УДК 532.135
DOI: 10.15372/PMTF202315255

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ПУАЗЕЙЛЕВСКОГО ТИПА ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

Б. В. Семисалов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: ViBiS@ngs.ru

С использованием реологической мезоскопической модели Покровского — Виноградова получены разрешающие уравнения, описывающие стационарные течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в цилиндрическом канале. Найдены точные решения уравнений и сформулированы ограничения для значений реологических параметров, обеспечивающие существование этих решений. Получены результаты, позволяющие описать процесс разрушения ламинарного течения пуазейлевского типа. Главную роль в этом процессе с точки зрения механики играют размер и ориентация макромолекул полимерной жидкости, с точки зрения математики — особые точки найденных решений.

Ключевые слова: полимерная жидкость, мезоскопическая модель, цилиндрический канал, течение пуазейлевского типа, точное решение, особые точки

Введение. Решение Пуазейля уравнений Навье — Стокса в цилиндрическом канале, описывающее базовый класс ламинарных течений несжимаемой вязкой жидкости, получено в первой половине XIX в. Эти решения не предполагают каких-либо ограничений на размер канала, скорость течения или вязкость жидкости. Тем не менее экспериментально установлено, что при варьировании этих параметров течения Пуазейля могут разрушаться, и их разрушение характеризуется безразмерной величиной (впоследствии названной числом Рейнольдса Re), зависящей от комбинации указанных параметров. В случае если число Рейнольдса превышает некоторые пороговые значения, происходит переход от ламинарного режима течения к турбулентному [1]. Этот переход, как правило, связан с развитием неустойчивости течения и появлением в нем сложных пространственных структур, а также с бифуркациями соответствующих решений уравнений Навье — Стокса и переходом к хаосу.

Анализ процесса разрушения ламинарных течений вязкоупругих полимерных сред представляет сложную проблему. Известно, что при наличии изогнутых линий тока (как, например, в течении Тейлора — Куэтта) при малых Re реализуются режимы течения, в которых вязкость жидкости практически не влияет на развитие турбулентности (см. [2]).

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (код проекта FWNF-2022-0008).

© Семисалов Б. В., 2023

Турбулентность в таких течениях называется упругой. Большое количество работ посвящено поиску непрерывного перехода между упругой и классической (инерционной) турбулентностями при увеличении числа Рейнольдса, а также изучению механизма разрушения ламинарных течений полимерной жидкости с прямыми линиями тока, которое наблюдается в эксперименте при малых значениях Re [3, 4].

Для решения указанных выше проблем часто проводится анализ устойчивости стационарных течений. Заметим, что стационарные решения типа решений Пуазейля известны для многих феноменологических моделей, описывающих течения неньютоновских жидкостей [5], для моделей типа модели Олдройда с малой вязкостью растворителя [6], а также для более сложных моделей Фан-Тьена — Таннера (Phan-Thien — Tanner (PTT)) и FENE-P [7]. Однако анализа устойчивости этих решений на линейном уровне часто недостаточно для понимания механизмов перехода к турбулентности. По-видимому, он связан с нелинейными эффектами [3]. Кроме того, до сих пор недостаточно исследованы модели, учитывающие микроструктуру полимера. В настоящей работе для описания течений используется мезоскопический подход, позволяющий учесть размер и ориентацию полимерных молекул и, следовательно, наведенную анизотропию течения [8–10]. В основе этого подхода лежит реологическая мезоскопическая модель Покровского — Виноградова, с помощью которой в [11–13] исследованы сдвиговые течения, течения пуазейлевского типа, а также их устойчивость. В работе [14] в рамках указанной модели с помощью метода возмущений найдены поправки к закону Пуазейля с точностью до первого порядка по параметрам задачи.

Ниже получены системы уравнений, описывающие одномерные осесимметричные стационарные течения пуазейлевского типа. Найдены их точные решения, анализ которых позволяет сделать вывод, что ламинарно-турбулентный переход может быть обусловлен ориентацией и размерами макромолекулярных клубков полимера. Исследование условий существования действительных стационарных решений позволяет описать механизм разрушения ламинарных течений: найденные решения имеют точки ветвления, которые при изменении параметров модели могут приближаться к области задачи и достигать точки, соответствующей границе канала. В этом случае одномерное решение вблизи границы разрушается, что может соответствовать возникновению критического слоя, в котором течение становится существенно двумерным. Результаты экспериментальных исследований возникновения и эволюции таких слоев обсуждаются, например, в работе [15].

1. Постановка задачи. Следуя [10, 16], уравнения, описывающие течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости, представим в безразмерной форме в декартовой системе координат:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \nabla P = \operatorname{div} \Pi; \tag{2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{W}}\,\Pi + \overset{\nabla}{\Pi} = \frac{2}{\mathrm{W}\,\mathrm{Re}}\,D - \Big(\mathrm{Re}\,\frac{k-\beta}{3}\,(\operatorname{tr}\Pi)\Pi + \beta\,\mathrm{Re}\,\Pi^2\Big), \tag{3}$$

где t — время; $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости в декартовой системе координат (x, y, z); P — давление; $\Pi = (a_{ij})$ — симметрический тензор анизотропии второго ранга; $I = \operatorname{tr}\Pi$ — след тензора анизотропии; Π^2 вычисляется по правилу возведения матрицы в квадрат; $D = (\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}})/2$ — тензор скоростей деформации; $d/dt = \partial/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla$ — материальная (субстанциональная) производная по времени, где оператор ∇ имеет смысл ковариантной производной от векторного или тензорного поля; $\overset{\nabla}{\Pi} = d\Pi/dt - [(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\Pi + \Pi(\nabla\boldsymbol{u})]$ — так называемая верхняя конвективная производная по времени от тензора Π, причем каждое слагаемое в квадратных скобках вычисляется по формулам умножения матрицы на мат-

