

Из фиг. 6 видно, что при $\xi = 0,2$ экспоненциальная нагрузка по сравнению с нагрузкой конечной длины приводит к повышению значения p , u , v во всех точках полупространства, что и следовало ожидать, так как величина приложенной на свободную поверхность нагрузки (9) больше, чем (8).

Данная схема позволяет рассчитать параметры нелинейно-сжимаемой полуплоскости и в случае нелинейной разгрузки среды.

Авторы выражают благодарность Х. А. Рахматулину за полезные советы и обсуждения результатов работы.

Поступила 27 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Капустянский С. М. Распространение и отражение двумерных пластических волн. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1973, № 1, с. 60—68.
2. Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Алексеев Н. А. Вопросы динамики грунтов. М., изд. Моск. ун-та, 1964.
3. Гриб А. А., Шарый В. А. Распространение ударной волны в водоеме с наклонным дном. — «Вестн. Ленинг. ун-та. Математика, механика, астрономия», 1974, вып. 3, с. 74—81.
4. Лаврентьев М. А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., Изд-во АН СССР, 1962.
5. Капустянский С. М., Шхинек К. Н. Распространение двумерных волн в уруго-пластической среде. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1972, № 3, с. 48—55.

УДК 534.12

О ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ УПРУГОГО СЛОЯ

В. А. Сарайкин

(Новосибирск)

При исследовании волновых явлений в упругом слое широкое применение получили приближенные теории, основанные на представлении смещений в виде рядов относительно срединной поверхности [1—3]. Разложение в ряды по полиномам Лежандра является одним из способов такого представления искомого решения теории упругости и обладает преимуществами перед остальными [1]. Удерживая то или иное количество членов, для коэффициентов ряда можно вывести различные варианты уравнений динамики пластин. Наиболее полно исследованы уравнения Бернулли — Эйлера и Тимошенко. Кроме того, для описания процессов, протекающих в слое, в последнее время привлекаются различные варианты уточненных уравнений [2, 4, 5].

Интерес к колебаниям пластин, к выводу более точных уравнений связан отчасти с тем, что переход от уравнений теории упругости к приближенным приводит к погрешностям в описании нестационарных процессов. Так, из-за приближенного учета распределения смещений по толщине слоя не учитываются поверхностные волны Рэлея и фронты многократно отраженных от поверхностей слоя волн, т. е. при выводе уравнений пластин игнорируются высокие частоты. Эти быстро изменяющиеся части решения теории упругости определяются в разложениях смещений слагаемыми, отбрасываемыми при выводе достаточно простых для анализа или расчета на ЭВМ вариантов уравнений динамики пластин. Ясно, что лучшей аппроксимации решения задач теории упругости решениями приближенных уравнений можно достичь, увеличивая число слагаемых ряда

и соответственно повышая порядок системы уравнений для пластины. Поэтому возникают вопросы о погрешностях аппроксимации решения задач теории упругости этими уравнениями и области применимости уравнений динамики пластин.

Сопоставления решений приближенных уравнений с точным решением задачи теории упругости проведены при больших временах для длинноволновой асимптотики [6] и в начальной стадии процесса для сечения, расположенного под локальной нагрузкой [1, 7]. Показано, что теории Кирхгофа и Тимошенко хорошо описывают длинноволновую часть решения, причем теория Тимошенко — в более широком диапазоне. В начале процесса, когда отношение толщины слоя к протяженности области, охваченной возмущениями, порядка единицы, существенную роль играет быстро изменяющаяся часть решения. Сравнение с осредненным по толщине слоя точным решением теории упругости показывает, что здесь теория Кирхгофа непригодна, а уравнения Тимошенко дают достоверные результаты после того, как волна расширения пройдет четверть толщины слоя. Открытым остается вопрос о применимости приближенных уравнений в сечениях, удаленных от места действия нагрузки в момент прихода возмущений.

В предлагаемой работе с этой целью проведено сопоставление одного точного решения нестационарной задачи теории упругости для слоя с решениями уравнений динамики пластин, описывающими цилиндрический изгиб. Для сравнения, кроме уравнений Бернулли—Эйлера и Тимошенко, привлечены уточненные уравнения динамики пластин. Основное внимание уделено изучению величин, которые выражаются через производные смещений: моменту, перерезывающей силе и скорости прогиба.

