ФИЛЬТРАЦИЯ С ПОЛОСЫ ПРИ НАЛИЧИИ СОЛЕНЫХ ПОДПОРНЫХ ВОД

В. Н. Эмих
(*Новосибирск*)

С полосы или из канала бесконечно малой глубины пресная вода плотностью ρ_1 фильтруется в грунт с коэффициентом фильтрации k, содержащий соленые подпорные воды плотности ρ_2 $(\rho_2 > \rho_1)$. Пресная вода продавливает поверхность соленых, растекаясь в стороны и испаряясь (фиг. 1). Между пресными и солеными водами существует переходная зона. Ее толщина обычно невелика. Поэтому можно считать, что между пресной и соленой водой имеется резкая граница раздела. Это и делается в данной схеме.

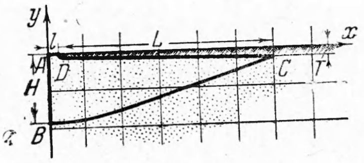
Рассматривается установившееся движение. Ввиду симметрии достаточно ограничиться правой половиной области движения. Оси координат выберем, как указано *на фиг. 1*. Примем следующие условия:

$$\varphi = 0, \quad y = 0 \text{ вдоль } AD$$

$$\psi = 0, \quad x = 0 \text{ вдоль } AB$$

Тогда получим

$$\varphi + ky = 0, \quad \psi + \varepsilon x = (\varepsilon_0 + \varepsilon)\, l \quad \text{на } CD$$

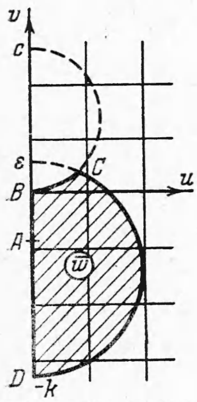


Фиг. 1

Здесь ε_0 — средняя инфильтрация и $\varepsilon > 0$ — испарение, которое принимается постоянным с единицы горизонтальной проекции на всей свободной поверхности.

Наконец, условие непрерывности давления при переходе через поверхность раздела и постоянства потенциала в зоне соленой воды приводит к уравнению для φ на BC, аналогичному уравнению на свободной поверхности (см. [1], гл. VIII, § 9)

$$\varphi - cy = (k + c)\, T \qquad \left(c = k\,\frac{\rho_2}{\rho_1 - 1}\right) \qquad (\psi = 0 \text{ на } BC)$$



Фиг. 2

Здесь T — глубина залегания подпорных вод.

Форма решения зависит от соотношения c и ε. Рассмотрим следующие случаи

Первый случай $c > \varepsilon$.

Ни одна из угловых точек области годографа скорости (фиг. 2), построенной для правой половины области движения, не является общей точкой пересечения участков границ области w. Это не позволяет решать задачу методом годографа скорости (см. [2], § 73). Ниже дано ее решение путем применения аналитической теории линейных дифференциальных уравнений (см. [1], гл. VII) [3].

Предположим, что область z отображена на верхнюю полуплоскость ζ, причем угловым точкам области движения A, B, C и D приводятся в соответствие на действительной оси полуплоскости ζ точки 0, 1, a и ∞ (фиг. 3). Аффикс a подлежит определению. Для функций

$$Z = dz \,/\, d\zeta, \qquad F = d\omega \,/\, d\zeta \tag{1}$$

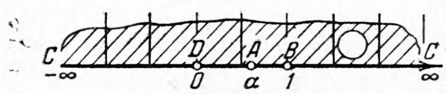
граничные условия, выписанные выше для функций $z = x + iy$ и $\omega = \varphi + i\psi$, имеют вид

$$\operatorname{Im} iF = 0, \quad \operatorname{Im} Z = 0 \quad \text{на } AD$$

$$\operatorname{Im} F = 0, \quad \operatorname{Im} iZ = 0 \quad \text{на } AB$$

$$\operatorname{Im} i\,(F + icZ) = 0, \quad \operatorname{Im} F = 0 \text{ на } BC$$

$$\operatorname{Im}(F - i\varepsilon Z) = 0, \quad \operatorname{Im} i(F - ikZ) = 0 \text{ на } CD$$



