NACA TN, 1951, № 2305. (Займствовано из [8]).
12. Brinich P. F., Diaconis N. S. Boundary Layer Development and Skin Friction at Mach Number 3.05. NACA, TN, № 2742 (1952). (Займствовано из [5]).
13. Sommer S. C., Short B. J. Free — Flight Measurements of Skin Friction of Turbulent Boundary Layers with High Rates of Heat Transfer at High Supersonic Speeds. J. A. S., 1956, V. 23, № 6.
14. Abbott J. A. G. 8/M4. London AGARD Conference, September, 1953. (Займствовано из [5]).
15. Parpas C. C. Measurement of Heat Transfer in the Turbulent Boundary Layer on a Flat Plate in Supersonic Flow and Comparison with Skin Friction Results, NACA, TN, 1954, № 3222, June. (Займствовано из [20]).
16. Shouberg R. H. An Experimental Investigation of Flat Plate Heat Transfer Coefficients at Mach Numbers of 2; 2.5 and 3 for a Surface Temperature to Stream Total Temperature of 1.18, MJT Naval Supersonic Tunnel, WTR 39, June, 1953. (Займствовано из [20]).
17. Slick (Займствовано из Aer. Eng. Rev. № 10, 1956).
18. Fallis B. Heat Transfer in a Transitional and Turbulent Boundary Layer at Supersonic Speeds. J. A. S., 1953, V. 20, № 9, p. 646—647.
19. Monaghan Johnson (Займствовано из J.A.S., 1954, V.21, №7, p.433—448).
20. Bradfield W. S., DeCoursey D. Y. Measurements of Turbulent Heat Transfer on Bodies of Revolution at Supersonic Speeds J. A. S., 1956, V. 23, № 3, p. 272—274.