Пусть слой занимает область $0 \leq z \leq 1$, $|x| \leq \infty$, $|y| \leq \infty$, x, y, z — координаты точек в прямоугольной декартовой системе. Примем за единицы измерения толщину слоя h , плотность среды и скорость волны расширения c_1 . Единицей времени служит интервал времени, в течение которого волна расширения проходит расстояние, равное толщине слоя.

Источником возмущений являются две одинаковые по величине несамоуравновешенные вертикальные нагрузки, мгновенно приложенные в момент времени $t = 0$ к поверхностям слоя $z = 0$ и $z = 1$. Рассматривается плоское напряженное состояние (нагрузки неизменны вдоль координаты y)

$$(1) \quad \sigma_{zz} = \mp (1/2\pi) [\varepsilon / (\varepsilon^2 + x^2)] \delta_0(t), \quad \sigma_{xz} = 0 \quad (z = 0, z = 1),$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $\delta_0(t)$ — функция единичного скачка; ε — вещественный параметр; индексы — и + соответствуют плоскостям $z = 0$ и $z = 1$. При $\varepsilon = 0$ в граничных условиях получаем сосредоточенные вдоль линий $x = z = 0$ и $x = 0, z = 1$ нагрузки $\mp (1/2) \delta_0(t) \delta_1(x)$. Начальные условия задачи нулевые.

Эта задача описывает основную несамоуравновешенную часть поля при изгибе слоя вертикальной нагрузкой, действующей лишь на плоскость $z = 0$. Симметричной составляющей нагрузки

$$\sigma_{zz} = -(1/2\pi) [\varepsilon / (\varepsilon^2 + x^2)] \delta_0(t), \quad \sigma_{xz} = 0 \quad (z = 0, z = 1)$$

отвечает поле, которое при изгибе имеет второстепенную роль. При переходе к уравнениям динамики пластин эта нагрузка определяет лишь краевой эффект при $x = 0$ и пик на фронте сдвиговой волны $x = c_2 t$. Вне этих областей возмущения практически равны нулю [1].

После применения преобразований Лапласа (по t) и Фурье (по x) к уравнениям теории упругости и к граничным условиям (1) находятся изображения решения задачи. Разлагая знаменатель изображения решения для слоя в ряд по степеням экспонент и обращая каждое слагаемое, находим решение в явном виде как сумму многократно отраженных волн. Суммирование и расчет на ЭВМ полученного аналитического решения осуществлялись так же, как и в работе [8]. Такой численно-аналитический

метод позволяет (в отличие от разностного) с достаточно высокой точностью вычислить быстро изменяющееся решение и выявить высокочастотные толщинные колебания, которые возникают в результате отражения упругих волн от поверхностей слоя. Погрешность при расчете задачи определяется лишь ошибками округления ЭВМ при выполнении арифметических операций.

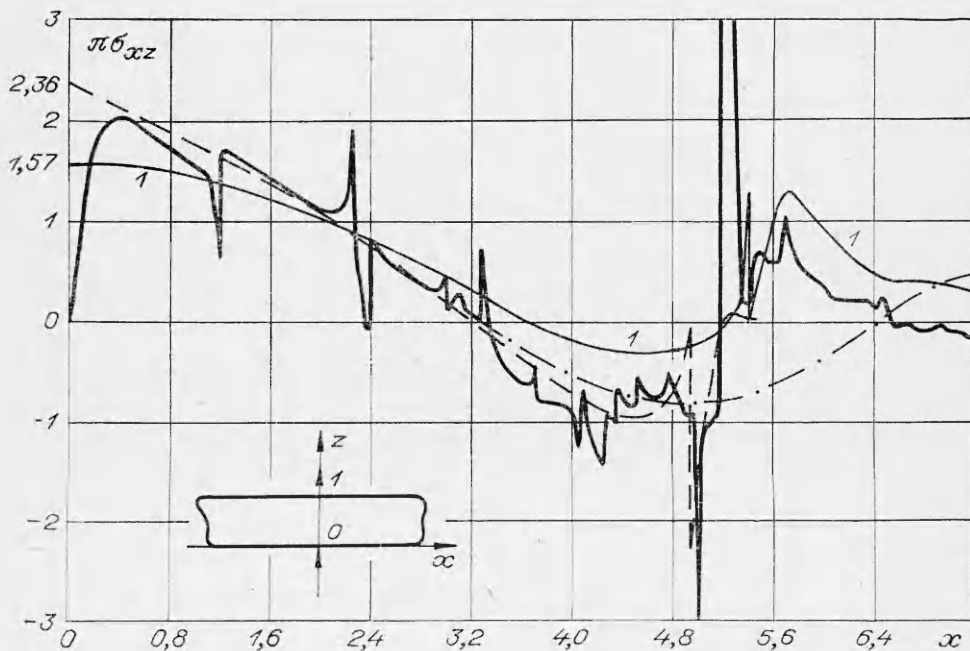
На фиг. 1—3 жирной сплошной линией представлены результаты расчетов напряжений и вертикальной составляющей скорости $\partial w/\partial t$ по теории упругости. Расчеты проведены при $\varepsilon = 0.001$ — нагрузка сосредоточена по отношению к толщине слоя. Коэффициент Пуассона принят равным 0,292. Этому значению соответствует безразмерная величина скорости волн сдвига $c_2 = 0,542$.

