5. **Лифанов И. К., Михайлов А. А.** Математические вопросы расчета безотрывного обтекания тел // Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов.— М., 1986.— (Сб. науч. тр./ВВИА им. Н. Е. Жуковского; вып. 1313).
6. **Баренблатт Г. И.** Автомодельные решения.— Л.: Судостроение, 1978.
7. **Воробьев Н. Ф.** Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке.— М.: Наука, 1985.

г. Жуковский *Поступила 7/IV 1988 г., в окончательном варианте — 31/I 1989 г.*

УДК 532.526

Ю. Г. Гуревич

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКИХ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СТРУЙ

Столкновение пристенных струй на гладкой поверхности рассматривалось многими авторами [1, 2]. В рамках теории потенциальных струйных течений в этой задаче остается неопределенным положение области взаимодействия, а направление результирующей струи определяется однозначно. Учет вязкости позволяет найти положение области взаимодействия [3]. Важно заметить, что для установления направления результирующей струи достаточно интегральных законов сохранения и предположения о том, что вязкость несущественна в области взаимодействия. При этом не нужно знать распределения давления на поверхности.

Особенностью задачи о столкновении струй в окрестности угла является то, что интегральные законы сохранения не позволяют установить направление результирующей струи, если неизвестно распределение давления по поверхности в области взаимодействия. Решение этой задачи в рамках теории потенциальных струйных течений также неединственно и не позволяет однозначно определить направление результирующей струи.

В данной работе в рамках приближения бесконечно тонкой струи представлено простое приближенное решение задачи о столкновении плоских затопленных несжимаемых пристенных струй в окрестности угла. Рассматривается ламинарное и турбулентное течение в квазиламинарном приближении. Отмечено, что небольшие изменения параметров взаимодействующих струй могут сильно менять направление результирующей струи. Показана также целесообразность использования приближения бесконечно тонкой струи в других задачах струйных течений. Проведено качественное рассмотрение задач об ударе струи в угол и о столкновении нескольких струй в пространстве.

1. Пусть вдоль двух пересекающихся плоскостей Ω_1 и Ω_2 (рис. 1) распространяются две плоские пристенные затопленные струи, направленные к линии пересечения плоскостей. Угол между плоскостями γ, координаты x_1 и x_2 взяты соответственно вдоль поверхностей Ω_1 и Ω_2 по нормали к линии пересечения, на которой $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Допустим, что область взаимодействия струй лежит вблизи точки с координатами $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и что на некотором расстоянии от угла параметры струй не зависят от течения в области взаимодействия. Полагается, что источники струй находятся достаточно далеко от области взаимодействия. Предположим, что течение в ней стационарно и имеет следующую структуру: вблизи угла каждая из струй отрывается от поверхности (x_1^0 и x_2^0 — координаты точек отрыва струй на поверхностях Ω_1 и Ω_2); перед точкой отрыва течение невозмущенное; за точкой отрыва формируется область с малыми изменениями давления и малыми скоростями, которая считается застойной; в результате столкновения формируется одна результирующая струя. Полагая, что параметры струй вне области взаимодействия при $x_1 > x_1^0$ и $x_2 > x_2^0$ известны, определим направление результирующей струи, давление в застойной зоне и ее характерные размеры.

Для решения сформулированной задачи необходимо рассмотреть вопрос о движении оторвавшихся струй. В дальнейшем движение струй после отрыва исследуется в приближении бесконечно тонкой струи (БТС).