Фиг. 3

В окрестности каждой угловой точки функции (1) являются определенными линейными комбинациями некоторых функций W_1 и W_2, области которых в окрестности данной точки суть углы с прямолинейными границами (см. [4], § 21). Функции W_1 и W_2 можно, следовательно, искать как решение дифференциального уравнения класса Фукса (см. [5], гл. IV), (см. [6], гл. V), для которого угловые точки будут регулярными особыми точками.

Приводим значения показателей α' и α'' в этих точках

Точки	0	a	1	∞
$\alpha' =$	0	$-1/2$	0	α_1'
$\alpha'' =$	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	α_2'

Здесь

$$\alpha_1' = 2 - \delta \qquad \alpha_2' = 1 + \delta \qquad \left(\delta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\varepsilon (c+k)}{k (c-\varepsilon)}}\right)$$

Искомое решение определится следующим символом Римана:

$$Z_1 = P \begin{Bmatrix} 0 & a & 1 & \infty & \\ 0 & -1/2 & 0 & \alpha_1' & \zeta \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & \alpha_2' & \end{Bmatrix} =$$

$$= (\zeta - a)^{-\frac{1}{2}} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \zeta \\ -1/2 & -1/2 & \alpha_2 & \end{Bmatrix} = (\zeta - a)^{-\frac{1}{2}} Y$$

где $\alpha_1 = \alpha_1' - 1/2$, $\alpha_2 = \alpha_2' - 1/2$.

Как видим, точка $\zeta = a$ является устранимой особой точкой для Y_1 и обыкновенной для Y. Функции Y соответствует гипергеометрическое уравнение с тремя особыми точками: 0, 1 и ∞

$$\frac{d^2Y}{d\zeta^2} + \left[\frac{3}{2\zeta} + \frac{3}{2(\zeta - 1)}\right] \frac{dY}{d\zeta} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\zeta (\zeta - 1)} Y = 0 \tag{2}$$

Искомые функции (1) выражаются в конечном счете через гипергеометрические функции, являющиеся решением уравнения (2). Последние же выражаются посредством соотношений Гаусса через тригонометрические и гиперболические функции. Приводим полученные уравнения различных участков границ областей z и ω в параметрическом виде.

Участок AD

$$(0 < \zeta < a, \ 0 < t < \arcsin \sqrt{a}; \ \zeta = \sin^2 t)$$

$$dz / dt = B(\mu\delta^{-1} \sin 2\delta t - 2\cos 2\delta t)(a - \sin^2 t)^{-1/2}$$

$$d\omega / dt = -iB(2k \cos 2\delta t + \mu\varepsilon\delta^{-1} \sin 2\delta t)(a - \sin^2 t)^{-1/2} \tag{3}$$

Участок AB

$$(a < \zeta < 1, \ \operatorname{ars} \sin \sqrt{a} < t < 1; \ \zeta = \sin^2 t)$$

$$dz / dt = iB(\mu\delta^{-1} \sin 2\delta t - 2\cos 2\delta t)(\sin^2 t - a)^{-1/2}$$

$$d\omega / dt = B(2k \cos 2\delta t + \mu\varepsilon\delta^{-1} \sin 2\delta t)(\sin^2 t - a)^{-1/2} \tag{4}$$

Свободная поверхность CD

$$(-\infty < \zeta < 0, \ \infty > t > 0; \ \zeta = \sin^2 it = -\operatorname{sh}^2 t)$$

$$dz / dt = -B(\mu\delta^{-1} \operatorname{sh} 2\delta t + i2 \operatorname{ch} 2\delta t)(a + \operatorname{sh}^2 t)^{-1/2}$$

$$d\omega / dt = B(2k \operatorname{ch} 2\delta t + i\mu\varepsilon\delta^{-1} \operatorname{sh} 2\delta t)(a + \operatorname{sh}^2 t)^{-1/2} \tag{5}$$