Отметим, что графики построены по точкам, отстоящим друг от друга по оси абсцисс на расстоянии 0,05. Поэтому фронтовые пики (в их окрестностях напряжения и скорости пропорциональны $\varepsilon^{-1/2}$) описаны с некоторой погрешностью, поскольку с ростом времени ширина фронтового пика, где имеет место эта асимптотика, сужается и становится пренебрежимо малой по сравнению с шагом 0,05.

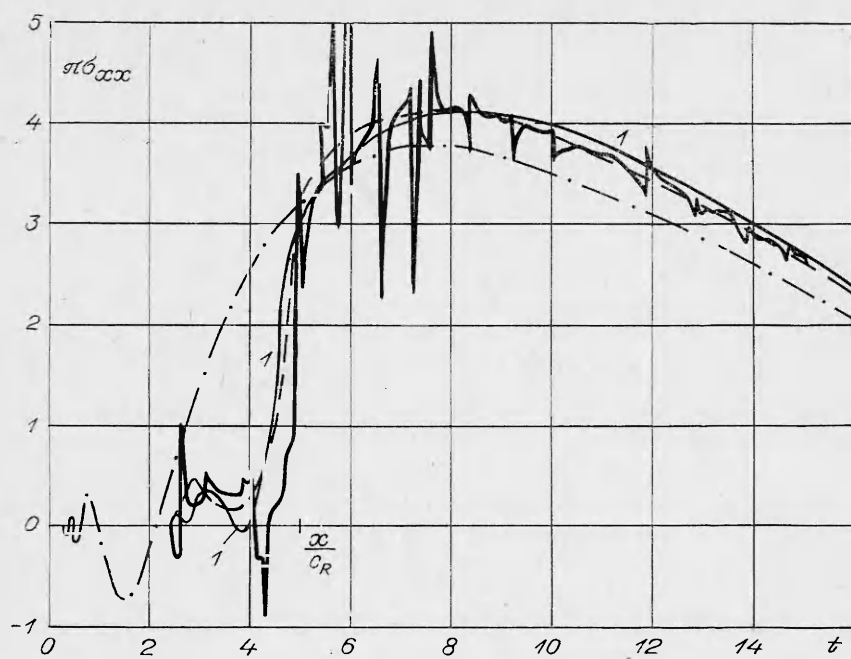
Приближенные уравнения динамики пластин любой точности можно получить, разлагая смещения в ряд по полиномам Лежандра P_n на отрезке $0 \leq z \leq 1$. Воспользуемся результатами вывода уравнений динамики пластин, осуществленного в работе [1]. Следует учесть только, что за единицу длины вместо полутолщины здесь принята толщина слоя.

