УДК 536.46

К. О. Сабденов, С. Н. Постников

К ТЕОРИИ ЛАМИНАРНОГО ПЛАМЕНИ

(сообщение I)

Сформулирована отличная от существующей форма теории ламинарного пламени. Предложен приближенный метод нахождения аналитических решений задач теории ламинарного пламени. Рассмотрена задача с нулевым порядком химических реакций. Выведено (первое) уравнение температурного погранслоя. Установлена связь между пределами распространения пламени и стационарным тепловым взрывом в бесконечном цилиндре радиуса 2.

Основная задача теории ламинарного пламени — нахождение нормальной скорости его распространения. В хорошем приближении эта задача решена в работах Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого и подробно изложена в [1], где выражение для скорости пламени получено без расчета температурного и концентрационного профилей. Последнее обстоятельство не позволяет в рамках существующей теории рассматривать задачи, где требуется знание профилей температуры $T(x)$ и концентрации $a(x)$.

В предлагаемой работе излагается несколько иной подход к теории ламинарного пламени. Он достаточно прост и последователен, хотя и изобилует громоздкими математическими выкладками. Помимо выражения для нормальной скорости пламени, здесь получаются температурный и концентрационный профили в явном аналитическом виде либо в квадратурах.

Перейдем к рассмотрению задачи. Так как основные уравнения теории ламинарного пламени — это уравнения сохранения количества вещества, теплопроводности, диффузии и состояния (газ можно считать идеальным), задача ставится следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} &\rho v c_p \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) + QW(a,\ T) = 0, \\ &\rho v \frac{da}{dx} + \frac{d}{dx}\left(D\rho \frac{da}{dx}\right) - W(a,\ T) = 0, \\ &\rho v = \text{const}, \quad \rho T = \text{const}. \end{aligned} \tag{1}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} &x \to +\infty\colon\ T = T_0,\ a = a_0, \\ &x \to -\infty\colon\ T = T_b,\ a = 0. \end{aligned}$$

Обозначения общепринятые, система координат связана с фронтом пламени. Здесь и далее привлекаются следующие зависимости коэффициента теплопроводности λ и диффузии D: $\lambda \sim T$, $D \sim T^2$, известные из кинетической теории газов.

Согласно рекомендации Я. Б. Зельдовича, при записи скорости тепловыделения за счет химических реакций введем температуру «обрезания» T_* (и для простоты возьмем $T_* = T_0$) для существования стационарного решения (очевидно, оно будет неустойчивым):

$$W(a,\ T) = \rho k_0 a^u e^{-\frac{E}{R(T-T_0)}}.$$

Задачи в излагаемом подходе решаются методом, суть которого заключается в выполнении преобразования Франк-Каменецкого с масштабным профилем (функция, а не число!) — михельсоновским и масштабным преобразованием независимой переменной. Рассмотрим простейший пример химической реакции нулевого порядка. Тогда, для решения задачи вместо системы (1) достаточно рассмотреть только уравнение теплопроводности

$$\rho v c_p \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) + Q\rho k_0 e^{-\frac{E}{R(T-T_0)}} = 0,$$

которое в результате обезразмеривания (и одновременного перехода к лагранжевым координатам)

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_b - T_0}, \quad \xi = \frac{v c_p}{\lambda} \int\limits_0^x \rho dx'$$

и введении малого параметра $\beta = R(T_b - T_0)/E$ примет вид:

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + \frac{d\Theta}{d\xi} + Le^{-\frac{1}{\beta\Theta}} = 0, \tag{2}$$

$$L = \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{k_0}{v^2} a_0$$

с граничными условиями:

$$\begin{gathered} \xi = 0: \qquad \Theta = 1, \ \frac{d\Theta}{d\xi} = 0 \\ \xi \to +\infty: \ \Theta = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Решение задачи (2), (3) будем искать в виде

$$\Theta(\xi) = e^{-\xi} + u(\xi),$$

где $u(\xi)$ — новая неизвестная функция, отвечающая за отклонение температуры от михельсоновского профиля.