Поверхность раздела BC

$$(1 < \zeta < \infty, \ 0 < t < \infty; \ 1 - \zeta = \sin^2 it = -\operatorname{sh}^2 t)$$

$$dz / dt = (B / c \cos \pi\delta)[2(c + k) \operatorname{ch} 2\delta t - i\mu\varepsilon \operatorname{sh} 2\delta t](\operatorname{ch}^2 t - a)^{-1/2}$$

$$d\omega / dt = (B\mu\varepsilon / \delta \cos \pi\delta) \operatorname{sh} 2\delta t (\operatorname{ch}^2 t - a)^{-1/2} \tag{6}$$

В этих уравнениях

$$\mu = -\frac{2\delta k}{\varepsilon} \operatorname{ctg} \delta\pi$$

Для $k = 1$ *м / сут*, $\rho_1 = 1$ *г / см*^{3}, $\rho_2 = 1.1$ *г / см*^{3} ($c = 0.1$ *м / сут*) и $\varepsilon = 0.01$ *м / сут* по первым уравнениям (5) и (6) был выполнен расчет параметра a, координат свободной поверхности DC и границы раздела BC на электронной вычислительной машине Сибирского отделения АН СССР. Для определения параметра a задавалось отношение половины ширины полосы l к глубине залегания подпорных вод T (до инфильтрации), т. е. использовались первые уравнения (3) и (5).

Величина T взята равной 1 *м*. По результатам вычислений координат (l в *м*), приведенным ниже, построены соответствующие графики.

1. Для $l/T = 1$ (фиг. 1).

Координаты свободной поверхности

$x - l =$	0.0012	0.0049	0.0193	0.0744	0.2654	0.8099	0.2729
$-y =$	0.0089	0.0177	0.0352	0.0688	0.1276	0.2133	0.3168
$x - l =$	4.537	9.083	15.242	20.887	23.412	23.728	23.732
$-y =$	0.4346	0.579	0.7572	0.9189	0.9914	0.9999	1.0000

Координаты поверхности раздела

$x =$	0.0526	0.1053	0.2105	0.421	0.841	1.671	3.28
$y + H =$	0.00007	0.00026	0.0011	0.0042	0.0167	0.066	0.2495
$x =$	6.17	10.75	16.68	22.0	24.5	24.79	24.8
$y + H =$	0.825	2.11	3.98	5.7	6.46	6.549	6.55

2. Для $l/T = 5.23$ (фиг. 4).

Координаты свободной поверхности

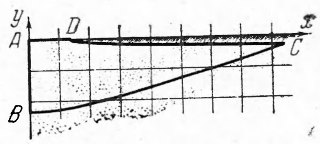
$x - l =$	0.00038	0.00153	0.00611	0.0244	0.0966	0.3755
$-y =$	0.00278	0.00547	0.01123	0.02208	0.0442	0.0871
$x - l =$	1.342	4.06	9.56	17.35	24.5	27.7	28.0
$-y =$	0.165	0.29	0.467	0.692	0.904	0.986	1.00

Координаты поверхности раздела:

$x =$	0.0928	0.1855	0.3705	0.741	1.477	2.9
$y + H =$	0.000116	0.00046	0.00185	0.0074	0.0294	0.1136
$x =$	5.5	9.98	15.6	23.04	29.95	33.0	33.3
$y + H =$	0.407	1.232	2.9	5.25	7.45	8.4	8.525

Второй случай $c < \varepsilon$.