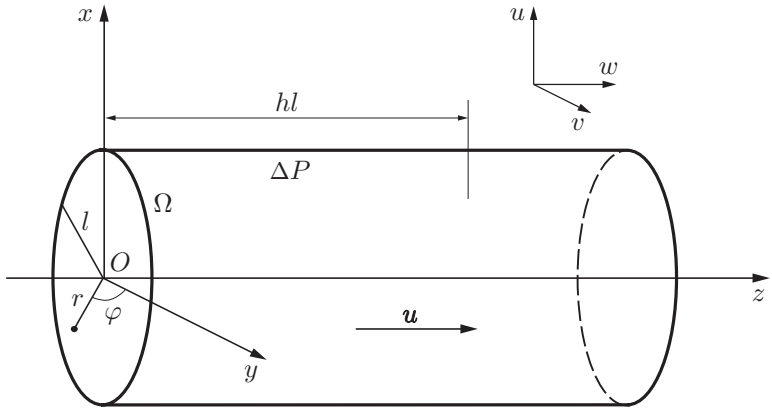

Рис. 1. Геометрия цилиндрического канала, а также декартова и полярная системы координат

рицу; k, β $(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$ — феноменологические параметры модели, характеризующие вклады, обусловленные анизотропией (величина β учитывает ориентацию макромолекулярного клубка, число k — его размеры [10]); $\mathrm{Re} = \rho u_H l/\eta_0^*$ — число Рейнольдса; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность среды; $\mathrm{W} = \tau_0^* u_H/l$ — число Вайсенберга; η_0^*, τ_0^* — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации при заданной температуре жидкости (см. [9; 10. Гл. 3]).

Система (1)–(3) записана в безразмерном виде: время t, координаты x, y, z, компоненты вектора скорости $\boldsymbol{u}$, давление P, компоненты тензора анизотропии a_{ij} отнесены к l/u_H, l, u_H, ρu_H^2, $\mathrm{Re\,W}/3$ соответственно (l — характерная длина; u_H — характерная скорость).

В настоящей работе модель (1)–(3) будем использовать для описания течений, свойства которых аналогичны свойствам течений Пуазейля в канале цилиндрической формы с круглым сечением (рис. 1). Для описания таких течений перейдем в цилиндрическую систему координат (r, φ, z) и введем обозначения

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \qquad \Pi = \begin{pmatrix} a_{rr} & a_{r\varphi} & a_{rz} \\ a_{\varphi r} & a_{\varphi\varphi} & a_{\varphi z} \\ a_{zr} & a_{z\varphi} & a_{zz} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В результате получаем следующие выражения для дифференциальных операторов модели:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + u\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial r} + \frac{v}{r}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \varphi} + w\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} + \boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{q} = \Big(-\frac{v^2}{r}, \frac{uv}{r}, 0\Big)^{\mathrm{T}}; \tag{5}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u\,\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{v}{r}\,\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + w\,\frac{\partial \alpha}{\partial z}, \tag{6}$$

где α — любая из компонент тензора Π,

$$\operatorname{div} \Pi = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{rr}}{r} + \dfrac{\partial a_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial a_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial a_{rz}}{\partial z} - \dfrac{a_{\varphi\varphi}}{r} \\ 2\,\dfrac{a_{r\varphi}}{r} + \dfrac{\partial a_{r\varphi}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial a_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial a_{\varphi z}}{\partial z} \\ \dfrac{a_{rz}}{r} + \dfrac{\partial a_{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial a_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial a_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$\nabla \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r} & \dfrac{\partial w}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} + \dfrac{u}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Для описания течений пуазейлевского типа частное решение исходной системы следует искать в виде

$$\begin{gathered} u = v \equiv 0, \qquad w = \hat{w}(t, r, \varphi), \\ P = \hat{P}(t, r, \varphi, z) = S(t, r, \varphi) - \hat{P}_d(t) z, \\ a_{ij} = \hat{a}_{ij}(t, r, \varphi), \qquad i, j \in \{r, \varphi, z\}, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial z} = -\hat{P}_d(t) = -\frac{\Delta P(t)}{\rho u_H^2 h},$$

$-\Delta P(t)/(\rho u_H^2)$ — безразмерная разность давлений на отрезке hl (см. рис. 1), причем размерная величина $\Delta P(t) > 0$.

Решение (9) соответствует течению полимерной жидкости под действием разности давлений $\Delta P(t)$ вдоль оси канала $r = 0$.

Далее знак "$\wedge$" над новыми переменными, определенными в (9), опускаем и после преобразований системы (1)–(3) с учетом (4)–(9) получаем систему уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial a_{rz}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_{\varphi z}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} a_{rz} = P_d(t); \tag{10}$$

$$\frac{\partial a_{rz}}{\partial t} - \Big(A_r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{a_{r\varphi}}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big) + L_{rz} = 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial a_{\varphi z}}{\partial t} - \Big(a_{r\varphi} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big) + L_{\varphi z} = 0; \tag{12}$$

$$\frac{\partial a_{zz}}{\partial t} - 2\Big(a_{rz} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{a_{\varphi z}}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big) + L_{zz} = 0; \tag{13}$$

$$\frac{\partial a_{rr}}{\partial t} + L_{rr} = 0, \qquad \frac{\partial a_{\varphi\varphi}}{\partial t} + L_{\varphi\varphi} = 0, \qquad \frac{\partial a_{r\varphi}}{\partial t} + L_{r\varphi} = 0, \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered} L_{rr} = K_I a_{rr} + \operatorname{Re}\beta \|\boldsymbol{a}_r\|^2, \qquad \boldsymbol{a}_r = (a_{rr}, a_{r\varphi}, a_{rz}), \\ L_{\varphi\varphi} = K_I a_{\varphi\varphi} + \operatorname{Re}\beta \|\boldsymbol{a}_\varphi\|^2, \qquad \boldsymbol{a}_\varphi = (a_{r\varphi}, a_{\varphi\varphi}, a_{\varphi z}), \\ L_{zz} = K_I a_{zz} + \operatorname{Re}\beta \|\boldsymbol{a}_z\|^2, \qquad \boldsymbol{a}_z = (a_{rz}, a_{\varphi z}, a_{zz}), \end{gathered}$$

$$L_{r\varphi} = K_I a_{r\varphi} + \operatorname{Re}\beta(\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_\varphi), \quad L_{rz} = K_I a_{rz} + \operatorname{Re}\beta(\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_z), \quad L_{\varphi z} = K_I a_{\varphi z} + \operatorname{Re}\beta(\boldsymbol{a}_\varphi, \boldsymbol{a}_z),$$

