параметры орбиты меняются лишь на величины $O(|a| + |b|)$, то монотонная зависимость угла φ и времени t меняется мало. Поэтому рассмотренное выше оптимальное управление углом θ дает приближенное решение задачи о достижении за кратчайшее время определенного порядка $O(|a| + |b|)$ приращения эксцентриситета оскулирующей орбиты.

12. Сравнение движений по параболической орбите и логарифмической спирали. Для параболической орбиты имеем [6] (стр. 290) выражение радиуса $r_2(t)$ через время

$$r_1(t) = [r_0^{3/2} + 1.5\sqrt{2k}\,(t - t_0)]^{2/3} \tag{12.1}$$

Интегрируя (1.9), (1.10) по φ и считая x^*, $y^* = \text{const}$ (6.1), получим для траектории в виде логарифмической спирали

$$r_2(t) = [r_0^{3/2} + 1.5y^*\sqrt{k}\,(x^*)^{-1/2}(t - t_0)]^{2/3} \tag{12.2}$$

Если предположить $a, b \ll 1$, то отношение

$$1.5y^*\sqrt{k}\,(x^*)^{-1/2} : 1.5\sqrt{2k} = b\sqrt{2x^*} = \sqrt{2}\,(b + 0.5ab + b^3) + O(a^2b + b^5) \tag{12.3}$$

показывает следующее. Для достижения больших значений r выгоднее предварительно достигнуть параболической скорости (не говоря уже о гиперболической скорости) и выключить парус, чем двигаться с невыключенным парусом по логарифмической спирали.

Поступила 12 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Garwin R. L. Solar sailing — a practical method of propulsion within the sola system. Jet Propulsion, 1958, 2, 188—190.
2. Цзу. Межпланетный полет с помощью солнечного паруса. Сб. пер. «Механика», 1961, № 1, 3—15.
3. Лондон Г. С. Некоторые точные решения уравнений движения космического корабля с солнечным парусом при постоянном угле установки паруса. Сб. пер. «Механика», 1961, № 1, 16—22.
4. Тангей А. Р. Маневры в космосе. Библ. сб. «Механика», «Космические траектории», ИЛ, 1963, 150—153.
5. Валеев К. Г. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения материальной точки под действием ньютоновой силы и дополнительных возмущающих сил. ПММ, т. XXVII, вып. 2,
6. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Физматгиз, 1963.
7. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. ИЛ, 1962.
8. Андронов А. А., Витт А. А. и Хайкин С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.
9. Янке Е. и Эмде. Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1949.

УПРОЩЕННЫЙ ВАРИАНТ ИНТЕГРАЛЬНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Р. Г. Баранцев, Б. В. Филиппов

(*Ленинград*)

Постановка задач аэродинамики одноатомных разреженных газов была дана в работе [1] в виде интегрального уравнения

$$f = Vf \tag{1}$$

для функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$. В [2] был предложен другой вариант интегрального кинетического оператора V, содержащий конечный временной радиус завязки $t-t_0$, который может играть роль произвольного параметра, принимающего любые значения[1] в пределах от нуля до $\tau_{\max} \leqslant \infty$.

В настоящей работе указана упрощенная форма оператора V при малых $t-t_0$ и отмечаются те возможности, которые открывает этот оператор для решения кинетических задач как на уровне самой функции распределения [3], так и в моментных приближениях [4].

[1] Б. В. Филиппов. Уравнения и постановка задач обтекания тел разреженным газом с учетом динамики адсорбционного слоя. Кандидатская диссертация, ЛГУ, 1963.

Напишем уравнение (1) в развернутом виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = f(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - t_*), \mathbf{u}, t_*)\, \Pi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t, t_*) + \tag{2}$$

$$+ \int_{t_*}^{t} \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau), \mathbf{u}, \tau)\, \Pi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t, \tau)\, d\tau \qquad t_* = \max\{t_0, t_s\}$$

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \iiiiiint_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|\, \sigma(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|)\, f(\mathbf{r}, \mathbf{u}_1, t)\, f(\mathbf{r}, \mathbf{u}_2, t)\, T(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u})\, d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 \tag{3}$$

$$\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t, \tau) = \exp\left\{-\int_{\tau}^{t} Q(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - q), \mathbf{u}, q)\, dq\right\} \tag{4}$$

$$Q(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1|\, \sigma(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1|)\, f(\mathbf{r}, \mathbf{u}_1, t)\, d\mathbf{u}_1 \tag{5}$$

$$f(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}, t)\,|_{u_n > 0} = -\iiint_{u_{1n} < 0} f(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}_1, t)\, \frac{u_{1n}}{u_n} T^\circ(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}, t)\, d\mathbf{u}_1 \tag{6}$$

Здесь $t_s = t_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ — наибольший, не превосходящий t корень уравнения $F(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - t_s)) = 0$, $F(\mathbf{r}_s) = 0$ — уравнение границы, n — внешняя нормаль; σ — сечение столкновения; T и T° — внутренняя и граничная ударные трансформанты [3]. Уравнение (1) получается подстановкой выражений (3) — (6) в (2). Оператор V содержит в общем случае 14 квадратур с промежуточными нелинейными операциями.

Непосредственное выполнение итераций

$$f_{n+1} = V f_n \tag{7}$$

в семимерном пространстве $x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, t$ является делом чрезмерно сложным. Даже в моментных приближениях [4], когда переменных остается четыре, а число квадратур в каждом операторе $V^{(m)}$ уменьшается до пяти, трудности все еще очень велики. Поэтому любые возможности упрощения оператора V стоят внимания.

