

О ФОРМАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ УДАРЕ

В. М. Корнев (Новосибирск)

При действии на упругие системы нагрузок большой интенсивности, значительно превышающих первое критическое значение, наибольшей скоростью роста прогибов обладает собственная форма, отличная от первой [1]. Если рассматриваются такие нагрузки, естественно ожидать, что на характер движения может оказать существенное влияние волновой процесс, вызванный внезапным приложением нагрузки к упругой системе [2,3].

Асимптотическое исследование процесса выпучивания упругого шарнирно опертого стержня с начальной неправильностью при ударе при использовании разложения по собственным формам потери устойчивости на переменном интервале [4] позволяет избавиться от предположения, что возмущения, соответствующие различным формам, имеют одинаковый порядок малости. Дается упрощенный метод определения искривленной формы стержня при ударе как системы с «одной» степенью свободы. Эта форма весьма похожа на форму, полученную в экспериментах при ударном сжатии стержней [3]. Рассматривается упругий трехслойный стержень при ударе, а также однородное кольцо при специфических условиях нагружения.

1. Система уравнений, учитывающая взаимное влияние продольных и поперечных колебаний упругого однородного стержня с начальной неправильностью, имеет вид [5]

$$EIw_{,xxxx} + EF(u_{,x}w_{,x})_{,x} + \rho Fw_{,tt} = f(x, t) \quad (1.1)$$

$$u_{,xx} = \rho E^{-1}u_{,tt} \quad (1.2)$$

Здесь w , u — нормальное и продольное перемещения сечений стержня; x , t — продольная координата и время; E — модуль Юнга; I , F — изгибная жесткость и площадь сечения, постоянные вдоль оси стержня; ρ — плотность материала; $f(x, t)$ — функция, определяемая начальными возмущениями или несовершенствами.

Рассмотрим шарнирно опертый стержень длины l_0 ($0 \leq x \leq l_0$). Опора, к которой в момент $t = 0$ прикладывается нагрузка N_0 , значительно превышающая критическую нагрузку Эйлера P_e^0 , перемещается безынерционно. Условия закрепления на другом конце можно не рассматривать, если ограничиться изучением выпучивания стержня до момента

$$t \leq t_0, \quad t_0 = l_0 / c, \quad c = (E / \rho)^{1/2}$$

Здесь c — скорость звука в материале стержня.

Уравнение (1.2) определяет нагрузку N , действующую вдоль стержня

$$N = N_0 \quad (x < ct), \quad N = 0 \quad (x \geq ct) \quad (1.3)$$

Уравнение (1.1) принимает вид

$$EIw_{,xxxx} + Nw_{,xx} + \rho Fw_{,tt} = f(x, t) \quad (0 \leq x \leq l_0) \quad (1.4)$$

Как известно, изгибные возмущения, определяемые уравнением (1.1) при $x > ct$, несущественны. Пренебрежем ими. Примем кроме того, что

$$f(x, t) \equiv 0 \quad (x > ct)$$

Краевые условия для (1.4) на переменном интервале [4]

$$w = w_{,xx} = 0 \quad (x = 0), \quad w = w_{,x} = 0 \quad (x = l = ct)$$

Начальные условия для того же уравнения нулевые

$$w = w_{,t} = 0 \quad (t = 0)$$

Легко установить, что асимптотика собственных форм потери устойчивости имеет вид ($m \rightarrow \infty$)

$$W_m(x) = \sin(m\pi x / l) \quad (x < l), \quad W_m(x) = 0 \quad (x \geq l) \quad (1.5)$$

Эта асимптотика — собственные формы потери устойчивости шарнирно опертого стержня

$$w = w_{,xx} = 0 \quad (x = 0, x = l)$$

Находим асимптотическое решение (1.4)

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) W_m(x)$$

Используя условие ортогональности $W_m(x)$ на переменном интервале, получаем для $q_m(t)$ обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами (второстепенные члены опущены)

$$\rho F q_m'' + (\pi/l)^4 E I m^2 (m^2 - \eta^2) q_m = f_m(t) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

Здесь

$$l = ct, \quad \eta^2 = \frac{N}{P_e}, \quad P_e = \frac{\pi^2 E I}{l^2}, \quad f_m(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{m\pi x}{l} dx$$