Обобщенное преобразование Франк-Каменецкого дает

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi} + Le^{-\frac{1}{\beta}e^{\xi}} e^{\frac{e^{2\xi}}{\beta}u} = 0. \tag{4}$$

Вновь вводя новую функцию

$$V(\xi) = \frac{e^{2\xi}}{\beta} u(\xi),$$

вычислим:

$$\frac{du}{d\xi} = -2\beta e^{-2\xi}V + \beta e^{-2\xi}\frac{dV}{d\xi},$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = 4\beta e^{-2\xi}V - 4\beta e^{-2\xi}\frac{dV}{d\xi} + \beta e^{-2\xi}\frac{d^2V}{d\xi^2}.$$

Подстановка этих соотношений в уравнение (4) дает

$$\beta e^{-2\xi}\frac{d^2V}{d\xi^2} - 3e^{-2\xi}\beta\frac{dV}{d\xi} + 2\beta e^{-2\xi}V + Le^{-\frac{1}{\beta}e^{\xi}} e^{V} = 0. \tag{5}$$

Сделаем масштабное преобразование независимой переменной

$$p = e^{\frac{1}{\beta}(e^{\xi}-1)}, \quad \xi = \ln(1 + \beta \ln p).$$

Смысл его очевиден: оно «расстягивает» зону химических реакций, которая пропорциональна β, что позволяет свести уравнение теплопроводности к уравнению типа погранслоя. Так как

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{dV}{dp}\frac{e^{\xi}}{\beta}p$$

и

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} = \frac{d^2V}{dp^2}\frac{e^{2\xi}}{\beta^2}p^2 + \frac{dV}{dp}\frac{e^{2\xi}}{\beta^2}p\left(1 + \beta e^{-\xi}\right),$$

то уравнение (5) перепишется следующим образом:

$$\beta e^{-2\xi}\left[\frac{d^2V}{dp^2}\frac{e^{2\xi}}{\beta^2}p^2 + \frac{dV}{dp}\frac{e^{2\xi}}{\beta^2}p\left(1+\beta e^{-\xi}\right)\right] - 3e^{-2\xi}\beta\frac{dV}{dp}\frac{e^{\xi}}{\beta}p + 2\beta e^{-2\xi}V +$$

$$+ Le^{-\frac{1}{\beta}}\frac{e^V}{p} = 0$$

или после простых преобразований

$$p^3\frac{d^2V}{dp^2} + p^2\frac{dV}{dp}\left(1-2\beta e^{-\xi}\right) + 2\beta^2 pe^{-2\xi}V + \delta e^V = 0.$$

Пренебрегая вторым членом в скобке и членом, пропорциональным β^2, приходим к уравнению

$$p^3\frac{d^2V}{dp^2} + p^2\frac{dV}{dp} + \delta e^V = 0$$

$\left(\text{где } \delta = L\beta e^{-\frac{1}{\beta}}\right)$, которое является уравнением температурного погранслоя (назовем его первым уравнением температурного погранслоя). Далее, введением новой независимой переменной $y = 2/\sqrt{p}$, сводим его к уравнению стационарного теплового взрыва для цилиндрического сосуда с радиусом, равным 2. Общая постановка задачи в этом случае приобретает вид

$$\frac{d^2V}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{dV}{dy} + \delta e^V = 0. \tag{6}$$

Граничные условия:

$$y = 2:\ V = 0,\ \frac{dV}{dy} = -1, \tag{7}$$

$$y \to 0:\ V \text{ — ограничено.} \tag{8}$$

Если граничные условия (7) непосредственно вытекают из (3), то условие (8) далеко не очевидно и его объяснение будет дано ниже.