2. Пусть ξ — векторная линия поля импульса, вне этой линии импульс равен нулю. Запишем закон сохранения импульса в системе коор-

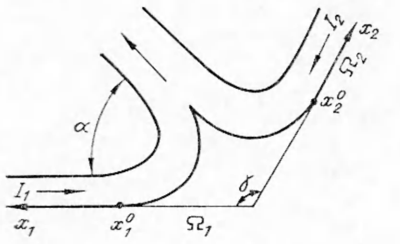

Рис. 1

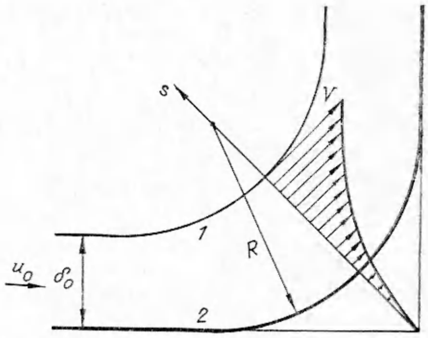

Рис. 2

динат ξ, τ, связанной с линией ξ (координата ξ отсчитывается вдоль линии, τ — по нормали к ней):

$$dI/d\xi = F_\xi, \quad I/R = F_\tau, \tag{2.1}$$

где I — импульс в направлении ξ; R — радиус кривизны линии ξ; F_τ, F_ξ — соответствующие компоненты вектора внешней силы, действующей на единице длины.

Если ξ разделяет две области с разными давлениями и разница давлений составляет величину Δp, то

$$I/R = \Delta p. \tag{2.2}$$

Из соотношений (2.1), (2.2) вытекает ряд интересных свойств: а) при $F_\xi = 0$ величина $I = \mathrm{const}$ вдоль линии ξ; б) при $F_\tau = 0$ линия ξ прямая; в) при $F_\tau = \mathrm{const}$ линия ξ — дуга окружности (например, если ξ разделяет две области с разными давлениями); г) линия ξ с импульсом I может разветвляться по касательной на линии с импульсами $I_1, I_2, \ldots, I_n$, причем $I_1 + I_2 + \ldots + I_n = I$. Заметим, что законы движения БТС следуют из закона сохранения импульса без привлечения закона сохранения массы. Расход вдоль линии ξ может меняться, что отвечает движению реальной струи.

В рамках приближения БТС задача о движении и взаимодействии затопленных струй сводится к геометрическим задачам. Например, при столкновении двух струй на плоскости, имеющих импульсы I_1 и I_2, каждая будет отходить от поверхности вдоль дуги окружности, касающейся этой поверхности. Из точки касания окружностей друг друга выйдет результирующая струя, направленная по касательной, имеющая импульс $I_\Sigma = I_1 + I_2$. Причем так как разность между давлением в застойной зоне и давлением в остальном пространстве одинакова для каждой из струй, то радиусы дуг окружностей R_1 и R_2 пропорциональны I_1 и I_2 соответствующих струй. Закон сохранения импульса выполняется автоматически, а направление результирующей струи не зависит от давления в застойной зоне.

Очевидно, что приближение БТС применимо при малых значениях δ/R (δ — характерный поперечный размер струи). Если $I = \delta U^2 \rho$ (U — характерная скорость в струе), то из (2.2) $\delta/R = \Delta p/\rho U^2$. Следовательно, применение приближения связано с предположением о том, что перепад давления, под действием которого происходит поворот струи, должен быть мал по сравнению со скоростным напором в струе.

Для количественной оценки пригодности приближения БТС на рис. 2 представлено сопоставление решения, полученного с помощью этого приближения, с точным решением задачи об ударе потенциальной струи в преграду, установленную под углом $\gamma = \pi/2$ к направлению движения невозмущенной струи [1]. Здесь в приближении БТС давление в застойной зоне равно давлению торможения. Тогда $\Delta p = \rho u_0^2/2$ и $R = 2\delta_0$ (u_0, δ_0 — скорость и толщина невозмущенной потенциальной струи). Кривая 1 —

внешняя граница потенциальной струи, 2 — линия движения БТС. Вдоль биссектрисы угла построен профиль квадрата модуля скорости V в потенциальной струе. Видно, что давление в области ниже линии 2 меняется примерно на 10 % от скоростного напора невозмущенной струи, в то время как в приближении БТС оно считается постоянным. Интеграл $I = \int\limits_0^\infty \rho V^2\, ds \approx 0{,}77 I_0$. В приближении БТС эта величина также считается постоянной и равна I_0 (координата s отсчитывается вдоль биссектрисы угла, $I_0 = \rho u_0^2 \delta_0$). Таким образом, приближение БТС оказывается вполне применимым даже тогда, когда увеличение давления в области разворота равно скоростному напору невозмущенной струи.