круглые скобки обозначают скалярное произведение векторов,

$$K_I = \frac{1}{\mathrm{W}} + \frac{\bar{k}\operatorname{Re}}{3} I, \qquad \bar{k} = k - \beta,$$

$I = a_{rr} + a_{\varphi\varphi} + a_{zz}$ — первый инвариант П,

$$A_r = a_{rr} + (\operatorname{Re}\,\mathrm{W})^{-1}, \qquad A_\varphi = a_{\varphi\varphi} + (\operatorname{Re}\,\mathrm{W})^{-1}.$$

Дифференцируя уравнение (10) по t, уравнение (11) по r, уравнение (12) с множителем $1/r$ по φ и суммируя результаты, имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \tilde{\Delta} w - \tilde{A}\,\frac{\partial w}{\partial r} - \tilde{B}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi} + K_I\Big(\frac{\partial w}{\partial t} - P_d(t)\Big) + F = P_d'(t), \tag{15}$$

где

$$\tilde{\Delta} = A_r\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\,\frac{a_{r\varphi}}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial \varphi} + \frac{A_\varphi}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$\tilde{A} = \tilde{A}(t,r,\varphi) = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\Big(A_r + \frac{\partial a_{r\varphi}}{\partial \varphi}\Big), \qquad \tilde{B} = \tilde{B}(t,r,\varphi) = \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial a_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\Big),$$

$$F = F(t,r,\varphi) = \frac{\operatorname{Re}\beta}{r}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\,(r(\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_z)) + \frac{\partial\,(\boldsymbol{a}_\varphi,\boldsymbol{a}_z)}{\partial \varphi}\Big) + \frac{\partial K_I}{\partial r}\,a_{rz} + \frac{a_{\varphi z}}{r}\,\frac{\partial K_I}{\partial \varphi},$$

$P_d'(t)$ — производная по времени от $P_d(t)$; $\boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{a}_\varphi$, $\boldsymbol{a}_z$ — вектор-столбцы симметрической матрицы П. Уравнение (15) является квазилинейным уравнением второго порядка для определения компоненты w вектора скорости.

Уравнения (15), (11)–(14), по сути, записаны в полярной системе координат (r,φ) с центром в точке O (см. рис. 1). Пусть $\Omega = \{(r,\varphi)\colon 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ — сечение канала. Дополним соотношения (15), (11)–(14) краевыми условиями

$$w(t,1,\varphi) = 0, \qquad t \geqslant 0 \tag{16}$$

и начальными данными

$$w(0,r,\varphi) = 0, \qquad w_t(0,r,\varphi) = 0, \qquad \alpha(0,r,\varphi) = 0, \qquad (r,\varphi) \in \Omega, \tag{17}$$

где $\alpha(t,r,\varphi)$ — любая из компонент тензора П; $w_t = \partial w/\partial t$. Таким образом, получаем начально-краевую задачу (15), (11)–(14), (16), (17).

2. Осесимметричное течение. Будем полагать, что течение обладает осевой симметрией. Тогда все неизвестные функции в модели зависят только от времени $t \geqslant 0$ и радиальной координаты $r \in [0,1]$. Система (15), (11)–(13) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - A_r\,\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(rA_r)}{\partial r}\,\frac{\partial w}{\partial r} + K_I\Big(\frac{\partial w}{\partial t} - P_d(t)\Big) + \\ + \frac{\operatorname{Re}\beta}{r}\,\frac{\partial\,(r(\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_z))}{\partial r} + \frac{\partial K_I}{\partial r}\,a_{rz} = P_d'(t); \tag{18}$$

$$\frac{\partial a_{rz}}{\partial t} - A_r\,\frac{\partial w}{\partial r} + L_{rz} = 0; \tag{19}$$

$$\frac{\partial a_{\varphi z}}{\partial t} - a_{r\varphi}\,\frac{\partial w}{\partial r} + L_{\varphi z} = 0, \qquad \frac{\partial a_{zz}}{\partial t} - 2a_{rz}\,\frac{\partial w}{\partial r} + L_{zz} = 0.$$

Уравнения для остальных трех компонент тензора анизотропии a_{rr}, $a_{\varphi\varphi}$ и $a_{r\varphi}$ имеют вид (14). Полученная система уравнений дополняется краевыми и начальными условиями (16), (17).

Из анализа поставленной начально-краевой задачи следует, что некоторые компоненты тензора анизотропии могут быть заданы тождественно нулевыми. Действительно, запишем более подробно уравнения для $a_{r\varphi}$ и $a_{\varphi z}$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial a_{r\varphi}}{\partial t} + \beta\operatorname{Re}(a_{rr} + a_{\varphi\varphi})a_{r\varphi} + K_I a_{r\varphi} + \beta\operatorname{Re} a_{rz}a_{\varphi z} = 0,\\ \frac{\partial a_{\varphi z}}{\partial t} - a_{r\varphi}\,\frac{\partial w}{\partial r} + \beta\operatorname{Re}(a_{\varphi\varphi} + a_{zz})a_{\varphi z} + K_I a_{\varphi z} + \beta\operatorname{Re} a_{r\varphi}a_{rz} = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Нетрудно показать, что подстановка $a_{r\varphi} \equiv 0$, $a_{\varphi z} \equiv 0$ в уравнения (20) обращает их в тождества. Такие значения $a_{r\varphi}$ и $a_{\varphi z}$ соответствуют также начальным данным и являются решениями задачи. Аналогичный вывод можно сделать для $a_{\varphi\varphi}$. Далее будем искать только те решения начально-краевой задачи, для которых $a_{r\varphi}$, $a_{\varphi z}$, $a_{\varphi\varphi}$ являются тождественно нулевыми.

