

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
ОТНОСИТЕЛЬНО ЛОКАЛИЗОВАННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

A. С. Дрыжов

(Новосибирск)

В линейном приближении рассматривается задача об устойчивости сжимаемого пограничного слоя относительно локализованного возмущения. Показано, что анализ устойчивости сводится к изучению дискретного спектра собственных значений соответствующей краевой задачи.

С помощью численного интегрирования проведен анализ характера возникающей неустойчивости для одной неустойчивой моды для числа Маха $M = 4.5$.

1. Рассматривается задача об устойчивости сжимаемого пограничного слоя на плоской пластине относительно локализованного возмущения. Пластина расположена в плоскости xz параллельно набегающему потоку, скорость набегающего потока направлена по оси x . Уравнения газодинамики линеаризуются относительно малого отклонения q от стационарного распределения Q_s

$$Q(t) = Q_s + q(t) \quad (1.1)$$

Для линейной относительно q системы уравнений решается задача Коши и изучается асимптотическое поведение решения при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрение проводится при следующих предположениях. Число Прандтля (Pr) и отношение удельных теплоемкостей (γ) считаются постоянными, используется уравнение состояния идеального газа. Зависимостью стационарного распределения скорости, температуры и плотности от x пренебрегается, течение в невозмущенном пограничном слое считается плоскопараллельным.

2. При сделанных предположениях (обычных для задач устойчивости пограничных слоев [1, 2]) решение задачи с начальными данными строится с помощью преобразования Лапласа по времени и преобразования Фурье по координатам x, z

$$q_*(y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty e^{-pt} dt \int q(x, y, z, t) e^{-ikr} dr \\ kr = \alpha x + \beta z, \quad dr = dx dz \quad (2.1)$$

Для амплитуд $q_*(y)$ получается неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка, которую удобно записать в матричной форме, приведенной к нормальному виду

$$q_*' = A(y) q_* + \xi \quad (2.2)$$

Штрих означает дифференцирование по y . Компоненты матрицы A и вектора ξ приведены в п. 5. Компоненты q_1, q_4, q_5, q_3, q_7 вектора q_* суть амплитуды возмущений x, y, z — компонент скорости, давления и температуры соответственно

$$q_2 = q_1', \quad q_6 = q_5', \quad q_8 = q_7'$$

Границные условия для (2.2) состоят из условий обращения в нуль компонент скорости и непрерывности температуры и потока тепла при $y = 0$

$$q_1(0) = q_4(0) = q_5(0) = 0, \quad aq_8(0) + bq_7(0) = 0 \quad (2.3)$$

и условий ограниченности амплитуд при $y \rightarrow \infty$. Методом вариации постоянных общее решение уравнения (2.2) можно записать в виде

$$q_*(y) = W(y)(d + c(y)), \quad c(y) = \int_0^y W^{-1}(\tau) \xi(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

или для компонент

$$\begin{aligned} q_n &= \sum (d_i + c_i) w_{ni} \quad (n = 1, \dots, 8) \\ c_i &= \int_0^y \frac{\det W_i(\tau)}{\det W(\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $W(y)$ — некоторая фундаментальная матрица однородного уравнения (2.2); W_i — матрица, получающаяся из W заменой i -го столбца на вектор ξ ; d — постоянный вектор, определяемый из граничных условий.

Рассмотрим вместе с (2.2) однородное «пределальное» уравнение

$$\psi' = A(\infty) \psi \quad (A(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} A(y)) \quad (2.6)$$

и его фундаментальную матрицу

$$\Psi(y) = \Phi(y) P$$

Здесь Φ — другая фундаментальная матрица уравнения (2.6)

$$\Phi = e^{yA(\infty)} = Pe^{yJ}P^{-1}$$

а P — постоянная матрица, приводящая $A(\infty)$ к канонической форме J . Столбцы Ψ образуют систему линейно-независимых решений уравнения (2.6)

$$\psi_n = p_n e^{\lambda_n y} \quad (n = 1, \dots, 8)$$

где λ_n — корни характеристического уравнения

$$\det(A(\infty) - \lambda E) = 0 \quad (2.7)$$

E — единичная матрица.

