

УДК 512.643

О матрицах с диагонализуемыми коквадратами, имеющими вещественный спектр

Х.Д. Икрамов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 15, 2022.

Икрамов Х.Д. О матрицах с диагонализуемыми коквадратами, имеющими вещественный спектр // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 1. — С. 53–57.

Показано, что предложенный автором ранее алгоритм проверки конгруэнтности для матриц, являющихся квадратными корнями из эрмитовых матриц, может быть распространен на значительно более широкий класс матриц, имеющих диагонализуемые коквадраты с вещественным спектром.

DOI: 10.15372/SJNM20220104

Ключевые слова: конгруэнция, коквадрат, рациональный алгоритм, диагонализуемость посредством подобия.

Ikramov Kh.D. On matrices whose cosquares are diagonalizable and have real spectra // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 1. — P. 53–57.

It is shown that the algorithm for verifying congruence of square roots of Hermitian matrices proposed earlier by the author can be extended to the considerably more broad class of matrices whose cosquares are diagonalizable and have real spectra.

Keywords: congruence, cosquare, rational algorithm, diagonalizability via similarity transformation.

1. Коквадратом невырожденной комплексной матрицы A называется матрица

$$C_A = A^{-*}A. \quad (1)$$

Символ A^{-*} означает последовательное применение к матрице A операций обращения и сопряжения (в любом порядке). Жорданова структура коквадрата в значительной мере определяет каноническую форму A относительно конгруэнций, которые в данной статье понимаются как преобразования вида

$$A \rightarrow P^*AP,$$

где P — произвольная невырожденная матрица. Например, если C_A — диагонализуемая матрица с унимодулярным спектром, то каноническая форма A является диагональной матрицей. (Напомним, что матрицы, диагонализуемые посредством конгруэнций, называются юнитоидами.)

Коквадраты играют важную роль и в решении других задач, связанных с конгруэнтными преобразованиями. К примеру, для конгруэнтности матриц A и B необходимо,

чтобы их коквадраты C_A и C_B были подобны. Если в спектре коквадратов нет унимодулярных чисел, то подобие C_A и C_B есть в то же время и достаточное условие для конгруэнтности A и B .

Важно, что проверка упоминаемых здесь свойств — диагонализуемости матрицы посредством подобия, унимодулярности спектра, отсутствия унимодулярных собственных значений, подобия матриц — может быть проведена с помощью *рациональных алгоритмов*, т. е. конечных алгоритмов, использующих только арифметические операции.

К сожалению в настоящее время не существует рационального алгоритма, позволяющего проверить конгруэнтность (или ее отсутствие) для произвольных квадратных матриц A и B . Однако имеются рациональные алгоритмы, проверяющие конгруэнтность пар (A, B) , принадлежащих тому или иному классу специальных матриц. Примерами могут быть классы эрмитовых, унитарных, аккретивных и диссипативных матриц.

В недавней публикации автора [1] предложен рациональный алгоритм для проверки конгруэнтности матриц A и B , являющихся квадратными корнями из невырожденных эрмитовых матриц. Краткое изложение этого алгоритма дано в пункте 2. Цель настоящей статьи — показать, что, помимо названного довольно экзотичного матричного класса, тот же самый алгоритм может быть применен к значительно более широкому множеству матриц, коквадраты которых диагонализуются посредством подобия и имеют вещественный спектр. Это сделано в п. 3.

2. Для любой (невырожденной) матрицы A матрица вида (1) имеет следующее замечательное спектральное свойство: если λ — собственное значение матрицы C_A , то число $1/\bar{\lambda}$ также является ее собственным значением, причем жорданова структура C_A одинакова для обоих этих чисел. Если коквадрат оказывается эрмитовой матрицей, то сказанное означает: спектр C_A может состоять только из чисел 1, -1 и пар вида $(\lambda, 1/\bar{\lambda})$, где $\lambda \in \mathbf{R}$ и $\lambda \neq \pm 1$, причем собственные значения λ и $1/\bar{\lambda}$ имеют одинаковую кратность.

Именно так обстоит дело, если невырожденная матрица A есть квадратный корень из некоторой эрмитовой матрицы. В этом случае из равенства $(A^2)^* = A^2$, т. е.

$$A^* A^* = A A, \quad (2)$$

следует, что $A^* A^{-1} = A^{-*} A$, или

$$(A^{-*} A)^* = A^{-*} A. \quad (3)$$

Замечание. Верно и обратное: если коквадрат C_A матрицы A является эрмитовой матрицей, т. е. выполнено (3), то верно равенство (2), т. е. A есть квадратный корень из эрмитовой матрицы.