Общее решение уравнения (6) известно [1] и имеет вид:

$$V = \ln\frac{C_1}{y^2\,\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{\frac{C_1\delta}{2}}\cdot\ln y - C_2\right)}. \tag{9}$$

Использование условий (7) дает $C_1 = 4$, $C_2 = \sqrt{2\delta}\cdot\ln 2$. Так как при $y \to 0$

$$V \approx \ln 4\left(\frac{2}{y}\right)^{2(1-\sqrt{2\delta})},$$

то для выполнения (8) необходимо, чтобы $\delta = 1/2$. Это равенство и определяет нормальную скорость распространения пламени (вообще оно дает выражение для скорости газа в каждой точке пространства и является переменной величиной):

$$v_n^2 = 2\frac{\lambda_b}{c_p\rho_b}\frac{R(T_b-T_0)}{E}k_0a_0e^{-\frac{E}{R(T_b-T_0)}}.$$

Поскольку параметр δ есть собственное значение задачи (6)—(8), то более логично было бы определять поток $j = \rho v$, который тоже постоянен и однозначно связан с δ. Это вопрос чисто математический, и для реакции нулевого порядка и порядка меньше единицы он несуществен. Но для реакции с $n \geqslant 1$ последнее замечание было бы существенно, так как в этом случае реакция кончалась бы в бесконечно удаленной точке.

Распределение температуры определяется выражением

$$\Theta = e^{-\xi} + 2\beta e^{-2\xi} \ln \frac{2p}{p+1} \quad \text{при} \quad \xi \geqslant 0,$$
$$\Theta = 1 \quad \text{при} \quad \xi < 0,$$

где $p = e^{1/\beta \cdot (e^{\xi} - 1)}$. Чтобы решение существовало, при постановке задачи ввели температуру «обрезания», поэтому необходимо сделать замену $\frac{R(T_b - T_0)}{E} \to \frac{RT_b}{E}$, что соответствует «промежуточной» асимптотике.

Обоснуем теперь граничное условие для V при $y \to 0$. Подстановка полученных C_1 и C_2 в (9) дает

$$V = \ln \frac{p}{\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\frac{\delta}{2}} \ln p\right)}$$

или, переходя к функции $u(\xi)$, получим

$$u(\xi) = \beta e^{-2\xi} \ln \frac{p}{\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\frac{\delta}{2}} \ln p\right)}.$$

При $\xi \to +\infty$ эта функция имеет вид

$$u(\xi) = (1 - \sqrt{2\delta}) e^{-\xi} + o(e^{-2\xi})$$

и, очевидно, что условие $\Theta \to 0$ при $\xi \to +\infty$ выполняется автоматически, причем $0 < \delta \leqslant 1/2$ (этот промежуток на самом деле несколько у́же, так как не должна нарушаться справедливость обобщенного преобразования Франк-Каменецкого, т. е. $1 - \sqrt{2\delta}$ должно быть достаточно меньше единицы).

Каждому δ из этого промежутка соответствует своя скорость пламени, т. е. математически при данных условиях возможно континиуальное множество решений. Но физически реализуется только одно значение скорости пламени (а следовательно, единственное распределение температуры). И это значение находится из принципа минимума производства энтропии, который включен в качестве дополнительного условия в предлагаемую форму теории ламинарного пламени.

Идея привлечения принципа минимума производства энтропии для нахождения скорости нормального распространения пламени впервые высказана авторами работы [2]. Для настоящей задачи (и вообще для задач распространения пламени) это означает, что из континуума возможных профилей физически реализуется минимальный. Или, что то же самое, общее количество тепла в зонах прогрева и химических реакций должно быть минимальным. Этому и соответствует условие ограниченности V при $y \to 0$, и значение $\delta = 1/2$. Последнее означает, что выбрано максимальное δ из промежутка $]0;\ 1/2]$, что соответствует выбору минимальной скорости пламени (или минимального потока $j = \rho v$). Интересно отметить, что аналогичная ситуация имеет место и в задаче Колмогорова — Петровского — Пискунова [1].