Удержим в разложениях смещений по два члена

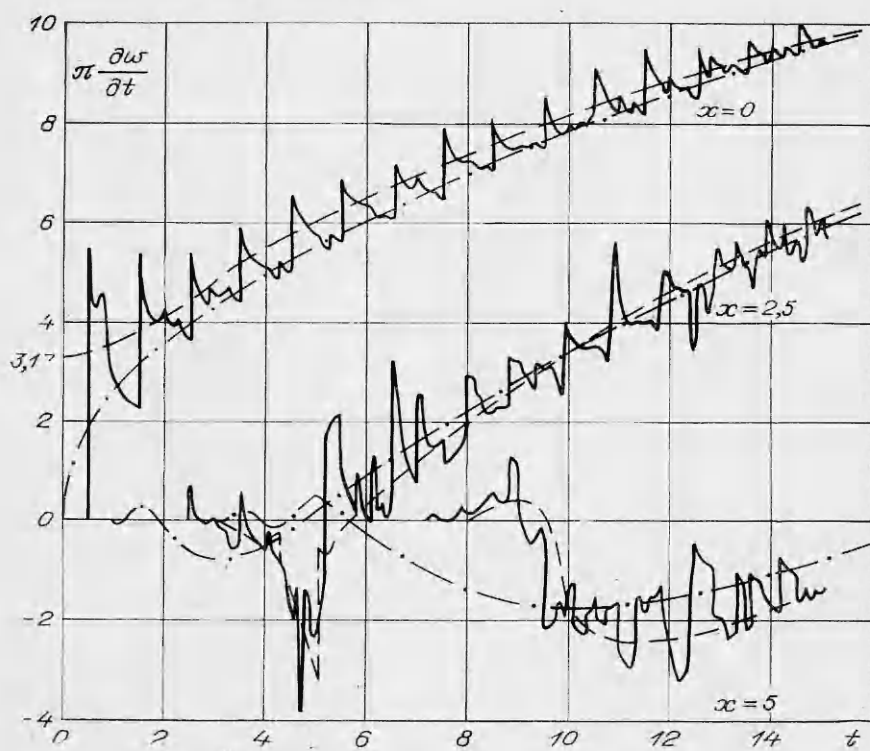
$$\begin{aligned} u(t, x, z) &= 3u_1(t, x)P_1(\xi) + 7u_3(t, x)P_3(\xi), \\ w(t, x, z) &= w_0(t, x)P_0(\xi) + 5w_2(t, x)P_2(\xi), \\ \xi &= 2z - 1, \quad 0 \leq z \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3

Уравнения изгибных деформаций пластины для выписанных в (2) членов при несамобалансированной нагрузке (1) имеют вид

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & L_1 u_1 - 2(1 - c_2^2) \frac{\partial w_0}{\partial x} - 4c_2^2 u(1) + 2(1 - 2c_2^2) \frac{\partial w(1)}{\partial x} = 0, \\
 & L_3 u_3 + 60c_2^2 u_1 - 2(1 - c_2^2) \frac{\partial w_0}{\partial x} - 10(1 - c_2^2) \frac{\partial w_2}{\partial x} - 24c_2^2 u(1) + \\
 & \quad + 2(1 - c_2^2) \frac{\partial w(1)}{\partial x} = 0, \\
 & L_2 w_0 + 2c_2^2 \frac{\partial u(1)}{\partial x} = 2\sigma_{zz}(t, x, 0), \\
 & L_2 w_2 + 12w_0 - 6(1 - c_2^2) \frac{\partial u_1}{\partial x} - 12w(1) + 2c_2^2 \frac{\partial u(1)}{\partial x} = 0, \\
 & u(1) = u(t, x, 1), \quad w(1) = w(t, x, 1).
 \end{aligned}$$

Здесь и далее L_i — оператор $c_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ($i = 0, \dots, 3$).

В зависимости от количества членов, удерживаемых в (2), получаются различные приближения уравнений теории упругости. Для каждого приближения возможно несколько вариантов аппроксимации решения.

Так, пренебрегая в (2) искривлением сечения и неравномерностью распределения прогиба по толщине ($u_3 = w_2 = 0$), получим первое приближение — систему уравнений четвертого порядка для u_1, w_0 с оператором (2.11) работы [1] — коротковолновую аппроксимацию решения. Уравнения позволяют описать быстро изменяющуюся часть решения, допуская погрешность при определении медленно изменяющейся составляющей.

Эти недостатки в значительной мере устранены в другом варианте первого приближения — уравнениях Тимошенко. Формальный их вывод заключается в том, что частично учитывается искривление сечений и изменение величины прогиба w по координате z ($u_2 \neq 0, w_2 \neq 0$), но пренебрегается во втором и четвертом уравнениях производными u_3 и w_2 [1]. Выразив отсюда u_3 и w_2 , после подстановки в первое и третье уравнения имеем

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & L_3 u_1 - 2c_0^2 \left(6u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0, \\
 & L_0 w_0 + 6c_0^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 2\sigma_{zz}(t, x, 0), \quad c_0 = \sqrt{\frac{5}{6}} c_2.
 \end{aligned}$$

Пренебрегая дополнительно продольной инерцией и сдвигом ($\partial^2 u_1 / \partial t^2 \sim 0, 6u_1 \sim -\partial w_0 / \partial x$), из системы (4) получим уравнение Бернулли — Эйлера

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{12}{c_3^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = -\frac{24}{c_3^2} \sigma_{zz}(t, x, 0), \\
 & c_3 = 2c_2 \sqrt{1 - c_2^2},
 \end{aligned}$$

где c_3 — скорость распространения продольных возмущений в пластине.