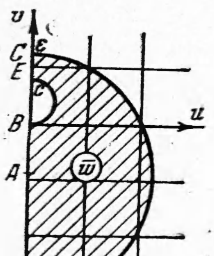
В этом случае участки границы области годографа скорости (фиг. 5) также не имеют ни одной общей точки пересечения. Свободная поверхность DC переходит в горизонтальный участок CE, с которого происходит испарение с убывающей интенсивностью. Область w, ограниченную двумя аполлониевыми окружностями и ортогональными к ним отрезками прямых, можно отобразить на прямоугольник посредством функции



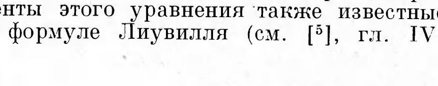
Фиг. 4

$$\tau = \ln [(\overline{w} + ai) / (\overline{w} + bi)]$$

Константы a и b определяются. Затем при помощи формулы Кристоффеля — Шварца прямоугольник τ отображается на верхнюю полуплоскость ζ (фиг. 6) и, таким образом, получается выражение для $w = w(\zeta)$. Но $w = d\omega / dz = \Omega / Z$, т. е. известно отношение искомых решений линейного дифференциального уравнения второго порядка; коэффициенты этого уравнения также известные функции ζ. По формуле Лиувилля (см. [5], гл. IV) найдены



Фиг. 5



Фиг. 6

Z и Ω, выражения для которых на различных участках действительной оси полуплоскости ζ приводятся ниже.

Участок AD $(0 < \zeta < \alpha)$

$$Z = \frac{dz}{d\zeta} = -\frac{B}{\sqrt{p}} \operatorname{sh} \frac{\vartheta_1}{2}, \qquad \Omega = \frac{d\omega}{d\zeta} = -\frac{iB}{\sqrt{p}} \left[-\alpha_1 \operatorname{sh} \frac{\vartheta_1}{2} + \beta_1 \operatorname{ch} \frac{\vartheta_1}{2} \right] \tag{7}$$

Участок AB $(\alpha<\zeta<1)$

$$Z=\frac{dz}{d\zeta}=-\frac{B}{\sqrt{p}}\operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{2}, \quad \Omega=-\frac{iB}{\sqrt{p}}\left[-\alpha_1\operatorname{sh}\frac{\vartheta_1}{2}+\beta_1\operatorname{ch}\frac{\vartheta_1}{2}\right] \tag{8}$$

Свободная поверхность CD $(-\infty<\zeta<0)$

$$Z=\frac{dz}{d\zeta}=-\frac{iB}{\sqrt{p}}[\operatorname{ch}\ln\sqrt{c_1}\sin\theta_1-i\operatorname{sh}\ln\sqrt{c_1}\cos\theta_1]$$

$$\Omega=\frac{d\omega}{d\zeta}=-\frac{iB}{\sqrt{p}}[(-\alpha_1\operatorname{sh}\ln\sqrt{c_1}+\beta_1\operatorname{ch}\ln\sqrt{c_1})\cos\theta_1+$$
$$+i(-\alpha_1\operatorname{ch}\ln\sqrt{c_1}+\beta_1\operatorname{sh}\ln\sqrt{c_1})\sin\theta_1] \tag{9}$$

Участок CE $(\beta<\zeta<\infty)$

$$Z=\frac{dz}{d\zeta}=-\frac{iB}{\sqrt{p}}\operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2}, \quad \Omega=\frac{d\omega}{d\zeta}=\frac{B}{\sqrt{p}}\left[\alpha_1\operatorname{ch}\frac{\vartheta_2}{2}+\beta_1\operatorname{sh}\frac{\vartheta_2}{2}\right] \tag{10}$$