Запишем уравнение (10) для случая осевой симметрии и решим его относительно функции a_{rz}:

$$a_{rz} = \frac{1}{r}\int\limits_0^r \frac{\partial w(t,s)}{\partial t}\, s\, ds - P_d(t)\,\frac{r}{2}. \tag{21}$$

Такой вид решения (10) получен с учетом требования ограниченности a_{rz} при $r = 0$.

Утверждение. При $r \to 0$ предел функции a_{rz} существует и равен нулю. Если функция $\partial w(r,t)/\partial t$ является аналитической в окрестности точки $r = 0$ при $t \geqslant 0$, то a_{rz} также является аналитической.

Утверждение доказывается с помощью разложения в ряд Тейлора подынтегрального выражения (21) в окрестности точки $r = 0$.

Далее преобразуем систему для определения функций a_{rr}, a_{zz}:

$$\frac{\partial a_{rr}}{\partial t} + K_I a_{rr} + \beta\,\mathrm{Re}\,(a_{rr}^2 + a_{rz}^2) = 0; \tag{22}$$

$$\frac{\partial a_{zz}}{\partial t} - 2a_{rz}\,\frac{\partial w}{\partial r} + K_I a_{zz} + \beta\,\mathrm{Re}\,(a_{rz}^2 + a_{zz}^2) = 0. \tag{23}$$

Вводя обозначения $A = a_{rr} + a_{zz}$, $B = a_{zz} - a_{rr}$, $\gamma = \beta + \bar{k}/3$, а затем вычитая из (23) уравнение (22), находим

$$\frac{\partial B}{\partial t} + [\mathrm{W}^{-1} + \mathrm{Re}\,\gamma A]B = 2a_{rz}\,\frac{\partial w}{\partial r}. \tag{24}$$

Складывая уравнения (22) и (23), получаем выражение

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathrm{W}^{-1}A + \mathrm{Re}\,\gamma A^2 + \frac{1}{2}\,\beta\,\mathrm{Re}\,(B^2 - A^2) = 2a_{rz}\Big(\frac{\partial w}{\partial r} - \beta\,\mathrm{Re}\,a_{rz}\Big). \tag{25}$$

Из уравнения (19) следует

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{A_r}\Big(\frac{\partial a_{rz}}{\partial t} + \tilde{K}_I a_{rz}\Big), \qquad \tilde{K}_I = \mathrm{W}^{-1} + \mathrm{Re}\,\gamma A. \tag{26}$$

Подстановка (26) в (24), (25) приводит к системе

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{2a_{rz}}{A_r}\,\frac{\partial a_{rz}}{\partial t} = \Big(\frac{2a_{rz}^2}{A_r} - B\Big)\tilde{K}_I; \tag{27}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{2a_{rz}}{A_r}\,\frac{\partial a_{rz}}{\partial t} + \mathrm{W}^{-1}A + \mathrm{Re}\,\gamma A^2 + \frac{1}{2}\,\beta\,\mathrm{Re}\,(B^2 - A^2) = 2a_{rz}^2\Big(\frac{\tilde{K}_I}{A_r} - \beta\,\mathrm{Re}\,\Big). \tag{28}$$

Уравнения (18), (21), (27), (28) дополняются краевыми и начальными условиями

$$\frac{\partial w}{\partial r}\,(t,0) = 0, \qquad w(t,1) = 0, \qquad t \geqslant 0; \tag{29}$$

$$w(0,r) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0,r) = 0, \quad A(0,r) = 0, \quad B(0,r) = 0, \quad r \in [0,1].$$

3. Стационарные решения. Предположим, что переменные модели не зависят от времени t, а величина $P_d(t) \equiv P_d$ представляет собой безразмерный постоянный градиент давления в канале. Тогда из уравнений (21), (27), (26) последовательно находим

$$a_{rz} = -P_d \frac{r}{2}; \tag{30}$$

$$a_{zz} = a_{rr} + \frac{2a_{rz}^2}{A_r} = a_{rr} + \frac{P_d^2}{2A_r} r^2; \tag{31}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \Big\{ \frac{\gamma}{A_r} a_{rr} \Big[\frac{1}{\mathrm{W}} \Big(\frac{1}{\beta} - 1 \Big) + \frac{2\bar{k}\,\mathrm{Re}}{3\beta} \Big(a_{rr} + \frac{P_d^2 r^2}{4A_r} \Big) \Big] - \frac{1}{2\mathrm{W}} \Big\} \frac{P_d}{A_r} r. \tag{32}$$

Преобразуя (22) с учетом (30), (31), получаем уравнение

$$\frac{1}{\mathrm{W}} a_{rr} + \mathrm{Re} \Big(\frac{2\bar{k}}{3} + \beta \Big) a_{rr}^2 + \mathrm{Re}\, \frac{P_d^2 r^2}{4} \Big(\frac{2\bar{k}}{3A_r} a_{rr} + \beta \Big) = 0. \tag{33}$$

Уравнение (32) получено из (26) с использованием (22), выражения для K_I и формул (30), (31). Далее рассмотрим два случая.

3.1. *Случай $\bar{k} = 0$ ($k = \beta$).* В данном случае решения уравнений модели можно записать в явном виде. При $\bar{k} = 0$ уравнение (33) является квадратным уравнением относительно неизвестной функции a_{rr} и имеет две ветви решения:

$$a_{rr} = (-1 \pm \sqrt{1 - (\beta\Lambda P_d)^2 r^2}\,)/(2\beta\Lambda), \qquad \Lambda = \mathrm{Re}\ \mathrm{W}. \tag{34}$$

Используя (34), из формулы (32) и второго граничного условия (29) находим

$$w(r) = \frac{1}{P_d \beta \Lambda \mathrm{W}} \Big((8(1-\beta)\beta - 1) \log \Big| \frac{\theta(r)}{\theta(1)} \Big| \pm \hat{\beta}(\theta(r) - \theta(1)) \Big) \pm$$

$$\pm \frac{4(\theta(r) - \theta(1))\hat{\beta}(\beta - 1)}{P_d \mathrm{W} \Lambda \theta(r) \theta(1)}, \tag{35}$$

где

$$\hat{\beta} = 2\beta - 1, \qquad \theta(r) = \pm\hat{\beta} + \sqrt{1 - (P_d \beta \Lambda)^2 r^2}\,,$$

знак “+” соответствует ветви решения (34) со знаком “+”, знак “−” — ветви со знаком “−”.