Из процедуры вывода уравнения Бернулли — Эйлера видно, что упрощения достигнуты в ущерб быстро изменяющейся части решения. Поэтому для описания начальной стадии движения сечений в момент первых вступлений волн уравнение (5) непригодно до тех пор, пока изгибные деформации не установятся.

Уравнения Тимошенко, таким образом, являются промежуточным вариантом — асимптотически совпадая с уравнением (5) для плавно развивающихся процессов, они сохраняют отчасти достоинства коротковолновой аппроксимации.

Аналогичная ситуация наблюдается при выводе различных вариантов второго приближения — системы уравнений шестого порядка. Удерживая величины u_1 , w_0 , w_2 и считая, что сечения при изгибе остаются плоскими ($u_3 = 0$), найдем из (3) коротковолновое приближение решения. Ему соответствует система уравнений шестого порядка

$$\begin{aligned} L_1 u_1 - 12c_2^2 u_1 - 2c_2^2 \frac{\partial w_0}{\partial x} + 10(1 - 2c_2^2) \frac{\partial w_2}{\partial x} &= 0, \\ L_0 w_0 + 6c_2^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 2\sigma_{zz}(t, x, 0), \\ L_2 w_2 - 60w_2 - 6(1 - 2c_2^2) \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

с оператором [1]

$$L_1 L_2^2 - 60 \left[L_2 \left(L_3 - \frac{1}{5} c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + 12c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right].$$

Эта система должна дать уже менее существенную погрешность в описании длинноволновой части решения. Асимптотика ее оператора для медленных процессов $\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{12}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ совпадает с оператором уравнения (5).

Другой вариант уточненных уравнений во втором приближении получается при условии $u_3 \neq 0$. Считается, что вторыми производными u_3 можно пренебречь по сравнению с абсолютной величиной $168c_2^2 u_3$. Это позволяет выразить u_3 из второго уравнения и исключить из оставшихся уравнений системы (3)

$$\begin{aligned} L_1 u_1 - 10c_2^2 u_1 - \frac{5}{3} c_2^2 \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{5}{3} (6 - 11c_2^2) \frac{\partial w_2}{\partial x} &= 0, \\ L_0 w_0 + 5c_2^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{5}{6} c_2^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} &= 2\sigma_{zz}(t, x, 0), \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + 60w_2 + \frac{1}{5} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + 6(1 - 2c_2^2) \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{2}{5} \sigma_{zz}(t, x, 0). \end{aligned}$$

После замены $u_1 = \psi_*/6$, $w_0 = u_* + \chi/60$, $w_2 = \chi/60$ получим уравнения (12)–(14) работы [4], выведенные вариационным способом.

Решение приведенных выше вариантов уравнений динамики пластин отыскивалось методом конечных разностей. Для уравнения (5) в качестве расчетной принята явная конечно-разностная схема. Соотношение между шагом по времени Δt и шагом по пространственной координате Δx определялось из условия устойчивости разностной схемы для уравнений параболического типа $\Delta t = (1/3/c_2)(\Delta x)^2$. При расчете полагалось $\Delta x = 0,1$. Так как $\varepsilon = 0,001$ в (1) мало и все изменение нагрузки происходит практически на одном шаге, значение $2\sigma_{zz}(t, x, 0)$ в правой части заменялось разностным аналогом дельта-функции — прямоугольником с высотой $1/2 \cdot \Delta x$ и основанием $2\Delta x$. В качестве граничных условий при $x = 0$ принималось отсутствие перерезывающей силы и равенство нулю первой производной w_0 из-за симметрии прогиба относительно нулевого сечения. На бесконечности ($x = 600 \Delta x$) приравнивались нулю прогиб и момент — вторая производная w_0 .

При выборе расчетной схемы для остальных вариантов приближенных уравнений предпочтение было также отдано явной разностной схеме

типа «крест». Сравнение ее с неявной схемой показало, что интегрирование уравнений по явной схеме в некоторых случаях обладает преимуществами.