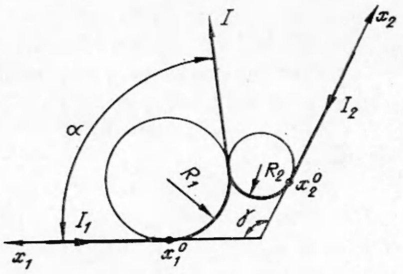

Рис. 3

3. Для решения сформулированной в п. 1 задачи о столкновении двух пристенных струй в угле в приближении БТС нужно построить две окружности, касающиеся сторон угла γ и друг друга. Радиусы окружностей пропорциональны импульсам взаимодействующих струй (рис. 3).

Условие касания окружностей сторон угла и друг друга можно записать в виде

$$R_1(1 + \cos\alpha) + R_2(\cos\gamma + \cos\alpha) = x_2^0 \sin\gamma, \tag{3.1}$$

$$R_1(1 + \cos\alpha) + R_2[1 + \cos(\gamma - \alpha)] = x_1^0 \sin\gamma + x_2^0 \sin(\gamma - \alpha),$$

где R_1, R_2 — радиусы окружностей, пропорциональные импульсам струй; x_1^0, x_2^0 — координаты точек отрыва струй или координаты точек касания окружностей и сторон угла; α — угол направления результирующей струи (см. рис. 3).

Из (3.1) видно, что если R_1 и R_2 заданы, то α не определяется однозначно, так как x_1^0 и x_2^0 неизвестны. Легко определить граничные значения в интервале возможных α при заданных R_1 и R_2. Пусть $R_1 = R_2$, тогда при заданном γ, если окружность с радиусом R_1 касается линии x_1 и линии x_2 одновременно, направление результирующей струи нормально к линии x_2 и $\alpha = \gamma - \pi/2$. В другом крайнем случае $\alpha = \pi/2$. Например, при $\gamma = \pi/2$ и $I_1 = I_2$ соотношения (3.1) удовлетворяются при любом α в интервале $0 < \alpha < \pi/2$. Каждому α отвечают определенные значения x_1^0 и x_2^0. Нетрудно заметить, что в общем случае возможны $\alpha > \gamma$ или $\alpha < 0$. Тогда направление результирующей струи будет пересекать одну из координатных линий и предполагаемая схема течения не может быть реализована.

Следуя подходу, принятому в приближенных теориях отрывных течений [4], для однозначного выбора решения, удовлетворяющего уравнениям (3.1), учтем эффекты, связанные с вязкостью. В [2] построена локальная асимптотическая теория отрыва ламинарной пристенной струи при $\mathrm{Re} \to \infty$. Показано, что в окрестности точки отрыва в струе возникает тонкий пристенный подслой, в котором существенна вязкость. Под действием вытесняющего эффекта вязкого подслоя основная часть струи отходит от поверхности, ее движение описывается уравнениями Эйлера. В [3] для ламинарной или турбулентной струи в квазиламинарном приближении предложены простые алгебраические соотношения относительно u_i, δ_i, l, R, Δp, где u_i, δ_i, l — характерная скорость, толщина и продольный размер вязкого подслоя в окрестности точки отрыва; R — характерный радиус поворота струи после отрыва; Δp — избыточное давление в зоне за отрывом:

$$u_i^2/2 = \Delta p,\ u_i/l = \nu/\delta_i^2,\ I/R = \Delta p,\ \delta_i/l^2 = 3/(4R), \tag{3.2}$$

$$u_i/u_m = \varphi(\delta_i/\delta_m);$$

функция φ описывает профиль скорости в пограничном слое в невозмущенной струе и считается известной; I — импульс невозмущенной струи; ν — коэффициент кинематической турбулентной вязкости в невозмущенной струе на расстоянии от стенки $n = \delta_i$; u_m — максимальная скорость в струе; δ_m — расстояние от стенки, на котором скорость принимает значение u_m.