Далее опишем условия существования действительных решений (34), (35), обусловленные, по сути, двумя требованиями.

1. Для любых $r \in [0, 1]$ подкоренные выражения должны быть неотрицательными:

$$-1 \leqslant P_d \beta \Lambda \leqslant 1. \tag{36}$$

2. Для любых $r \in [0, 1]$ числитель и знаменатель аргумента функции “log” не должны обращаться в нуль, что приводит к дополнительным ограничениям на существование каждой ветви решения (35). Для ветви со знаком “+” при $\hat{\beta} \leqslant 0$ ($\beta \leqslant 1/2$) и для ветви со знаком “−” при $\hat{\beta} \geqslant 0$ ($\beta \geqslant 1/2$) необходимо потребовать выполнения условия

$$\beta^2 P_d^2 r^2 \Lambda^2 + \hat{\beta}^2 - 1 \neq 0 \tag{37}$$

для любых $r \in [0, 1]$.

При $0 < \beta < 1$ из (37) получаем

$$\Lambda < \sqrt{1 - \hat{\beta}^2}\,/(P_d \beta). \tag{38}$$

Сравнение (36), (38) позволяет сделать вывод, что в случаях, указанных при рассмотрении требования 2, итоговое ограничение для Λ определяется выражением (38). В остальных случаях, т. е. для ветви (35) со знаком "+" при $\hat\beta > 0$ ($\beta > 1/2$) и для ветви со знаком "−", при $\hat\beta < 0$ ($\beta < 1/2$) ограничение для Λ определяется выражением (36).

Заметим, что в случаях $\beta = 0$, $\beta = 1/2$, $\beta = 1$ решения (34), (35) существенно упрощаются.

В случае $\beta = 0$ из (33), (35) получаем

$$a_{rr}(r) \equiv 0, \qquad w(r) = \operatorname{Re} P_d(1 - r^2)/4,$$

что, вообще говоря, соответствует классическому решению Пуазейля, которое существует при любых значениях параметров Re и P_d.

В случае $\beta = 1/2$ имеем $\hat\beta = 0$,

$$a_{rr}(r) = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (P_d\Lambda)^2 r^2}}{2\Lambda};$$
$$w(r) = \frac{1}{P_d\Lambda \mathrm{W}} \log\Big|\frac{4 - (P_d\Lambda)^2 r^2}{4 - (P_d\Lambda)^2}\Big|. \tag{39}$$

В данном случае двум ветвям функции $a_{rr}(r)$ соответствует единственное выражение $w(r)$. При этом существование решения определяется условием $\Lambda < 2/P_d$.

В случае $\beta = 1$ имеем $\hat\beta = 1$, $a_{rr}(r) = (-1 \pm \sqrt{1 - (P_d\Lambda)^2 r^2}\,)/(2\Lambda)$,

$$w(r) = \frac{1}{P_d\Lambda \mathrm{W}} \Big(\pm (\theta(r) - \theta(1)) - \log\Big|\frac{\theta(r)}{\theta(1)}\Big|\Big). \tag{40}$$

Однако с учетом того что при $r = 0$ ветвь функции $\theta(r) = -1 + \sqrt{1 - (P_d\Lambda)^2 r^2}$ принимает значение, равное нулю, приходим к выводу, что в случае $\beta = 1$ при $\Lambda < 1/P_d$ существует единственное ограниченное решение с верхним из знаков "±".

Случай $\beta = (P_d\Lambda)^{-1} \leqslant 1$ является предельным с точки зрения существования гладкого решения. При этом в формулах (34), (35) $\theta(r) = \pm\hat\beta + \sqrt{1 - r^2}$, $\theta(1) = \pm\hat\beta$. Получаем

$$a_{rr}(r) = \frac{P_d}{2}\,(-1 \pm \bar\rho(r)),$$
$$w(r) = \frac{1}{\mathrm{W}}\Big((8(1-\beta)\beta - 1)\log\Big|1 \pm \frac{\bar\rho(r)}{\hat\beta}\Big| \pm \hat\beta\bar\rho(r) \pm \frac{4\beta(\beta-1)\bar\rho(r)}{\hat\beta + \bar\rho(r)}\Big), \tag{41}$$

где $\bar\rho(r) = \sqrt{1 - r^2}$. Требуя, чтобы аргумент логарифма не обращался в нуль, можно сделать вывод, что при $\beta < 1/2$ существует два решения вида (41). При $\beta \geqslant 1/2$ существует одно решение вида (41) со знаком "+" вместо "±". При $\beta = (P_d\Lambda)^{-1}$ из (32) несложно получить

$$\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{1}{\hat\beta^2 \mathrm{W}}.$$

Следовательно, на отрезке $r \in [0, 1]$ ограничены производные всех решений (41), кроме производной решения при $\beta = 1/2$ ($P_d\Lambda = 2$), которая обращается в бесконечность в точке $r = 1$.

Замечание. При $\beta > 0$ задача об увеличении потока в канале (пропускной способности канала) в отличие от случая течения классической жидкости не решается путем увеличения градиента давления P_d. Действительно, в формуле (35) при $P_d \to \infty$ величина $w(r)$ стремится к постоянной, а в формуле (39) величина $w(r)$ является убывающей.