Можно показать (п. 6), что однородное уравнение (2.2) имеет решения, асимптотически совпадающие при больших y с ψ_n . В качестве фундаментальной матрицы W возьмем матрицу, составленную из этих решений, причем, w_j (j -й столбец W) с $j \leq 4$ суть растущие, а с $j > 4$ — затухающие решения при $y \rightarrow \infty$. Тогда из условий ограниченности при $y \rightarrow \infty$ следует:

$$d_i = \frac{1}{\det P} \int_0^\infty \det W_i(\tau) \exp \left[\int_\tau^\infty \operatorname{Sp} A(s) ds \right] d\tau \quad (i \leq 4)$$

Здесь учтено, что

$$\det W(y) = \det P \exp \left[- \int_y^\infty \operatorname{Sp} A(s) ds \right]$$

Из условий (2.3) следует:

$$d_i = \frac{\det G_{i-4}}{\det G} \quad (i > 4)$$

$$G = \begin{pmatrix} w_{15}(0) & \dots & w_{18}(0) \\ w_{45}(0) & \dots & w_{48}(0) \\ w_{55}(0) & \dots & w_{58}(0) \\ aw_{85}(0) + bw_{75}(0) & \dots & aw_{88}(0) + bw_{78}(0) \end{pmatrix}$$

Матрица G_i получается из G заменой i -го столбца на вектор η с компонентами

$$\gamma_{ij} = - \sum_{i=1}^4 d_i z_{ji} \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

$$Z = \begin{pmatrix} w_{11}(0) & \dots & w_{14}(0) \\ w_{41}(0) & \dots & w_{44}(0) \\ w_{51}(0) & \dots & w_{54}(0) \\ aw_{81}(0) + bw_{71}(0) & \dots & aw_{84}(0) + bw_{74}(0) \end{pmatrix}$$

Окончательно можно записать

$$d_i + c_i = \begin{cases} -\frac{1}{\det P} \int_y^\infty \exp \left[\int_\tau^\infty \operatorname{Sp} A(s) ds \right] \det W_i d\tau & (1 \leq i \leq 4) \\ \frac{1}{\det P} \int_0^y \exp \left[\int_\tau^\infty \operatorname{Sp} A(s) ds \right] \det W_i d\tau + \frac{\det G_{i-4}}{\det G} & (5 \leq i \leq 8) \end{cases}$$

Обратные преобразования Фурье и Лапласа, примененные к (2.5), дают решение задачи Коши

$$q_n = \frac{1}{2\pi i} \int e^{ikr} dk \sum_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} \sum_{i=1}^8 (d_i + c_i) w_{ni} dp \quad (2.8)$$

Путь интегрирования в комплексной p -плоскости в выражении (2.8) проходит правее всех особенностей подынтегральной функции. Использование преобразования Лапласа (а значит, и возможность проведения такого пути) представляется оправданным с физической точки зрения — малое возмущение не может нарастать быстрее экспоненты.

3. Асимптотическое разложение решения (2.8) при $t \rightarrow \infty$ получим, замыкая контур интегрирования в левой полуплоскости плоскости p . Главный вклад в разложение (в случае неустойчивости) дают особенности подынтегрального выражения, расположенные в области $\operatorname{Re} p > 0$. Особенности могут быть двух типов: точки ветвления и полюса. Особенности первого типа не дают вклада в неустойчивость. Так как w_i аналитичны в D_j (см. п. 6), достаточно показать, что точки ветвления корней уравнения (2.7) расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} p \leq 0$. Определитель в уравнении (2.7) можно раскрыть, если учесть, что уравнение (2.7), рассмотренное относительно $\omega = p + i\alpha$, $v = k^2 - \lambda^2$ является дисперсионным для малых возмущений в покоящемся газе

$$(\varepsilon v + \omega)^2 [\omega (\varepsilon v + 3\omega/4) (\varepsilon v + \operatorname{Pr} \omega / \gamma) + 3v (\varepsilon v + \operatorname{Pr} \omega) / 4\gamma M^2] = 0 \quad (3.1)$$