Входящие в соотношения (3.2) I, ν, u_m, δ_m являются параметрами невозмущенной струи перед точкой отрыва и зависят от координат точки отрыва, поэтому, решая уравнения (3.2) для каждой из взаимодействующих струй, получим

$$R_1 = R_1(x_1^0),\ R_2 = R_2(x_2^0),\ \Delta p_1(x_1^0) = \Delta p_2(x_2^0). \tag{3.3}$$

Соотношения (3.3) вместе с (3.1) позволяют определить x_1^0, x_2^0, R_1, R_2, $\Delta p_1 = \Delta p_2$ и направление результирующей струи (угол α), если известны зависимости параметров невозмущенных струй от продольных координат x_1 и x_2. Последнее соотношение в (3.3)— условие того, что давление в замкнутой зоне, ограниченной сторонами угла и оторвавшимися струями, постоянно.

В качестве примера рассмотрим взаимодействие пристенных турбулентных затопленных струй, считая, что перед областью взаимодействия струи автомодельны. Тогда для пограничного слоя в пристенной струе запишем [5]

$$u/u_m = (n/\delta_m)^{1/7} \tag{3.4}$$

(n — координата, отсчитываемая от поверхности поперек струи). Следовательно,

$$\varphi(\delta_i/\delta_m) = (\delta_i/\delta_m)^{1/7}. \tag{3.5}$$

Входящая в уравнения (3.2) величина $I = \int\limits_0^\infty u^2\,dn$ ($\rho \equiv 1$) имеет вид

$$I = 4{,}76 u_m^2 \delta_m. \tag{3.6}$$

Турбулентное трение в пограничном слое пристенной струи $\tau = 0{,}01 u_m^2$ [5]. Тогда $\nu = \tau/(\partial u/\partial n)$ при $n = \delta_i$ и с учетом (3.4) получим

$$\nu = 0{,}07\delta_i u_m^2/u_i. \tag{3.7}$$

Решая уравнения (3.2), с учетом (3.5)—(3.7) имеем

$$u_i = 0{,}81 u_m,\ \delta_i = 0{,}23\delta_m,\ \Delta p = 0{,}33 u_m^2,\ R = 14{,}4\delta_m,\ l = 2{,}1\delta_m.$$

Далее, используя соотношения для u_m и δ_m [5] ($u_m = 3{,}5u_0/\sqrt{L/\delta_0}$, $\delta_m = 0{,}01L$ (u_0, δ_0 — скорость и ширина в начальном сечении струи, L — расстояние от начального сечения струи), запишем (3.3) в виде

$$u_{01}^2/(L_0 - x_1^0) = u_{02}^2/(L_0 - x_2^0),\ R_i = 0{,}144\,(L_0 - x_i^0) \quad (i = 1, 2) \tag{3.8}$$

(L_0 — расстояние от начального сечения струи до угла). Считается, что эти расстояния, как и начальные сечения струи, одинаковы. Масштаб изменения x_1^0 и x_2^0 порядка R. Введем

$$\Delta = (u_{01} - u_{02})/2u^*,\ R_0 = 0{,}144L_0,$$
$$\varepsilon = R_0/L_0,\ u^* = (u_{01} + u_{02})/2. \tag{3.9}$$

Тогда уравнения (3.1), (3.8) с учетом (3.9), считая $\varepsilon \ll 1$ и $\Delta \ll 1$ и оставляя только главные члены, представим как

$$1 + 2\cos\alpha + \cos\gamma = X_2^0 \sin\gamma,$$
$$2 + \cos\alpha + \cos(\gamma - \alpha) = X_1^0 \sin\alpha + X_2^0 \sin(\gamma - \alpha),$$
$$\Delta = (\varepsilon/4)(X_2^0 - X_1^0)\ (X_i^0 = x_i^0/R_0,\ i = 1, 2). \tag{3.10}$$