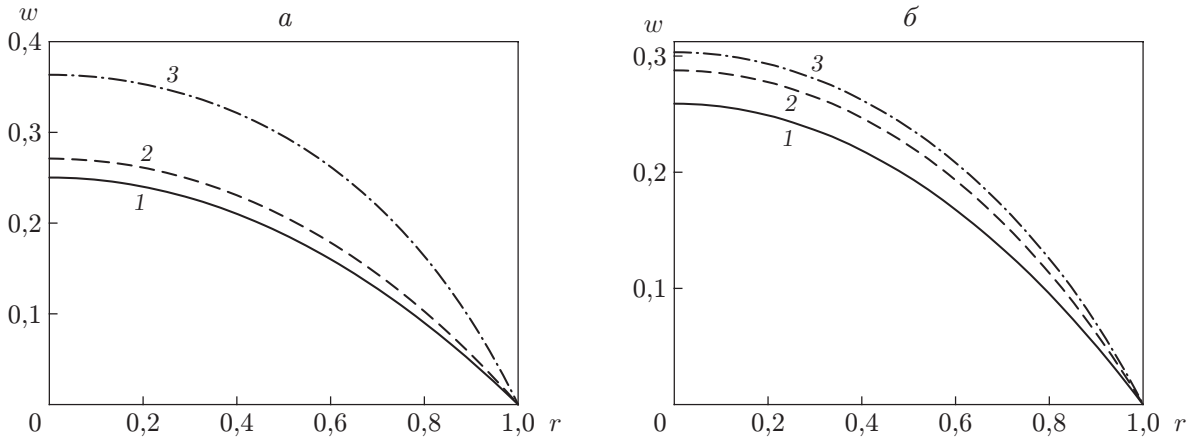

Рис. 2. Решения (35) при $\mathrm{Re} = 1$, $P_d = 1$:
а — $\beta = 0{,}25$ (*1* — $\mathrm{W} = 0{,}1$, *2* — $\mathrm{W} = 1{,}0$, *3* — $\mathrm{W} = 2{,}0$); *б* — $\mathrm{W} = 1$ (*1* — $\beta = 0{,}1$, *2* — $\beta = 0{,}5$, *3* — $\beta = 0{,}9$)

В случае больших значений P_d для корректного анализа необходимо также учитывать ограничения (36), (38). Таким образом, задача о максимизации потока полимерной жидкости за счет вариации градиента давления в канале при заданных реологических свойствах жидкости требует отдельного анализа.

На рис. 2 показаны профили скорости (35) при различных значениях параметров.

Следует отметить, что в работе [16] рассматривалась аналогичная постановка задачи о течении в трубе с круглым сечением и получено разрешающее уравнение второго порядка для скорости $w(r)$ с явными выражениями коэффициентов при $\beta = 1/2$, $\beta = 1$ (см. [16]). В принятых обозначениях уравнение (33′) из [16] имеет вид

$$\frac{1}{2\sqrt{1+4\mathrm{W}^2 w_r^2}}\, w_{rr} + \frac{1}{r}\, w_r = -\frac{\sqrt{1+4\mathrm{W}^2 w_r^2}+1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{2}; \tag{42}$$

$$\frac{1-\mathrm{W}^2 w_r^2}{1+\mathrm{W}^2 w_r^2}\, w_{rr} + \frac{1}{r}\, w_r = -(1+\mathrm{W}^2 w_r^2), \qquad \beta = 1. \tag{43}$$

Здесь нижний индекс у функции w означает дифференцирование по r. Краевые условия, сформулированные в [16], совпадают с (29).

Нетрудно показать, что выражения (39), (40) являются решениями (42), (43) и удовлетворяют граничным условиям. Это свидетельствует о корректности проведенных преобразований.

3.2. *Случай $\bar{k} \neq 0$ ($\beta \neq k$).* Следуя [17], можно отметить, что предложенная модель хорошо согласуется с данными экспериментальных наблюдений для течений некоторых видов полимерной жидкости, в частности растворов линейного полибутадиена с различной молекулярной массой при комнатной температуре в случае $\beta = 1{,}2k$ ($\bar{k} \neq 0$).

При $\bar{k} \neq 0$ уравнение (33) после подстановки выражения для A_r сводится к кубическому уравнению относительно неизвестной функции a_{rr}

$$a a_{rr}^3 + b a_{rr}^2 + c(r) a_{rr} + d(r) = 0, \tag{44}$$

где

$$a = 4\Lambda\bar{\beta}, \qquad b = 4(\bar{\beta}+1), \qquad c(r) = 4\Lambda^{-1} + \bar{\beta}\Lambda P_d^2 r^2,$$
$$d(r) = \beta P_d^2 r^2, \qquad \bar{\beta} = 2\bar{k}/3 + \beta.$$

Следуя формулам Кардано, введем обозначения

$$p(r) = \frac{3ac(r) - b^2}{3a^2}, \quad q(r) = \frac{2b^3 - 9abc(r) + 27a^2d(r)}{27a^3}, \quad Q(r) = \frac{p^3(r)}{27} + \frac{q^2(r)}{4}.$$

После преобразований получаем

$$p(r) = \frac{P_d^2}{4}\, r^2 - \frac{1 - \bar\beta + \bar\beta^2}{3\bar\beta^2\Lambda^2},$$

$$q(r) = \frac{g}{27\bar\beta^3\Lambda^3} - \frac{1 - 3\beta + \bar\beta}{12\bar\beta\Lambda}\, P_d^2 r^2, \qquad g = (\bar\beta - 2)(\bar\beta + 1)(2\bar\beta - 1),$$

$$Q(r) = -\frac{(\bar\beta - 1)^2}{108\bar\beta^4\Lambda^6} + \frac{\beta g - \bar\beta(1 - 4\bar\beta + \bar\beta^2)}{216\bar\beta^4\Lambda^4}\, P_d^2 r^2 - \\ - \frac{1 - 27\beta^2 + (\bar\beta - 10)\bar\beta + 18\beta(1 + \bar\beta)}{1728\bar\beta^2\Lambda^2}\, P_d^4 r^4 + \frac{1}{1728}\, P_d^6 r^6.$$

Далее будем рассматривать только вещественные корни уравнения (44). При $Q(r) > 0$ существует единственный вещественный корень

$$a_{rr,1}(r) = \sqrt[3]{-q(r)/2 + \sqrt{Q(r)}} + \sqrt[3]{-q(r)/2 - \sqrt{Q(r)}} - b/(3a),$$

при $Q(r) = 0$ — два корня:

$$a_{rr,1}(r) = -\sqrt[3]{4q(r)} - b/(3a), \qquad a_{rr,2}(r) = \sqrt[3]{q(r)/2} - b/(3a),$$