Алгоритм из статьи [1] предполагает, что заданные матрицы A и B суть квадратные корни из эрмитовых матриц, и начинает работу с построения коквадратов C_A и C_B и проверки их подобия, являющегося необходимым условием конгруэнтности A и B . Заметим, что в популярной системе Matlab подобие матриц проверяет рациональная процедура `IsSimilar`. Однако в случае эрмитовых матриц C_A и C_B вместо использования этой процедуры проще построить и сравнить характеристические многочлены f и g обеих матриц. Если f и g различны, то C_A и C_B не подобны, а A и B не конгруэнтны. В этом случае работа алгоритма закончена.

Пусть оказалось, что $f = g$. Следующий шаг алгоритма — проверка наличия в (общем) спектре коквадратов C_A и C_B чисел 1 и -1 . Иначе говоря, проверяются условия

$f(1) = 0$ и $f(-1) = 0$. Если оба эти условия не выполнены, то спектр коквадратов состоит только из пар вида $(\lambda, 1/\lambda)$, где $\lambda \neq \pm 1$. Как отмечено в п. 1, в этом случае подобие коквадратов влечет за собой конгруэнтность матриц A и B .

Предположим, что выполнено условие $f(1) = 0$. Следующее действие алгоритма состоит в преобразовании коквадрата C_A посредством подобия

$$C_A \rightarrow \tilde{C}_A = X^{-1}C_A X \quad (4)$$

к виду

$$\tilde{C}_A = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \tilde{C} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Здесь k — кратность единицы как собственного значения матрицы C_A . Таким образом, в спектре подматрицы $\tilde{C}$ уже нет числа 1.

Матрица X для преобразования (4) составляется следующим образом: первые k столбцов этой матрицы образуют базис собственного подпространства матрицы C_A для $\lambda = 1$, а остальные $l = n - k$ столбцов — базис его ортогонального дополнения. И то, и другое можно найти с помощью рациональных процедур. Например, собственные векторы для $\lambda = 1$ могут быть вычислены методом Гаусса как фундаментальные решения однородной системы линейных уравнений $(A - I)x = 0$.

Завершив подобие (4), алгоритм выполняет конгруэнцию

$$A \rightarrow \tilde{A} = X^* A X. \quad (6)$$

Как показано в [1], результатом является матрица блочно-диагонального вида

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\tilde{A}_{11}$ — матрица порядка k , имеющая I_k своим коквадратом. Такая матрица обязана быть эрмитовой. Подматрица $\tilde{C}$ в (5) есть коквадрат подматрицы $\tilde{A}_{22}$.

Аналогичные операции производятся с матрицами B и C_B , т. е. последовательно выполняются подобие

$$C_B \rightarrow \tilde{C}_B = Y^{-1}C_B Y = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \tilde{D} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где трансформирующая матрица Y вычисляется по рецепту, выписанному выше для матрицы X , и конгруэнция

$$B \rightarrow \tilde{B} = Y^* B Y = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Эрмитова подматрица $\tilde{B}_{11}$ имеет порядок k , а коквадратом подматрицы $\tilde{B}_{22}$ является $\tilde{D}$.

Для конгруэнтности матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ необходима конгруэнтность их подматриц $\tilde{A}_{11}$ и $\tilde{B}_{11}$. Конгруэнтность этих эрмитовых подматриц равносильна требованию, чтобы совпадали их положительные и отрицательные индексы инерции. Это требование может быть проверено рациональным вычислением, что и является очередным шагом алгоритма.

Будем считать, что $\tilde{A}_{11}$ и $\tilde{B}_{11}$ конгруэнтны. Теперь вопрос о конгруэнтности исходных матриц A и B сводится к конгруэнтности подматриц $\tilde{A}_{22}$ и $\tilde{B}_{22}$ в матрицах (7) и (9).

(Здесь и в аналогичных ситуациях ниже мы используем теорию канонической формы относительно конгруэнций, как она описана в [2, раздел 4.5], смотри, в частности, [2, теорема 4.5.21] и [2, теорема 4.5.22].) Коквадраты $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$ этих подматриц подобны, и если коквадраты не имеют собственного значения -1 , то $\tilde{A}_{22}$ и $\tilde{B}_{22}$ конгруэнтны.