Здесь $\epsilon = 1 / R$, R — число Рейнольдса набегающего потока по толщине пограничного слоя, M — число Маха набегающего потока, $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Координаты точек ветвления $\lambda(p)$ определяются из уравнений

$$\epsilon k^2 + \omega = 0 \quad (3.2)$$

$$[(Pr/\gamma + 3/4)\omega + 3Pr/4\epsilon\gamma M^2]^2 - 3Pr\omega(\omega + 3/4\epsilon\gamma M^2)/\gamma = 0 \quad (3.3)$$

$$\omega(\epsilon k^2 + 3\omega/4)(\epsilon k^2 + Pr\omega/\gamma) + 3k^2(\epsilon k^2 + Pr\omega)/4\gamma M^2 = 0 \quad (3.4)$$

Решая эти уравнения относительно ω , получим

$$\omega_1 = -\epsilon k^2 \quad (3.5)$$

$$\omega_{2,3} = -\frac{3Pr}{4\epsilon\gamma^2 M^2} \frac{Pr + \frac{3}{4}\gamma - \frac{3}{2} + [3(\gamma-1)(Pr-0.75)]^{1/2}}{(Pr/\gamma-0.75)^2} \quad (3.6)$$

$$\omega_{4,5} = -\frac{2}{3} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{(\gamma-1)}{Pr} \right) \epsilon k^2 \pm i \frac{k}{M} + o(\epsilon) \quad (3.7)$$

$$\omega_6 = -\epsilon k^2 / Pr + o(\epsilon) \quad (3.8)$$

Корни уравнения (3.4) расположены в левой полуплоскости независимо от ϵ . Это следует из критерия Гурвица [3].

Таким образом, неустойчивость связана с дискретным спектром краевой задачи (2.2), (2.3) и главная часть асимптотического ($t \rightarrow \infty$) разложения решения записывается в виде

$$q_n = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_m \text{res}_m \left(e^{pt} \sum_{i=1}^8 (d_i + c_i) w_{ni} \right) \quad (3.9)$$

Суммирование ведется по полюсам подынтегрального выражения в (2.8), расположенным в правой полуплоскости (если таких полюсов нет, то, очевидно, $q_n \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$). Поскольку A , P , W , ξ аналитичны в области $\text{Re } p > 0$, выражение (3.9) можно переписать так:

$$q_n = \int d\mathbf{k} \sum_m e^{p_m t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left. \frac{F_n}{\partial F / \partial p} \right|_{p=p_m} \quad (3.10)$$

$$F_n = \sum_{i=5}^8 w_{ni} \det G_{i-4}, \quad F = \det G$$

где $p_m(\mathbf{k})$ — корни уравнения

$$F(R, \mathbf{k}, p) = 0 \quad (3.11)$$

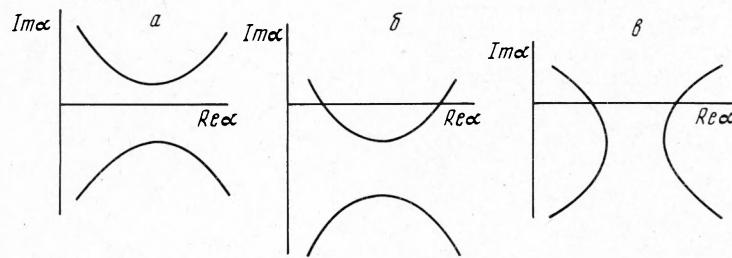
Известно [1,2], что при R , большем некоторого R_c , уравнение (3.11) имеет корни, удовлетворяющие в некоторой области \mathbf{k} -пространства условию $\text{Re } p > 0$ (выражение (3.10) написано для случая простых корней). Это означает, что возмущение, имеющее вид монохроматической волны, при $R > R_c$ будет неограниченно возрастать со временем. Однако асимптотическое поведение локализованного возмущения может отличаться от поведения монохроматических компонент и, несмотря на рост некоторых из них, возмущение в конечной области пространства будет затухать из-за сноса возмущения вниз по течению [4,5] (конвективная неустойчивость).