При $t = t_0$

$$\eta_0^2 = \frac{N_0}{P_0}, \quad P_0 = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2}, \quad f_m^0 = \frac{2}{l_0} \int_0^{l_0} f(x) \sin \frac{m\pi x}{l_0} dx$$

Пусть хотя бы один член разложения f_m^0 не равен нулю, когда $i < \eta_0$. Тогда $f_m(t) = 0$, если ct/m кратно l_0/i ; в любой другой момент времени $f_m(t) \neq 0$ (см. (1.6)), а потому при $t = t_0$ для всех m $q_m(t_0) \neq 0$, $q_m'(t_0) \neq 0$. Следовательно, если пренебречь отражением от опоры $x = l_0$ при $t > t_0$ «наиболее быстро меняются те формы, которым соответствует наибольший коэффициент в показателе экспонент функции времени, относящейся к соответствующему движению» [1]. Таким образом, при рассмотрении движения стержня с учетом конечности продольной скорости деформации излишне предположение о том, что начальные возмущения, соответствующие различным статическим формам потери устойчивости, имеют одинаковый порядок малости.

Исследуем уравнение (1.6). Коэффициент перед вторым членом в зависимости от номера уравнения и приложенной нагрузки N_0 может быть положительным, отрицательным и равным нулю; в первом случае имеем колебания, а во втором и третьем — потерю устойчивости. При потере устойчивости этот коэффициент имеет максимум, когда

$$l^* = l/m = \sqrt{2} l_0 / \eta_0$$

Отметим, что для заданного стержня при определенной сжимающей нагрузке $l^* = \text{const}$. Эта длина волны l^* не зависит от номера уравнения (1.6).

Введем преобразование координат для уравнения (1.4)

$$x = x, \quad \tau = t - x/c$$

Пространственная координата не претерпела изменения, временная преобразована так, что превратилась в истинное время действия сжимающей нагрузки в фиксированном сечении по длине стержня. Уравнение (1.4) в новых координатах

$$EI(\cdot)_{,x} - c^{-1}(\cdot)_{,\tau}^2 w + N[(\cdot)_{,x} - c^{-1}(\cdot)_{,\tau}]^2 w + \rho F w_{,\tau\tau} = f(x, \tau) \quad (1.7)$$

Ниже будет показано, что вторыми членами в квадратных скобках можно пренебречь по сравнению с первыми. Опустим эти второстепенные члены. Упрощенное уравнение (1.7) по виду совпадает с (1.4). Принимая во внимание, что максимум роста прогибов приходится на длину волны потери устойчивости l^* , построим асимптотическое решение упрощенного уравнения (1.7) как системы с «одной» степенью свободы

$$w(x, \tau) = Q(\tau) W^*(x), \quad W^*(x) = \sin \frac{\pi x}{l^*} \quad (0 \leq x \leq l), \quad W^*(x) = 0 \quad (x > l) \quad (1.8)$$

После подстановки (1.8) в это уравнение для $Q(\tau)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, причем начальные условия нулевые,

$$Q''(\tau) - n^2 Q(\tau) = a^*, \quad n^2 = EI(\rho F)^{-1} (\pi/l^*)^4 \quad (1.9)$$

если предположить, что правая часть уравнения имеет вид

$$f(x, \tau) = a^* \rho F \sin(\pi x / l^*) \quad (0 \leq x \leq \alpha_0 = \text{const})$$

Решение (1.9)

$$Q(\tau) = (a^* / n^2) (\text{ch } n\tau - 1)$$

Перейдем к старым координатам. Асимптотическое решение уравнения (1.4) как системы с «одной» степенью свободы в фиксированный момент времени t_1 ($\alpha_0/c \leq t_1 \leq t_0$)

$$w(x, t_1) = \frac{a^*}{n^2} \left[\text{ch} \left(nt_1 - \frac{nx}{c} \right) - 1 \right] \sin \frac{\pi x}{l^*} \quad (0 \leq x < ct_1) \quad (1.10)$$

$$w(x, t_1) = 0 \quad (x \geq ct_1)$$

Рост прогибов стержня наиболее интенсивно происходит с определенной длиной волны, причем соседние волны растут как бы независимо, каждой соответствует свое среднее время действия нагрузки (среднее истинное время), а их максимумы (минимумы) убывают от торца, по которому произведен удар, по экспоненте.