Отметим, что при интегрировании приближенных уравнений выделялась разрывная часть решения по способу, разработанному авторами работы [9]. Делалось это для того, чтобы уменьшить специфические эффекты дискретной модели среды, проявляющиеся в размазывании разрывов при расчете разрывных решений гиперболических уравнений. При исследовании прифронтной асимптотики решений систем (4), (6) оказалось, что u_1 всегда имеет разрыв первого рода во вторых производных на первом и втором фронтах. Производная w_0 имела во всех случаях скачок лишь на втором фронте. Представив решение в виде суммы разрывной и гладкой частей, получим неоднородные системы для определения значений гладких (вплоть до второй производной) функций u^* , w^* , v^*

$$u^* = u_1 - u_p, \quad w^* = w_0 - w_p, \quad v^* = w_2 - v_p.$$

Здесь разрывные слагаемые u_p , w_p , v_p имеют следующий вид: для системы (4)

$$u_p = - \frac{0,5 \operatorname{sgn}(x)}{c_3^2(c_3^2 - c_0^2)} [c_3^2(c_0 t - |x|)^2 \delta_0(c_0 t - |x|) - c_0^2(c_3 t - |x|)^2 \delta_0(c_3 t - |x|)],$$

$$w_p = 0,5 c_0^{-2} (c_0 t - |x|) \delta_0(c_0 t - |x|);$$

для системы (6)

$$u_p = - \frac{0,5 \operatorname{sgn}(x)}{1 - c_2^2} [(c_2 t - |x|)^2 \delta_0(c_2 t - |x|) - c_2^2(t - |x|)^2 \delta_0(t - |x|)],$$

$$w_p = 0,5 c_2^{-2} (c_2 t - |x|) \delta_0(c_2 t - |x|).$$

Считалось, что при $x = 0$ для составляющих u^* , w^* отсутствует поворот сечения и перерезывающая сила

$$u^* = \partial w^* / \partial x = 0 \quad (x=0).$$

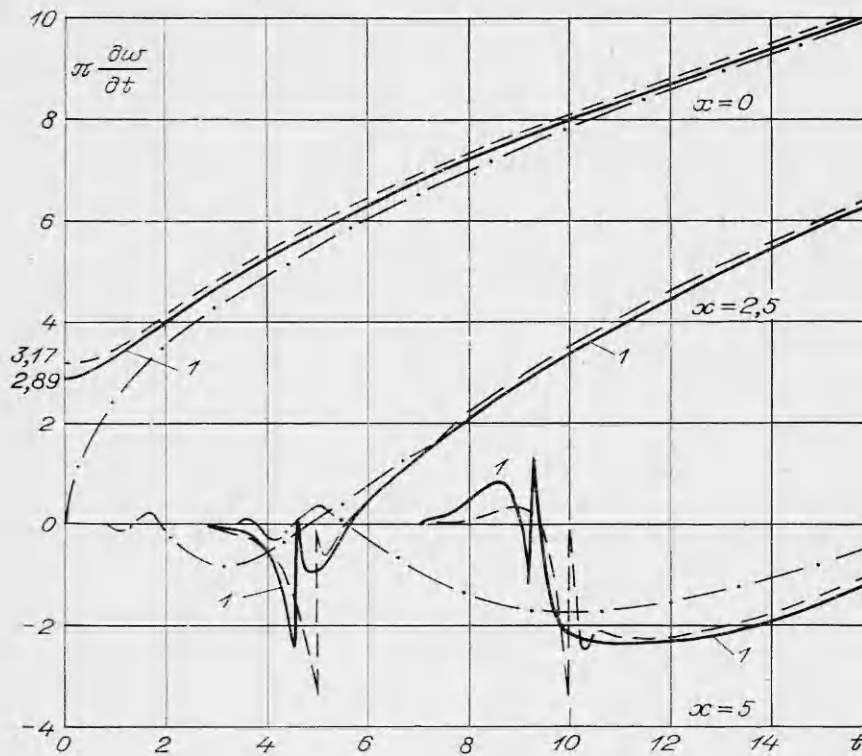
Третье условие для системы 6-го порядка (6) вытекает из симметрии составляющей прогиба v^* относительно нулевого сечения

$$\partial v^* / \partial x = 0 \quad (x = 0).$$

Перед фронтом $x = t$ (для уравнений Тимошенко $x = c_3 t$) равны нулю смещения

$$u^* = w^* = v^* = 0.$$

Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 1—4. Решению уравнения Бернулли — Эйлера соответствует штрихпунктирная кривая, уравнениям Тимошенко — штриховая ($\Delta t / \Delta x = 0,1$, $\Delta x = 0,025$), кривая I — решение системы (6) ($\Delta t / \Delta x = 0,999$, $\Delta x = 0,05$).