Если же локализованное возмущение нарастает со временем в конечной области пространства, то течение называется абсолютно неустойчивым. Постановка этой задачи принадлежит Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу [4]. Выяснение вопроса о характере возникающей неустойчивости сводится к анализу асимптотического поведения интеграла в выражении (3.10) при $t \rightarrow \infty$. Поменяем в (3.10) порядок интегрирования и суммирования и рассмотрим один член получающегося ряда

$$J_m = \int_{\Omega_m} d\mathbf{k} e^{p_m t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{F_n}{\partial F / \partial p} \Big|_{p=p_m} \quad (3.12)$$

интегрирование ограничено областью Ω_m , в которой $\operatorname{Re} p_m \geq 0$.

Асимптотическое поведение интеграла зависит от характера расположения в комплексной \mathbf{k} -плоскости линий уровня $\operatorname{Re} p_m = \text{const}$. Возможные случаи показаны на фиг. 1 для двумерных ($\beta = 0$) возмущений (изображены нулевые линии уровня). Фиг. 1, *a* соответствует устойчивому случаю; фиг. 1, *б* — случаю конвективной неустойчивости, так как можно сместить путь интегрирования в комплексную плоскость так, что вдоль него $\operatorname{Re} p_m < 0$ и $J_m \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ при фиксированном \mathbf{r} .



Фиг. 1

В третьем случае (фиг. 1, *в*) для оценки интеграла можно воспользоваться методом перевала [6], смещая путь интегрирования так, чтобы он проходил через седловую точку в направлении наибыстрейшего спуска, и для интеграла получается оценка, из которой следует, что при $t \rightarrow \infty$ он неограниченно растет как $\exp [\operatorname{Re} p_m(\alpha_0)t] / \sqrt{t}$ (α_0 — седловая точка). Метод перевала допускает непосредственное обобщение на случай нескольких переменных [7] и может быть применен и для трехмерных возмущений. Условие возникновения абсолютной неустойчивости при некотором $R = R_a$ запишется в виде

$$\frac{\partial p_m}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 p_m}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \operatorname{Re} p_m = 0 \quad (3.13)$$

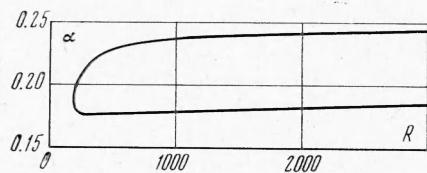
Первые два уравнения служат для определения координат седловой точки, третье означает условие касания в этой точке нулевых линий уровня.

4. Конкретное исследование характера неустойчивости в сжимаемом пограничном слое было проведено для первой из возникающих дополнительно по сравнению с несжимаемым случаем неустойчивых мод для $M = 4.5$ и $T(0) = 4.44$.

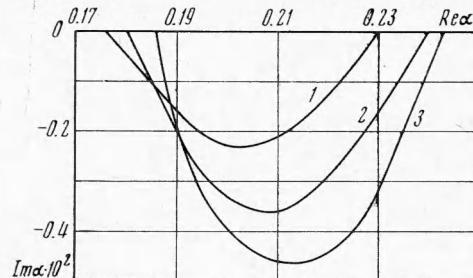
Для несжимаемого пограничного слоя на плоской пластине задача о характере неустойчивости рассматривалась в работе [8] в предложении, что числа Рейнольдса велики и, следовательно, на обеих ветвях нейтраль-

ной кривой волновые числа малы. Это позволило авторам [8] воспользоваться асимптотическим методом. В работе показано, что пограничный слой Блазиуса конвективно неустойчив.