Минус единица присутствует в спектре $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$, если на более раннем этапе алгоритма было выполнено условие $f(-1) = 0$. В этом случае сначала к матрицам $\tilde{C}$ и $\tilde{A}_{22}$, а затем к матрицам $\tilde{D}$ и $\tilde{B}_{22}$ применяется (с заменой $\lambda = 1$ на $\lambda = -1$) процедура расщепления, описанная выше. Она порождает матрицы:

$$\begin{aligned}\hat{C} &= V^{-1}\tilde{C}V = \begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}, \\ \hat{A}_{22} &= V^*\tilde{A}_{22}V = \begin{pmatrix} \hat{A}_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \\ \hat{D} &= W^{-1}\tilde{D}W = \begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \\ \hat{B}_{22} &= W^*\tilde{B}_{22}W = \begin{pmatrix} \hat{B}_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & \hat{B}_{22}^{(2)} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Здесь m — кратность собственного значения -1 в обоих коквадратах. Подматрицы $\hat{A}_{22}^{(1)}$ и $\hat{B}_{22}^{(1)}$, имеющие своим коквадратом матрицу $-I_m$, являются косоэрмитовыми, т. е. лишь множителем i отличаются от эрмитовых матриц. Их конгруэнтность может быть проверена вычислением индексов инерции. Подматрицы $\hat{A}_{22}^{(2)}$ и $\hat{B}_{22}^{(2)}$ обязаны быть конгруэнтными. Поэтому, если конгруэнтны $\hat{A}_{22}^{(1)}$ и $\hat{B}_{22}^{(1)}$, то делается вывод о конгруэнтности исходных матриц A и B . В противном случае A и B не конгруэнтны.

3. Из анализа алгоритма, описанного в п. 2, следует, что эрмитово свойство коквадратов играет в нем второстепенную роль. Гораздо более важны спектральные особенности, отличающие эрмитовы матрицы, а именно их диагонализуемость и вещественность спектра.

Итак, предположим, что для заданных матриц A и B коквадраты $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_B$ подобны. При этом $\mathcal{C}_A$ (а значит, и $\mathcal{C}_B$) есть диагонализуемая матрица с вещественным спектром. Оба этих свойства могут быть проверены рациональным вычислением. Диагонализуемость матрицы эквивалентна требованию, чтобы ее минимальный многочлен имел лишь простые корни, т. е. был бы взаимно прост со своей производной. Вещественность же всех корней характеристического многочлена f матрицы $\mathcal{C}_A$ означает, что сам этот многочлен, с точностью до коэффициента при старшем члене, является вещественным.

Число вещественных корней вещественного многочлена может быть найдено методом Штурма, реализованным в Matlab процедурой `sturm`. Что касается минимального многочлена, то его вычисляет процедура `minpoly`.

По-существу, если для заданных матриц A и B коквадраты $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_B$ суть (не обязательно эрмитовы) диагонализуемые матрицы с вещественным спектром, то в алгоритм из п. 2 нужно внести единственное изменение. Оно касается построения матриц, осуществляющих расщепление коквадратов посредством подобию и расщепление матриц A и B посредством конгруэнций. Для определенности обсудим переход (4) от $\mathcal{C}_A$ к $\hat{\mathcal{C}}_A$ и переход (6) от A к $\hat{A}$. Если $\mathcal{C}_A$ — эрмитова матрица, то ортогональное дополнение к ее собственному подпространству $\mathcal{L}_1$ для $\lambda = 1$ является для $\mathcal{C}_A$ инвариантным подпро-

пространством. Это не так в неэрмитовом случае. Из соотношений двойственности между инвариантными подпространствами сопряженных матриц следует, что инвариантное подпространство, дополняющее $\mathcal{L}_1$ до всего пространства, нужно искать теперь как ортогональное дополнение не к $\mathcal{L}_1$, а к собственному подпространству $\mathcal{M}_1$ для $\lambda = 1$ сопряженной матрицы C_A^* . Построению базиса этого инвариантного подпространства должно предшествовать вычисление базиса для $\mathcal{M}_1$.

Литература

1. **Икрамов Х.Д.** Квадратные корни из эрмитовых матриц и рациональный алгоритм для проверки их конгруэнтности // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2019. — № 3. — С. 11–16. Перевод: Kh.D. Ikramov. Square roots of hermitian matrices and a rational algorithm for checking their congruence. — Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2019. — Vol. 43, № 3. — P. 95–100.
2. **Horn R.A., Johnson C.R.** Matrix Analysis. Second ed. — Cambridge University Press, 2013.

Поступила в редакцию 26 мая 2021 г.

После исправления 16 июля 2021 г.

Принята к печати 5 октября 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Ikramov H.D.** Kvadratnye korni iz ermitovykh matrity i ratsional'nyi algoritm dlya proverki ikh kongruentnosti // Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15: Vychislitel'naya matematika i kibernetika. — 2019. — № 3. — S. 11–16. Perevod: Kh.D. Ikramov. Square roots of hermitian matrices and a rational algorithm for checking their congruence. — Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2019. — Vol. 43, № 3. — P. 95–100.
2. **Horn R.A., Johnson C.R.** Matrix Analysis. Second ed. — Cambridge University Press, 2013.