Фиг. 4

Напряженные состояния в сечении слоя $x=0$, рассчитанные по приближенным теориям и найденные из уравнений теории упругости, заметно отличаются. Здесь приближенные уравнения правильно описывают лишь средние по сечению напряжения (перерезывающую силу, изгибающий момент), но распределение напряжений отличается от «точного» из-за его существенной неравномерности по z . Намного лучше приближенные уравнения описывают напряженное состояние в других сечениях. В качестве иллюстрации на фиг. 1 приведено распределение касательного напряжения вдоль оси x в срединной плоскости слоя $z=0,5$ в момент времени $t=10$. Видно, что наиболее удачно аппроксимируют решение теории упругости уравнения Тимошенко (штрих) в области $x < c_R t$ (c_R — величина рэлеевской скорости) за исключением некоторой окрестности $x=0$. Уравнение (5) допускает большую погрешность в описании характера вступления фронта сдвиговой волны. Уравнение (6) (кривая 1) определяет напряжения сдвига, отличные от теории Тимошенко. Связано это с тем, что в этом приближении распределение напряжения сдвига по сечению слоя не параболическое, а близкое к постоянному

$$\sigma_{xz} = c_2^2 \left[6u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} + 5 \frac{\partial w_2}{\partial x} (6z^2 - 6z + 1) \right],$$

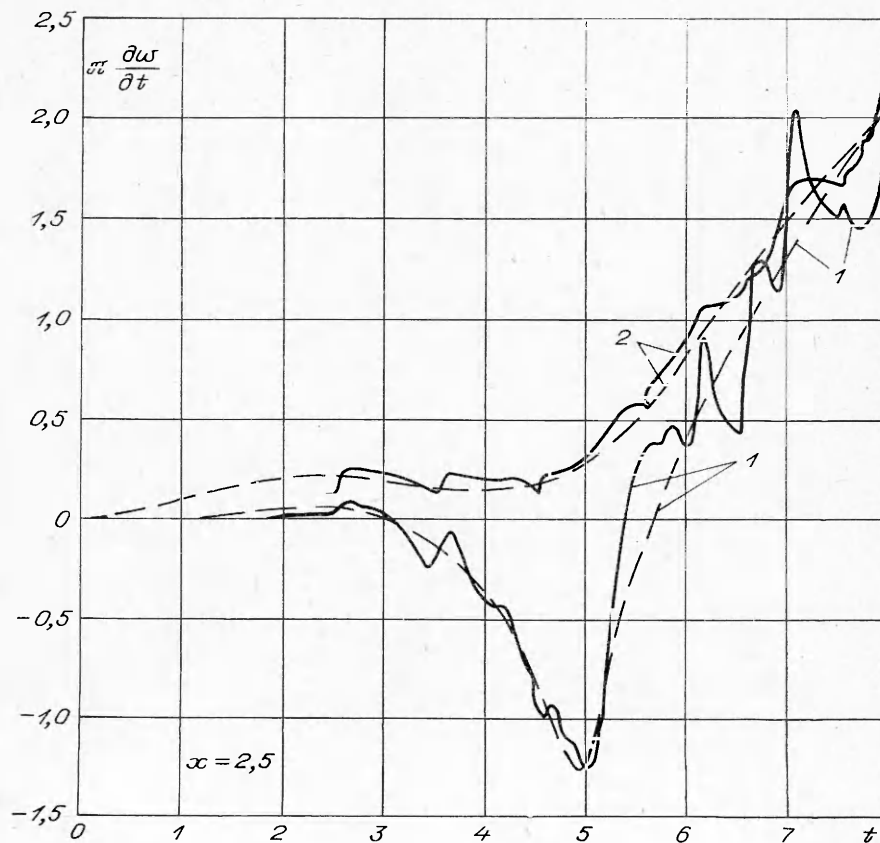
$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial v^*}{\partial x} = 0 \quad (x=0).$$

Средние по сечению значения σ_{xz} в окрестности $x=0$ по обеим теориям отличаются незначительно. В окрестности $x=c_2 t$ ($5,2 < x < 6,4$)

уравнение (6) лучше, чем уравнения Тимошенко, определяет напряжения сдвига.