Для сжимаемого пограничного слоя при достаточно больших числах Маха наиболее эффективным методом исследования устойчивости, по-видимому, является численный, тем более, что в рассматриваемом в настоящей работе случае обе асимптоты нейтральной кривой невязкие. Было выполнено непосредственное вычисление линий уровня $Re\alpha = 0$ для ряда значений чисел Рейнольдса. Расчеты проводились для двумерных возмущений методом, аналогичным применявшемуся в работе [9]. На фиг. 2 приведена нейтральная кривая, а на фиг. 3 показаны нулевые линии уровня для чисел Рейнольдса 550, 1140, 3000, помеченные цифрами 1, 2, 3 соответственно. Из результатов расчета видно, что неустойчивость, возникающая при возбуждении этой моды, является конвективной.



Фиг. 2



Фиг. 3

5. Матрица A (y) имеет следующие ненулевые компоненты. Через u , T , ρ , μ обозначены безразмерные (по отношению к соответствующим значениям параметров набегающего потока) распределения продольной скорости, температуры, плотности и вязкости в пограничном слое

$$\begin{aligned}
 \sigma &= p + iu, \quad \varphi = 1 / \gamma M^2 + 4\mu\sigma / 3R \\
 a_{12} &= 1, \quad a_{21} = \rho R\sigma / \mu + k^2, \quad a_{22} = -\mu' / \mu \\
 a_{23} &= i\alpha (R / (\gamma\mu M^2) + \sigma / 3), \quad a_{24} = \rho Ru' / \mu + i\alpha (\ln(\rho^{1/3} / \mu))' \\
 a_{27} &= -i\alpha\sigma / (3T) - (\mu'u' / T')' / \mu, \quad a_{28} = -u'\mu' / (\mu T') \\
 a_{31} &= 2i\alpha\mu (\ln(\rho^{2/3} / \mu))' / (R\varphi), \quad a_{32} = -i\alpha\mu / (R\varphi) \\
 a_{33} &= 4\mu\sigma (\ln(\rho / \mu\sigma))' / (3R\varphi) \\
 a_{34} &= -\rho\sigma / \varphi - \mu k^2 / (R\varphi) + 4\mu\rho' (\ln(\rho^2 / \mu\rho'))' / (3\rho R\varphi) \\
 a_{35} &= 2i\beta\mu (\ln(\rho^{3/2} / \mu))' / (R\varphi), \quad a_{36} = -i\beta\mu / (R\varphi) \\
 a_{37} &= i\alpha u'\mu' / (RT'\varphi) + 4\mu\sigma (\ln\mu\sigma)' / (3TR\varphi) \\
 a_{38} &= 4\mu\sigma / (3TR\varphi), \quad a_{41} = i\alpha, \quad a_{43} = -\sigma, \quad a_{44} = -\rho' / \rho \\
 a_{45} &= -i\beta, \quad a_{47} = \sigma / T, \quad a_{56} = 1, \quad a_{63} = i\beta (R / (\gamma\mu M^2) + \sigma / 3) \\
 a_{64} &= i\beta (\ln(\rho^{1/3} / \mu))', \quad a_{65} = R\rho\sigma / \mu + k^2 \\
 a_{66} &= -\mu' / \mu, \quad a_{67} = -i\beta\sigma / (3T), \quad a_{78} = 1 \\
 a_{82} &= -2Pr(\gamma - 1)M^2u', \quad a_{83} = -(\gamma - 1)PrR\sigma / (\gamma\mu) \\
 a_{84} &= PrR\rho T' / \mu - 2i\alpha Pr(\gamma - 1)M^2u' \\
 a_{87} &= Pr\rho R\sigma / \mu + k^2 - \mu'' / \mu - Pr(\gamma - 1)M^2u'^2\mu' / (\mu T') \\
 a_{88} &= -2\mu' / \mu
 \end{aligned}$$