Замечание. Если скорость распространения продольных возмущений по стержню переменна $c = c(x)$, то преобразование координат выбирается в виде

$$x = \xi, \quad \tau = t - \int_0^x \frac{d\xi}{c(\xi)}$$

Остальные рассуждения остаются в силе.

Оценим порядок погрешности, получившейся при отбрасывании второстепенных членов в (1.7). Второй член в квадратных скобках мал по сравнению с основным, если

$$r/l^* \ll 1$$

Здесь r — радиус инерции сечения стержня. Этому же условию можно придать вид $N/F \ll E$, т. е. длина волны потери устойчивости должна быть значительно больше радиуса инерции, а напряжения значительно меньше модуля упругости — условие применимости уравнений (1.1), (1.2).

Полученное решение (1.10) хорошо согласуется с экспериментальными результатами [3]. Упругая линия длинного стержня при ударном сжатии фиксировалась в экспериментах скоростной кинокамерой.

Отметим, что при бесконечно большой скорости распространения напряжений ($c \rightarrow \infty$ в (1.10)) стержень можно рассматривать как систему с одной степенью свободы, причем этой степени соответствует максимум показателя в экспоненте [1].

2. Система уравнений, аналогичная (1.1) и (1.2), для трехслойного стержня с начальной неправильностью [6]

$$EI(\chi - \Phi h^2 \beta^{-1} \chi_{,xx}),_{xxxx} + EF(u, x^w, x)_{,x} + \rho F w_{,tt} = f(x, t) \quad (2.1)$$

$$u_{,xx} = \rho E^{-1} u_{,tt} \quad (2.2)$$

Нормальное смещение w сечений стержня определяется через функцию χ

$$w = \chi - h^2 \beta^{-1} \chi_{,xx}$$

Здесь E — приведенный модуль Юнга всего сечения; I — изгибная жесткость трехслойного пакета, суммарная толщина которого h ; Φ и β — коэффициенты, характеризующие изгибную жесткость несущих слоев и податливость заполнителя на сдвиг, причем Φ меняется в пределах $0 \leq \Phi \leq 1$; ρ — приведенная плотность на единицу длины стержня; остальные обозначения прежние. Заметим, что рассматриваются стержни, для которых $h/l_0 \ll 1$.

В момент $t = 0$ к шарнирно опертому трехслойному стержню приложена нагрузка N_0 , значительно превышающая критическую нагрузку Эйлера P_e^0 . Нагрузка N , действующая вдоль стержня, определяется формулами (1.3), причем скорость звука вдоль трехслойного стержня $c = (E/\rho)^{1/2}$ может быть значительно меньше, чем в однородных конструкциях, из-за приведенных плотности и модуля Юнга.

Уравнение (2.1) принимает вид

$$EI(\chi - \Phi h^2 \beta^{-1} \chi_{,xx}),_{xxxx} + N(\chi - h^2 \beta^{-1} \chi_{,xx}),_{xx} + \rho F(\chi - h^2 \beta^{-1} \chi_{,xx}),_{tt} = f(x, t) \quad (0 \leq x \leq l_0) \quad (2.3)$$

Начальные условия для (2.3) нулевые, а краевые условия на переменном интервале

$$\chi = \chi_{,xx} = \chi_{,xxxx} = 0 \quad (x = 0)$$

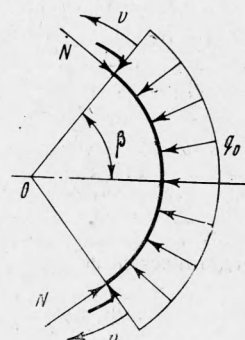
$$\chi_{,x} = \chi_{,xxx} = \chi - h^2 \beta^{-1} \chi_{,xx} = 0 \quad (x = l = ct)$$

Асимптотика собственных форм потери устойчивости остается прежней (1.5). Для достаточно большого номера m уравнение (2.3) значительно упрощается

$$(\Phi EI \chi_{,xxxx} + N \chi_{,xx} + \rho F \chi_{,tt}),_{xx} = -h^{-2} \beta f(x, t)$$

Получился разобранный выше случай. Таким образом, трехслойный стержень при действии нагрузок большой интенсивности ведет себя как однородный, у которого жесткость на изгиб ΦEI .