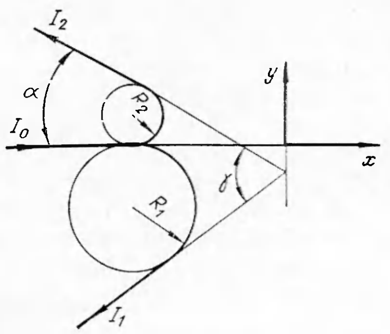

Рис. 4

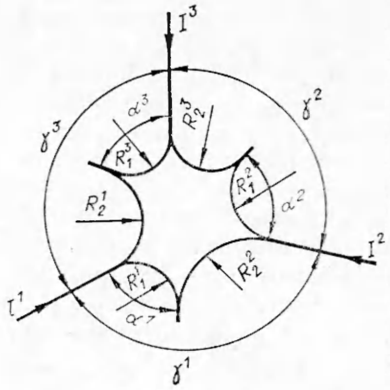

Рис. 5

Для взаимодействия струй с близкими параметрами ($\Delta \ll 1$) в угле с $\gamma = \pi/2$ получим ($\varepsilon = 0{,}144$)

(3.11) $$\sin(\pi/4 - \alpha) = 40\Delta.$$

Из (3.11) видно, что при $\Delta = 0;\ 0{,}07;\ -0{,}07$ $\alpha = \pi/4;\ 0;\ \pi/2$. Таким образом, небольшие изменения начальной скорости каждой из струй приводят к сильному изменению направления результирующей струи.

Предварительное экспериментальное исследование показало, что при $\Delta = \pm 0{,}02$ угол α принимал значение 0 и $\pi/2$ соответственно. Однако при меньших значениях Δ направление результирующей струи было неустойчиво.

4. Использованное в п. 3 приближение БТС может быть полезным для качественного анализа некоторых других струйных течений, например в задаче об ударе струи в угол. Пусть плоская затопленная струя направлена вдоль оси x параллельно биссектрисе угла и ударяется в пересекающиеся поверхности, образующие угол γ. Вершина угла находится в точке с координатой y (рис. 4).

Импульс струи равен I_0. В результате столкновения струя разделяется на две, разворачивающиеся по дугам окружностей с радиусами R_1 и R_2, импульсы этих струй I_1 и I_2, причем $I_1 + I_2 = I_0$. В области взаимодействия возникает зона, давление в которой считаем постоянным и равным $p_0 = p + \Delta p$ (p — давление вне области взаимодействия). Тогда $R_i = I_i/\Delta p$ ($i = 1, 2$). Сила, действующая на угол, имеет составляющие $F_x = I_0(1 + \cos(\gamma/2))$, $F_y = \Delta p(R_1 - R_2)\sin(\gamma/2)$. Учитывая, что $\alpha = \gamma/2$, первое уравнение из (3.1) можно записать как

$$R_1 - R_2 = -y\cos(\gamma/2)/\cos^2(\gamma/4).$$

Тогда $F_y = \Delta p y \sin\gamma/[2\cos^2(\gamma/4)]$. Видно, что составляющая силы F_y зависит от угла γ и от координаты y, в то время как F_x — только от γ. Если в направлении y на угол действует только сила, вызванная ударом струи, и скорость движения угла мала по сравнению со скоростью жидкости в струе, то уравнение движения угла в направлении y имеет вид

$$\ddot{y} \sim -y\sin\gamma/[2\cos^2(\gamma/4)].$$

Таким образом, при $\gamma < \pi$ движение угла будет колебательным, причем частота колебаний f зависит от γ: $f \sim \sqrt{2\sin\gamma}/\cos(\gamma/4)$. Максимальная частота соответствует $\gamma = 103{,}6°$. При $\gamma = \pi$ колебаний не будет.

5. Другой пример задачи, в которой приближение БТС может быть полезным,— это задача о соударении затопленных струй в пространстве. В приближении БТС при взаимодействии струй должна возникнуть замкнутая область повышенного давления, границы которой образованы касающимися друг друга дугами окружностей, выпуклыми в сторону области повышенного давления. Пусть в некоторой области пространства сталкивается N струй. В силу указанных геометрических особенностей

границы области повышенного давления между двумя соседними струями должна существовать струя, направленная из зоны взаимодействия, как показано на рис. 5 на примере столкновения трех струй.