Поверхность раздела BE $(1<\zeta<3)$

$$Z=\frac{dz}{d\zeta}=\frac{-B}{\sqrt{p}}[\operatorname{sh}\ln\sqrt{c_0}\sin\theta_2+i\operatorname{ch}\ln\sqrt{c_0}\cos\theta_2] \tag{11}$$

$$\Omega=\frac{d\omega}{d\zeta}=\frac{B}{\sqrt{p}}[(\alpha_1\operatorname{ch}\ln\sqrt{c_0}-\beta_1\operatorname{sh}\ln\sqrt{c_0})\cos\theta_2-$$
$$-i(\alpha_1\operatorname{sh}\ln\sqrt{c_0}-\beta_1\operatorname{ch}\ln\sqrt{c_0})\sin\theta_2]$$

В формулах (7) — (11) приняты следующие обозначения:

$$p=p(\zeta)=\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)(\beta-\zeta) \tag{12}$$

$$\vartheta_1(\zeta)=\pi F\left(\arcsin\sqrt{\zeta},\ \sqrt{\frac{1}{\beta}}\right)\Big/K\left(\sqrt{1-\frac{1}{\beta}}\right)+\ln C_1 \tag{13}$$

$$\theta_1(\zeta)=\pi F\left(\arcsin\sqrt{\frac{-\zeta}{1-\zeta}},\ \sqrt{1-\frac{1}{\beta}}\right)\Big/2K\left(\sqrt{1-\frac{1}{\beta}}\right)$$

$$\vartheta_2(\zeta)=\pi F\left(\arcsin\sqrt{\frac{\zeta-\beta}{\zeta-1}},\ \sqrt{\frac{1}{\beta}}\right)\Big/2K\left(\sqrt{1-\frac{1}{\beta}}\right)-\ln C_0$$

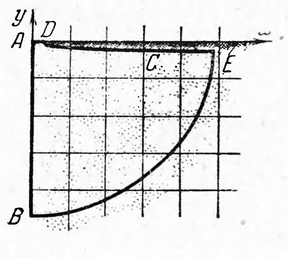
$$\theta_2(\zeta)=\pi F\left(\arcsin\sqrt{\frac{\beta-\zeta}{\beta-1}},\ \sqrt{1-\frac{1}{\beta}}\right)\Big/2K\left(\sqrt{1-\frac{1}{\beta}}\right)$$

При этом функции $K(\lambda)$ и $F(\arcsin u,\lambda)$ — эллиптические интегралы первого рода

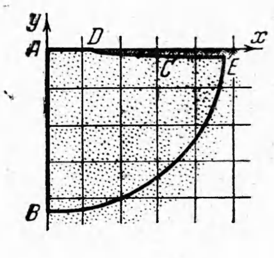
$$C_0=\frac{\sqrt{\varepsilon k}+\sqrt{(c+k)(\varepsilon-c)}}{\sqrt{\varepsilon k}-\sqrt{(c+k)(\varepsilon-c)}}, \quad C_1=\frac{\sqrt{k(c+k)}+\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-c)}}{\sqrt{k(c+k)}-\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-c)}}$$

$$\alpha_1=\varepsilon k/(c-\varepsilon+k), \quad \beta_1=\sqrt{\varepsilon k(c+k)(\varepsilon-c)}/(c-\varepsilon+k)$$

Координаты свободной поверхности и поверхности раздела подсчитаны по первым уравнениям (9) и (11) на вычислительной машине. Предварительно из



Фиг. 7



Фиг. 8

первых уравнений (7) и (9) путем задания отношения l/T вычисляется параметр α. Параметр β определяется из соотношения

$$\pi K(\sqrt{1/\beta})/K(\sqrt{1-1/\beta})=\ln(C_0/C_1)$$

Приводим результаты некоторых вычислений при $k = 1$ *м / сут*, $\varepsilon = 0.03$ *м / сут*, $c = 0.01$ *м / сут* ($\rho_1 = 1$ *г / см*^{3}, $\rho_2 = 1.01$ *г / см*^{3}).

1) Для $l / T = 1$ *м* (фиг. 7).