3. Рассмотрим выпучивание кольца под действием симметричной нагрузки q . Нагрузка, имеющая большую интенсивность, приложена в момент $t = 0$ к покоящемуся кольцу (фронт нагрузки перемещается со скоростью v , превышающей скорость



звука в материале кольца $c = (E / \rho)^{1/2}$

$$q(\beta, t) = q_0 (-vt / R \leq \beta \leq vt / R) \\ q(\beta, t) = 0 (-\pi \leq \beta < -vt / R, vt / R < \beta \leq \pi)$$

Предположим, что кольцо под действием нагрузки q обжимается безынерционно (см. фигуру). Тогда уравнение, описывающее движение кольца с начальной неправильностью, имеет вид

$$EIR^{-4}w_{,\beta\beta\beta\beta} + NR^{-2}w_{,\beta\beta} + \rho Fw_{,tt} = f(\beta) \quad (N = qR) \quad (3.1)$$

Так как изучается действие нагрузок большой интенсивности, то $N_0 = q_0 R \gg P_e^\circ$. Уравнение (3.1) рассматриваем на переменном интервале, см. п. 1. Система с бесконечным числом степеней свободы подменяется системой с «одной» степенью свободы, но на переменном интервале.

В фиксированный момент времени $t_1 (0 \leq t_1 \leq t_0, t_0 = \pi R / v)$ асимптотическое представление формы выпученного кольца как системы с «одной» степенью свободы

$$w(\beta, t_1) = \frac{a^*}{n^2} \left[\operatorname{ch} \left(nt_1 - \frac{nl_0\beta}{\pi v} \right) - 1 \right] \cos \frac{\beta l_0}{l^*} \quad \left(0 \leq \beta < \frac{vt}{R} \right) \\ w(\beta, t_1) = 0 \quad (\beta \geq vt_1 / R) \quad (3.2)$$

Эта формула, если учесть, что $\pi x = l_0 \beta$, отличается от (1.10) только наличием $\cos(\beta l_0 / l^*)$ вместо $\sin(\pi x / l^*)$, что обусловлено симметрией нагружения. Предельный переход при $v \rightarrow \infty$ для (3.2) остается в силе.

Поступила 27 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 6.
2. Вольмир А. С., Кильдибеков И. Г. Исследование процесса выпучивания стержней при ударе. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 4.
3. Малышев Б. М. Устойчивость стержней при ударном сжатии. Инж. ж., МТТ, 1966, № 4.
4. Слепьян Л. И. Исследование нестационарных деформаций с помощью рядов, определенных на переменном интервале. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
5. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
6. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Теория упругих трехслойных конструкций в нелинейной постановке. В сб. Расчеты элементов авиационных конструкций, М., Машиностроение, 1965, вып. 4, стр. 99—133.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ КАБЕЛЯ ПОТОКОМ НЕЙТРОНОВ И γ -КВАНТОВ

Р. М. Зайдель (Москва)

Рассмотрено влияние ионизирующих излучений на формирование электрического импульса между обкладками кабеля.

1. Возникновение электрического поля в диэлектрике под действием нейтронов и γ -квантов объясняется в основном поляризацией среды [1-5]. Для нахождения возникающей при этом разности потенциалов между оплеткой и жилой коаксиального кабеля рассмотрим вначале статическую задачу, когда все величины не зависят от времени.

Пусть диэлектрик с проницаемостью ε заполняет пространство между двумя концентрическими проводящими окружностями радиусов $r_1 < r_2$ (фиг. 1). Внутренняя металлическая жила ($0 < r < r_1$) заштрихована наклонными линиями. Наружную металлическую оплетку ($r = r_2$) считаем достаточно тонкой, чтобы можно было не учитывать поглощения в ней потока нейтронов и γ -квантов, падающих на кабель слева, перпендикулярно его оси.

Обозначим через δ средний пробег комптоновских электронов в диэлектрике в направлении полета γ -кванта. В том месте, где был выбит электрон, останется положительный ион. Образовавшийся электрический диполь имеет дипольный момент с компонентами $p_x = -e_0 \delta$; $p_y = 0$, где e_0 — абсолютная величина заряда электрона.

При облучении нейтронами из атомов будет выбиваться протон отдачи, который вместе с отрицательно заряженным ионом образует диполь обратного знака $p_x = e_0 \Delta$, $p_y = 0$, причем Δ — пробег протона отдачи. В дальнейшем будем рассматривать только влияние γ -квантов, имея в виду, что эффект нейтронного облучения можно получить изменением знака и заменой δ на Δ .