при $Q(r) < 0$ — три вещественных корня:

$$a_{rr,1}(r) = 2\cos\alpha \Big| \sqrt[6]{q^2(r)/4 - Q(r)}\, \Big| - b/(3a),$$

$$a_{rr,2,3}(r) = \Big| \sqrt[6]{q^2(r)/4 - Q(r)}\, \Big| \big(\cos\alpha(r) \pm \sqrt{3}\sin\alpha(r)\big) - b/(3a),$$

где $\alpha(r) = \operatorname{arctg}[2\sqrt{-Q(r)}/q(r)]/3$. В работе [13] в более сложном двумерном случае (канал с сечением в форме эллипса) показано, что при малых значениях P_d во всех точках области решения $Q(r) < 0$, т. е. уравнение (44) имеет три действительных корня, соответственно задача имеет три гладких решения. Однако при увеличении P_d в области возникают точки, в которых $Q(r) \geqslant 0$. В этом случае существует только одна ветвь, определяющая гладкие решения.

Для функции $w(r)$, как и выше, можно использовать формулу (32) и второе граничное условие (29). Однако в общем случае удается получить только интегральное выражение

$$w(r) = \int_1^r \Big\{ \frac{\gamma}{A_r}\, a_{rr}(s) \Big[\frac{\zeta}{\mathrm{W}} + \frac{2\bar k\, \mathrm{Re}}{3\beta} \Big(a_{rr}(s) + \frac{P_d^2 s^2}{4A_r} \Big) \Big] - \frac{1}{2\mathrm{W}} \Big\} \frac{P_d s}{A_r}\, ds, \tag{45}$$

где $A_r = A_r(s) = a_{rr}(s) + \Lambda^{-1}$; $a_{rr}(s)$ — любое из действительных решений (44); $\zeta = 1/\beta - 1$.

В силу ограничений $k \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ несложно показать, что $\bar\beta > 0$ и решения (44) ограничены. Следовательно, неограниченный рост подынтегрального выражения в (45) возможен только при $A_r(s) \to 0$. Используя (44) и выражение для A_r, получаем уравнение

$$4\bar\beta\Lambda A_r^3 + 4(1 - 2\bar\beta)A_r^2 + \big(4(\bar\beta - 1)\Lambda^{-1} + P_d^2\bar\beta\Lambda r^2\big)A_r + P_d^2(\beta - \bar\beta)r^2 = 0,$$

из которого следует, что $A_r \to 0$ тогда и только тогда, когда $\bar\beta \to \beta$, т. е. когда $\bar k \to 0$, что не соответствует рассматриваемому случаю ($\bar k \neq 0$).

Таким образом, подынтегральное выражение (45) ограничено, а значит, при любом $r \in [0,1]$ интеграл сходится. Заметим, однако, что в силу наличия в формулах для a_{rr} корней квадратных, кубических и шестой степени функция $w(r)$, определяемая (45), имеет особенности — точки ветвления.

Следует отметить, что при $\bar{k} \neq 0$ рассмотренные в подп. 3.2 формулы существенно упрощаются в двух случаях.

В случае $\beta = 0$ ($\bar{k} = k$) уравнение (44) имеет три корня:

$$a_{rr,1}(r) \equiv 0, \qquad a_{rr,2,3}(r) = \frac{-(2k+3) \pm \sqrt{(2k-3)^2 - (2kP_d\Lambda)^2 r^2}}{4\Lambda k}\,. \tag{46}$$

Используя (26), (30), (31), при $\beta = 0$ получаем

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\Big[\frac{1}{2\mathrm{W}} + \mathrm{Re}\,\frac{k}{3}\Big(a_{rr} + \frac{P_d^2 r^2}{4A_r}\Big)\Big]\frac{P_d}{A_r}\,r. \tag{47}$$

Интегрируя равенство (47), находим, что функциям (46) соответствуют выражения

$$w_1(r) = (1-r^2)P_d\,\mathrm{Re}\,\big[12 + P_d^2\Lambda^2 k(1+r^2)\big]/48, \qquad w_{2,3}(r) \equiv 0.$$

Решение $w_1(r)$ существует при любых значениях параметров, решения $w_{2,3}(r)$ существуют при $k \neq 3/2$, $\Lambda \leqslant |2k-3|/(2kP_d)$.

В случае $\beta = 1$ $\quad \bar{k} = k-1$, $\bar{\beta} = (2k+1)/3$. Уравнение (44) принимает вид

$$(\bar{\beta}a_{rr} + \Lambda^{-1})(4\Lambda a_{rr}^2 + 4a_{rr} + \Lambda P_d^2 r^2) = 0$$

и, следовательно, имеет три корня:

$$a_{rr,1}(r) \equiv -\frac{3}{(2k+1)\Lambda}, \qquad a_{rr,2,3}(r) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \Lambda^2 P_d^2 r^2}}{2\Lambda}\,.$$

Этим корням соответствуют выражения

$$w_1(r) = \frac{P_d\,\mathrm{Re}}{192(k-1)^2}\,(1-r^2)\big[P_d^2\Lambda^2(2+k)(1+2k)^2(1+r^2) - 72(k-1)\big],$$

$$w_{2,3}(r) = \frac{1}{WP_d\Lambda}\Big(\pm(\theta(r) - \theta) + \log\Big|\frac{\theta \pm 1}{\theta(r) \pm 1}\Big|\Big),$$

где

$$\theta(r) = \sqrt{1 - \Lambda^2 P_d^2 r^2}\,, \qquad \theta = \theta(1) = \sqrt{1 - \Lambda^2 P_d^2}\,.$$

Решения $a_{rr,1}(r)$, $w_1(r)$ существуют при любых значениях параметров; решения $a_{rr,2}(r)$, $w_2(r)$ (со знаками “+”) существуют при $\Lambda \leqslant 1/P_d$; функция $w_3(r)$ (со знаками “−”) неограниченно возрастает в окрестности точки $r = 0$ при любых значениях параметров, поэтому решения $a_{rr,3}(r)$, $w_3(r)$ следует исключить. Заметим, что решение $w_2(r)$ не зависит от значений параметра k и совпадает с решением (40).