Ненулевые компоненты вектора ξ

$$\begin{aligned}\xi_2 &= -(\rho R q_{k1}^{\circ} / \mu + i\alpha r_k^{\circ} / 3\rho) \\ \xi_3 &= \rho q_{k4}^{\circ} / \varphi + 4\mu r_k^{\circ} (\ln(\mu r_k^{\circ} / \rho^2))' / (3R \rho \varphi) \\ \xi_4 &= r_k^{\circ} / \rho, \quad \xi_6 = -R q_{k5}^{\circ} / \mu + i\beta r_k^{\circ} / (3\rho) \\ \xi_8 &= -\sigma R \rho q_{k7}^{\circ} / \mu + \sigma R (\gamma - 1) q_{k3}^{\circ} / (\gamma \mu) \\ \left(\dot{q}_{kn}^{\circ} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ikr} q_n(t=0) dr, \quad r_k^{\circ} / \rho = q_{k3}^{\circ} - \frac{q_{k7}^{\circ}}{T} \right)\end{aligned}$$

6. Однородное уравнение (2.2) можно записать в виде

$$q' = A(\infty) q + R(y)q \quad (6.1)$$

Матрицы $A(y)$, $A(\infty)$ аналитичны по p в области

$$D = \left\{ \operatorname{Re} p > -\frac{3R}{4\gamma M^2 \mu^*}, \quad |p| < \infty \right\} \quad (\mu^* = \max_{0 \leq y < \infty} \mu)$$

Нужно показать, что существуют решения w_j такие, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (w_j e^{-\lambda_j y} - p_j) = 0 \quad (6.2)$$

при $p \in D$. Относительно $R(y)$ предполагается следующее условие интегрируемости [10]:

$$\int_0^\infty e^{\omega y} \|R(y)\| dy < \infty \quad (6.3)$$

при любом $\infty > \omega \geq 0$, $p \in D$. Норма $\|R(y)\|$ определена так же, как в [11].

Рассмотрим интегральное уравнение

$$q = \psi_j - \int_y^\infty \Phi(y - \tau) R(\tau) q(\tau) d\tau \quad (y \geq y_0 \geq 0) \quad (6.4)$$

Подстановкой проверяется, что если w_j удовлетворяет (6.4), то

$$w_j' = A(y) w_j$$

Решение уравнения (6.4) можно продолжить в область $y < y_0$, как решение уравнения (6.1). Методом, аналогичным применяемому в [11], используя (6.3), можно показать, что уравнение (6.1) имеет решение w_j , удовлетворяющее условию (6.2). Поскольку матрица dR/dp тоже удовлетворяет условию (6.3), то аналогично можно показать, что производная dw_j/dp существует и однозначна при $p \in D_j$. Здесь $D_j = D - \Gamma_j$; Γ_j — совокупность разрезов таких, что $\lambda_j(p)$ суть однозначная ветвь функции $\lambda(p)$ в D_j .

Автор благодарен В. В. Струминскому за внимание к работе, Л. Б. Айзину за полезное обсуждение затронутых вопросов и А. А. Маслову за большую помощь в проведении численных расчетов.

Поступила 15 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
 2. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
 3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
 4. Ландau Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
 5. Ахieзер А. И., Половин R. B. Критерии нарастания волн. Усп. физ. н., 1971, т. 104, вып. 2.
 6. Dysthe K. B. Convective and absolute instability. Nucl. Fusion, 1966, vol. 6, No. 3.
 7. Nagele B. The saddle point method for multiple integrals with an application to the evaluation of radial Coulomb matrix elements for large multipole orders. Ark. Fys., 1964, Bd. 27, H. 2.
 8. Иорданский С. В., Кулаковский А. Г. Об абсолютной устойчивости некоторых плоскопараллельных течений при больших числах Рейнольдса, ЖЭТФ, 1965, т. 49, вып. 4.
 9. Маслов А. А. Численное исследование устойчивости сверхзвукового ламинарного пограничного слоя. ПМТФ, 1972, № 5.
 10. Hastings S. P. On the uniqueness and asymptotic behaviour of a similarity solution for a compressible boundary layer. Arch. Ration. Mech. and Analys., 1971, vol. 42, No. 2.
 11. Коудингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
-