Для распределения концентрации $a(\xi)$ находим

$$a = a_0\left(1 - e^{-\frac{1}{\mathrm{Le}}\xi}\right) + \frac{1}{\mathrm{Le}} \beta e^{-2\xi} V(\xi) + \beta \frac{\mathrm{Le} - 1}{\mathrm{Le}^2} e^{-\frac{1}{\mathrm{Le}}\xi} \int e^{\left(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 2\right)\xi} V(\xi)\, d\xi$$
$$\text{при} \quad \xi \geqslant 0,$$

$a = 0$ при $\xi < 0$, где $\mathrm{Le} = D/\varkappa$.

Излагаемый здесь подход имеет следующие преимущества по сравнению с методом асимптотических сращиваемых разложений:

1) теория ламинарного пламени становится связанной с общей теорией слабо неравновесных систем, поэтому найденная скорость фронта

в указанной работе Колмогорова — Петровского — Пискунова тоже соответствует минимуму производства энтропии;

2) процесс установления стационарного фронта ламинарного пламени имеет много общего с установлением теплового баланса в цилиндрическом сосуде, наполненном реакционноспособной средой;

3) аналитические выражения для распределения температуры и концентрации имеют «нерасщепленный» вид, что более удобно в исследовательской работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др.** Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
2. **Карпов А. И., Булгаков В. К.** Об одном нетрадиционном алгоритме расчета стационарной скорости распространения пламени // ФГВ.— 1990.— 26, № 5.— С. 137.

г. Томск *Поступила в редакцию 13/V 1991, после доработки — 18/VIII 1992*

УДК 535.33 : 536.5

Г. И. Левашенко, А. С. Сокольников, И. Н. Доброхотов, Н. В. Мазаев

ИЗМЕРЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИМПУЛЬСНОГО ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Описан быстродействующий фильтровый радиометр «Кларнет» для измерения энергетических характеристик импульсных излучателей. Измерена сила излучения теплового излучателя в окнах прозрачности атмосферы, а также суммарная сила излучения в интервале 1,5—5,7 мкм. Определены эффективные температура и излучательная способность излучателя во времени.

Излучатели на основе взрывного горения экзотермических материалов находят широкое применение для решения ряда практических задач. Для более эффективного использования излучателей необходимо знать их энергетические характеристики в широкой области спектра. Известные радиометры [1], как правило, имеют небольшое угловое поле зрения и большую постоянную времени измерений в рабочем спектральном диапазоне. Поэтому они не могут быть использованы для измерения энергетических характеристик неоднородных импульсных излучателей больших размеров.

В настоящей работе описаны быстродействующий фильтровый радиометр «Кларнет» и результаты измерения силы излучения, эффективной температуры и излучательной способности импульсного теплового излучателя в отдельных участках спектральной области 1,1—5,7 мкм.

Радиометр «Кларнет» состоит из оптико-механического блока (ОМБ), установленного на юстировочной площадке с возможностью крепления на треноге, и блока управления (БУ) (рис. 1), укомплектованных сетевым и сигнальным кабелями. Радиометр устанавливается в направлении излучателя с паралаксом 0,14 м с помощью визира в виде бинокля БПУ 7×50, который жестко крепится на ОМБ.

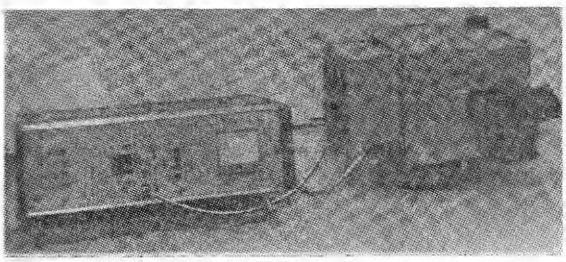

Рис. 1. Радиометр «Кларнет».