Значит, в рамках принятого приближения можно сформулировать следующее утверждение: при взаимодействии плоских струй в пространстве из области взаимодействия вытекает столько же струй, сколько их втекает в область взаимодействия.

Пронумеруем втекающие в область взаимодействия струи от 1 до N. Импульсы струй обозначим через I^k $(1 \leqslant k \leqslant N)$, угол между k-й и $(k+1)$-й струями — γ^k при $k \leqslant N-1$ и угол между N-й и 1-й струей — γ^N, как показано на рис. 5. В каждом угле γ^k $(1 \leqslant k \leqslant N)$ можно записать два соотношения (3.1) для $R_1{}^k$, R_2^{k+1}, x^{0k}, x^{0k+1}, α^k (см. рис. 5) при $k \leqslant N-1$ и для γ^N относительно $R_1{}^N$, $R_2{}^1$, x_i^{0N}, x^{01}, α^N. Кроме того, $R_1{}^k + R_2{}^k = I^k/\Delta p$ (Δp — избыточное давление в зоне взаимодействия). Таким образом, $3N$ соотношений относительно $4N+1$ неизвестных $R_1{}^k$, $R_2{}^k$, $x_0{}^k$, α^k, Δp не позволяют однозначно описать картину взаимодействия, в частности, найти направления вытекающих из зоны взаимодействия струй. Аналогичный результат получается в задаче о столкновении двух потенциальных струй в классической постановке в рамках ТФКП [1, 6]. Поиску условий, определяющих единственное решение этой задачи, посвящено довольно много работ (например, [1, 7] и др.).

Если сталкивающиеся струи непотенциальны, то естественно предположить, что давления торможения струек тока, по которым происходит разделение каждой из взаимодействующих струй, равны между собой и равны максимальному давлению в зоне взаимодействия (для потенциальных струй это условие выполняется автоматически, так как давление торможения всех струек тока одинаково). Если профили давления торможения в каждой из взаимодействующих струй известны, то давление торможения разделительной струйки тока $p_0{}^k$ есть известная функция от $R_1{}^k/R_2{}^k$. Тогда можно записать еще N соотношений

$$\Delta p = f_k(R_1{}^k/R_2{}^k),$$

что дает $4N$ соотношений относительно $4N+1$ неизвестных.

Таким образом, в приближении БТС для выбора единственного решения достаточно задать, например, избыточное давление в зоне взаимодействия или положение разделительной струйки тока в одной из взаимодействующих струй. При этом в зависимости от конкретного вида профилей скорости взаимодействующих струй и углов γ^k не любая струйка тока может быть разделительной, т. е. не при любом значении Δp система уравнений имеет решение. По мнению автора, наиболее естественным условием для выбора значения Δp является следующее: Δp должно быть минимальным из возможных.

Из рис. 5 видно, что возможна ситуация, когда направление одной из вытекающих из области взаимодействия струй пересекает одну из соседних втекающих струй. Тогда, как и при столкновении струй в угле (п. 3), предполагаемая схема течения не может быть реализована.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Биркгоф Г., Сарантонелло Э.** Струи, следы и каверны. Перевод с англ.— М.: Мир, 1964.
2. **Smit F. T., Duc P. W.** Separation of jets or thermal boundary layers from a wall // Quart. J. Mech. and Appl. Math.— 1977.— V. 30, N 2.
3. **Гуревич Ю. Г., Шубин Е. Б.** Взаимодействие пограничных слоев в трехмерных течениях // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 3.
4. **Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю.** Турбулентные отрывные течения.— М.: Наука, 1979.
5. **Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А., Крашенинников С. Ю. и др.** Теория турбулентных струй.— М.: Наука, 1984.
6. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости.— М.: Наука, 1979.
7. **Кинеловский С. А., Соколов А. В.** О несимметричном соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 1.

г. Москва *Поступила 27/IV 1988 г., в окончательном варианте — 29/XII 1988 г.*