Заключение. Анализ, проведенный в работе, позволяет описать механизм разрушения стационарного решения типа решения Пуазейля вследствие возникновения у него точки ветвления и выхода этой точки в область задачи при определенных значениях параметров. Учитывая ограничения, полученные для величины $\Lambda = \mathrm{Re}\,\mathrm{W}$ (см., например, (36), (38)), можно сделать вывод, что кривая на плоскости $(\mathrm{Re}, \mathrm{W})$, при пересечении которой особая точка попадает внутрь области, представляет собой гиперболу. Положение гиперболы зависит от параметров, характеризующих ориентацию и размер макромолекул полимера, а также градиент давления в канале. Заметим, что обратно пропорциональную

зависимость критических значений Re и W можно получить на основе других принципов. Например, в работе [4] использована модель Oldroyd-B при ненулевой вязкости растворителя для поиска непрерывного перехода между режимами упругой и классической турбулентности в двумерных течениях. Асимптотика выражений для критических значений параметров имеет вид $\mathrm{Re} \sim (E(1-b))^{-1/2}$, где b — отношение вязкостей растворителя и полимерного раствора; $E = \mathrm{W}/\mathrm{Re}$ — характеристика эластичности [4]. Нетрудно заметить, что это асимптотическое выражение соответствует соотношению $\mathrm{Re} \sim W^{-1}$. В работе [4] имеются ссылки на результаты экспериментов, подтверждающие данную асимптотику.

Следует отметить, что разрушение стационарного решения происходит в окрестности границы канала, где в экспериментах фиксируются предвестники ламинарно-турбулентного перехода — критические и сдвиговые слои, в которых течение становится существенно двумерным (см. [15]). Таким образом, описанный сценарий разрушения ламинарных течений может быть обусловлен возникновением критических слоев.

Помимо описания ламинарно-турбулентного перехода найденные точные решения типа решения Пуазейля представляют интерес с точки зрения анализа зависимости расхода жидкости от реологических параметров. Как следует из полученных формул, эта зависимость является нетривиальной (см. замечание). Также представляет интерес обнаруженный при $\beta = 0$, $\bar{k} \neq 0$ режим течения, характерный для бингамовских пластиков, когда жидкость остается в состоянии покоя при наличии ненулевого градиента давления и внутреннего напряжения. Причем в соответствии с (46) это напряжение зависит от реологических параметров жидкости. Применимость предложенной модели для описания течений определенных видов бингамовских пластиков требует отдельного исследования.

Автор выражает благодарность слушателям семинаров “Теоретические и вычислительные проблемы математической физики” Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН и “Информационно-вычислительные технологии” Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий за интерес к представленной работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Eckhardt B., Schneider T. M., Hof B., Westerweel J.** Turbulence transition in pipe flow // Annual Rev. Fluid Mech. 2007. V. 39. P. 447–468.
2. **McKinley G. H., Pakdel P., Oztekin A.** Rheological and geometric scaling of purely elastic flow instabilities // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1996. V. 67. P. 19–47.
3. **Datta S. S., Ardekani A. M., Arratia P. E., et al.** Perspectives on viscoelastic flow instabilities and elastic turbulence // Phys. Rev. Fluids. 2022. V. 7. 080701.
4. **Khalid M., Shankar V., Subramanian G.** A continuous pathway between the elasto-inertial and elastic turbulent states in viscoelastic channel flow // Phys. Rev. Lett. 2021. V. 127. 134502.
5. **Bird R. B.** Dynamics of polymeric liquids. V. 1. Fluid mechanics. 2nd ed. / R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager. N. Y.: John Wiley and sons, 1987.
6. **Oliveira P. J., Pinho F. T.** Analytical solution for fully developed channel and pipe flow of Phan-Thien — Tanner fluids // J. Fluid Mech. 1999. V. 387. P. 271–280.
7. **Cruz D. O. A., Pinho F. T., Oliveira P. J.** Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2005. V. 132. P. 28–35.
8. **Vinogradov G. V., Pokrovsky V. H., Yanovsky Yu. G.** Theory of viscoelastic behaviour of linear polymers in unimolecular approximation and its experimental verification // Rheol. Acta. 1972. V. 11, N 3/4. P. 258–274.

9. **Pokrovskii V. N., Altukhov Yu. A., Pyshnograi G. V.** The mesoscopic approach to the dynamics of polymer melts: consequences for the constitutive equation // J. Non-Newton Fluid Mech. 1998. V. 76, N 1–3. P. 153–181.
10. **Алтухов Ю. А.** Введение в мезоскопическую теорию текучести полимерных систем / Ю. А. Алтухов, А. С. Гусев, Г. В. Пышнограй. Барнаул: Алт. гос. пед. акад, 2012.
11. **Кузнецова Ю. Л., Скульский О. И.** Влияние режимов течения на расслоение сдвигового потока жидкости с немонотонной кривой течения // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 1. С. 27–36.
12. **Блохин А. М., Ткачев Д. Л.** Неустойчивость по Ляпунову стационарных течений полимерной жидкости в канале с перфорированными стенками // Мат. сб. 2022. Т. 213, № 3. С. 3–20.
13. **Блохин А. М., Семисалов Б. В.** Расчет стационарных неизотермических МГД-течений полимерной жидкости в каналах с внутренними нагревательными элементами // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 2. С. 17–40.
14. **Головичева И. Э., Пышнограй Г. В., Попов В. И.** Обобщение закона Пуазейля на основе реологического определяющего соотношения полимерных жидкостей // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 158–163.
15. **Choueiri G. H., Lopez J. M., Varshney A., et al.** Experimental observation of the origin and structure of elasto-inertial turbulence // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2021. V. 118, N 45. e2102350118.
16. **Блохин А. М., Семисалов Б. В.** Стационарное течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 4. С. 38–47.
17. **Головичева И. Э., Зинович С. А., Пышнограй Г. В.** Влияние молекулярной массы на сдвиговую и продольную вязкость линейных полимеров // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 154–160.

Поступила в редакцию 6/II 2023 г.,
после доработки — 15/III 2023 г.
Принята к публикации 27/III 2023 г.