На фиг. 2 показано изменение σ_{xx} во времени в сечении $x = 2,5$ на поверхности $z = 0$, где приложена нагрузка. Величина x/c_R на оси отмечает время прихода рэлеевской волны. Хорошо видно, насколько велико вначале отклонение в ходе кривых, определяемых уравнением Бернулли — Эйлера (5) и теорией упругости. Теория Тимошенко и уточненные уравнения удачно описывают изменение напряжения во всем интервале времени. Некоторое отклонение решения уравнения (5) при больших t обусловлено тем, что напряжение σ_{xx} на поверхности $z = 0$ еще не установилось. Когда оно становится сжимающим, решения систем уравнений (4), (6) выходят на асимптотику, определяемую уравнением (5).

Фиг. 3 дает представление о развитии во времени скорости прогиба срединной плоскости слоя $z = 0,5$ в сечениях $x = 0; 2,5; 5$. Особенностью в движении сечений, удаленных от нулевого, является отрицательная фаза, наблюдаемая вначале. Затем довольно быстро скорость становится положительной и асимптотически растет как $\sqrt{t}$. При этом решение теории упругости колеблется около значений скорости, определяемых приближенным уравнением (5), с частотой, примерно равной $\omega = 2\pi c/h$. Неучет сдвига и продольной инерции в уравнении Бернулли — Эйлера сказывается в более раннем движении сечений $x = 2,5; 5$ (см. фиг. 3). Это опережение вначале приводит к значительным различиям. Уравнения Тимошенко (штрих) неплохо передают характер вступления возмущений.



Фиг. 5

Решение по уточненным уравнениям (6) имеет отличие от уравнений Тимошенко лишь в момент прихода возмущений (кривая 1, фиг. 4). Затем они быстро сближаются.

При «сглаживании» нагрузки решение уравнений Тимошенко лучше совпадает с решением теории упругости. В качестве примера на фиг. 5 приведены результаты расчетов для нагрузок (1), более плавно распределенных вдоль оси x . Изменение сигнала во времени задается по-прежнему функцией Хевисайда $\delta_0(t)$. Кривые 1, 2 показывают зависимость скорости прогиба от времени в точке $x = 2,5$ в срединной плоскости слоя для $\varepsilon = 0,1$ и $0,5$ соответственно. Видно, что даже в этом малом диапазоне изменения t уравнения Тимошенко (штрих) уже хорошо описывают движение этой точки. Чем плавнее нагрузка, тем меньше отличия от точного решения.

Проведенный в работе анализ позволяет заключить, что уравнения Тимошенко неплохо описывают реакцию слоя на действие внешних изгибных нагрузок. Они практически точно передают характер движения сечений слоя и распределение искомых величин по сечению, если нет необходимости в учете частот, сравнимых или более высоких, чем $2\pi c_1/h$. Существенные отклонения наблюдаются лишь в небольшой окрестности сечения, где приложена локальная нагрузка. Здесь достоверные результаты можно получить лишь для скорости прогиба. Привлечение уточненных вариантов уравнений пластин для описания высокочастотных составляющих решения теории упругости мало эффективно.

Автор выражает благодарность Л. И. Слепяну и М. В. Степаненко за обсуждения и советы по данной работе.

Поступила 6 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В., Слепян Л. И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
2. Селезов И. Т. Дослідження поперечних коливань пластин.— ПМ, 1960, т. 6, вып. 3.
3. Нигул У. К. Сопоставление результатов анализа волновых процессов в оболочках и пластинках по теории упругости и приближенным теориям.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
4. Бердичевский В. Л. Об уравнениях, описывающих поперечные колебания тонких упругих пластин.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1972, № 6.
5. Бердичевский В. Л. К динамической теории тонких упругих пластин.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1973, № 6.
6. Нигул У. К. Применение трехмерной теории упругости к анализу волнового процесса изгиба полубесконечной плиты при кратковременно действующей краевой нагрузке.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
7. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
8. Сарайкин В. А. Расчет нестационарных упругих волн в изотропном слое.— ПМТФ, 1973, № 4.
9. Векслер Н. Д., Мянник А. И., Нигул У. К. Применение метода сеток в теории типа Тимошенко для исследования переходных процессов деформации плит конечных размеров.— ПМ, 1965, т. 1, вып. 12.