Координаты свободной поверхности

$x - l =$	0.1354	0.439	0.802	1.191	1.593	2.08	2.44	2.88	3.34	3.82
$-y =$	0.208	0.348	0.45	0.529	0.59	0.644	0.689	0.726	0.761	0.794
$x - l =$	4.31	4.83	5.37	5.95	6.57	7.2	8.0	8.84	9.82	11.03
$-y =$	0.822	0.85	0.873	0.897	0.918	0.938	0.958	0.975	0.989	1.00

Координаты поверхности раздела

$x =$	3.05	5.92	8.45	10.62	12.4	13.83	14.99	15.92	16.67	17.27
$y + H =$	0.2	0.91	1.86	3.01	4.24	5.49	6.58	7.83	8.94	9.96
$x =$	17.76	18.15	18.475	18.73	18.93	19.09	19.206	19.29	19.33	19.35
$y + H =$	10.91	11.81	12.67	13.49	14.27	15.03	15.77	16.49	17.2	17.91

2) Для $l / T = 11.828$ *м* (фиг. 8).

Координаты свободной поверхности

$x - l =$	0.0455	0.1815	0.406	0.716	1.109	1.585	2.14	2.785	3.47	4.25
$-y =$	0.0647	0.1285	0.192	0.254	0.315	0.374	0.432	0.487	0.541	0.592
$x - l =$	5.11	6.06	7.1	8.2	9.47	10.89	12.47	13.95	17.45	19.1
$-y =$	0.643	0.691	0.739	0.783	0.824	0.868	0.907	0.945	0.97	1.0

Координаты поверхности раздела

$x =$	7.8	15.2	21.6	26.95	31.25	34.7	37.47	39.65	41.4	42 82	43 94
$y + H =$	0.5	2.1	4.6	7.5	10.5	13.4	16.3	19.0	21.55	23 9	26 15

$x =$	44.86	45.55	46.18	46.65	47.003	47.27	47.46	47.5	47.6
$y + H =$	28.25	30.2	32.1	33.87	35.61	37.31	38.96	40.6	42.2

Как видно из графиков, вследствие незначительности испарения свободная поверхность оказывается очень пологой. При расчетах интенсивность испарения вдоль всей свободной поверхности предполагалась постоянной. В действительности же эта величина убывает с глубиной, и допущение может быть приемлемым только для небольших глубин T.

Графики отражают также известную закономерность: рост глубины продавливания H с убыванием разности плотностей пресных и соленых вод. Величина H может быть весьма большой. Отметим два частных случая:

а) В случае $c = \varepsilon$ точка C $(0, \varepsilon)$ находится на оси v области w и является общей точкой пересечения границ области w. Уравнения для Z и Ω могут быть получены как при помощи метода конформных отображений, так и путем предельного перехода в уравнениях (3)—(7) при $\delta = 0$, $\mu = -2k/\varepsilon\pi$.

б) В случае $c = 0$ плотности инфильтрирующейся и подпорной воды одинаковы. Точка E на области z уходит в ∞ и совпадает с точкой B, а область годографа скорости w превращается в полукруг. Задача, следовательно, также может быть решена методом конформных отображений или путем предельного перехода при $\beta = 1$ в уравнениях (7)—(11).

Для функций z и ω получаются уравнения, содержащие эллиптические интегралы третьего рода. Последние же выражаются через эллиптические интегралы первого рода (см. [7], гл. V).

Автор благодарит П. Я. Полубаринову-Кочину, под руководством которой проводилось исследование.

Поступила 7 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
2. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. Гостехиздат, 1953.
3. Ризенкампф Б. К. Гидравлика грунтовых вод. Ч. III. Уч. зап. Саратовского ун-та, 1940, т. XV, вып. 2.
4. Ризенкампф Б. К. Гидравлика грунтовых вод. Ч. II. Уч. зап. Саратовского ун-та, 1938, т. XIV, вып. 2.
5. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1950.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Ч. II. Гостехиздат, 1956, т. III.
7. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. ОНТИ, 1936.