Физический смысл параметра t_0 в уравнении (2) простой. Функция f в точке $\mathbf{r}$ в момент t связывается со значениями f в других точках $\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau)$ в предыдущие моменты времени $\tau \in [t_0, t)$. Каждому значению величины скорости u отвечает свой пространственный радиус завязки $\lambda_0 = u(t - t_0)$. Если сфера с таким радиусом захватывает участок границы, то в соответствующем телесном угле $\Omega_s(\mathbf{r}, u)$ лучи интегрирования в (2), выходящие из точки $\mathbf{r}$, обрываются в моменты $t_s > t_0$. В нестационарной задаче за t_0 можно брать любой момент времени между рассматриваемым и начальным. В стационарной задаче завязка по существу пространственная. В первоначальном варианте оператора V [1] $t_0 = -\infty$.

Ясно, что в каждой точке $\mathbf{r}$ в каждый момент времени t и для каждого вектора скорости $\mathbf{u}$ временной интервал завязки $t - t'$ можно брать разным. Следовательно, t_0 не просто произвольный параметр, но произвольная функция от $\mathbf{r}, \mathbf{u}, t$. Этот произвол содержит в себе хорошие возможности для оптимизации пути решения кинетических задач.

При малых $t - t_0$ оператор V, как увидим, допускает упрощения. Однако эти упрощения даются не даром. Дело в том, что когда t_0 приближается к t, оператор V ослабевает, вырождаясь в пределе в тождественный. При этом число необходимых итераций в процессе (7) увеличивается. В то же время каждый шаг сам по себе упрощается. С точки зрения машинного счета это, вообще говоря, выгодно. В целом существует, по-видимому, такая последовательность функций $t_0^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$, которая прокладывает оптимальный путь к решению.

Обозначим $\varepsilon = t - t_*$ и снабдим оператор V индексом ε, подчеркивая тем самым его зависимость от этого параметра. Функция f от ε, очевидно, не зависит.

Разложим

$$V_\varepsilon f \equiv f(\mathbf{r} - \varepsilon\mathbf{u}, \mathbf{u}, t - \varepsilon)\, \Pi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t, t - \varepsilon) + \int_{t-\varepsilon}^{t} \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau), \mathbf{u}, \tau)\, \Pi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t, \tau)\, d\tau \tag{8}$$

в степенной ряд в окрестности $\varepsilon = 0$.

Введем для f, Φ, Q со сдвинутыми аргументами разложения вида

$$f(\mathbf{u}-\varepsilon\mathbf{u},\ \mathbf{u},\ t-\varepsilon) = f(\mathbf{r},\ \mathbf{u},\ t) - \varepsilon\frac{d}{dt} f(\mathbf{r},\ \mathbf{u},\ t) + \ldots \qquad \left(\frac{d}{di} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right) \tag{9}$$

Получим

$$V_\varepsilon f = f - \varepsilon\left(\frac{df}{di} - \Phi + fQ\right) \qquad \text{(первое приближение)} \tag{10}$$

$$V_\varepsilon f = f - \varepsilon\left(\frac{df}{dt} - \Phi + fQ\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\left(Q + \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{df}{dt} - \Phi + fQ\right)\right] \qquad \text{(второе приближение)} \tag{11}$$

и т. д.

Естественно, что при локализации описания появился оператор Больцмана

$$Bf \equiv \frac{df}{di} - \Phi + fQ \tag{12}$$

Упрощенные операторы (10) и (11) являются приближенными. Точность их увеличивается с уменьшением ε, причем оценки можно делать равномерными, выбирая надлежащим образом функцию $t_0(\mathbf{r},\ \mathbf{u},\ t)$, входящую в ε.

Непосредственное влияние границы присутствует в (10) и (11) только благодаря функции $t_s(\mathbf{r},\ \mathbf{u},\ t)$, содержащейся в ε.

Итерационный процесс (7) с оператором (10)

$$f_{n+1} = f_n - \varepsilon Bf_n \tag{13}$$

выглядит как один из способов решения уравнения Больцмана, встречающийся в практике нелинейных уравнений. Однако при формальном взгляде на (13) совершенно не раскрывается важное содержание параметра ε.

Если функция распределения разложена в ряд по полиномам Эрмита

$$f = f_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{(m)}}{m!} H^{(m)} \tag{14}$$

то для коэффициентов $a^{(m)}(\mathbf{r},\ t)$ из (10) получается последовательность упрощенных моментных кинетических операторов [4]

$$V_\varepsilon^{(m)} f = a^{(m)} - \frac{1}{n}\iiint_{-\infty}^{\infty} \varepsilon H^{(m)} Bf d\mathbf{u} \tag{15}$$

Структура этих операторов демонстрирует некоторые характерные свойства моментных уравнений вблизи границы, связанные с их асимптотической неравномерностью [3]. В отличие от интегралов, с которыми приходится иметь дело при выводе дифференциальных моментных уравнений из уравнения Больцмана [5], под интегралом (15) присутствует параметр ε, существенным образом зависящий от $\mathbf{u}$ (через t_*). Обозначая через $\Omega_s(\mathbf{r},\ u)$ телесный угол в пространстве скоростей, для которого $t_* = t_s$, разобьем интеграл (15) на два

$$V_\varepsilon^{(m)} f = a^{(m)} - \frac{1}{n}\iiint_{-\infty}^{\infty} (t - t_0) H^{(m)} Bf d\mathbf{u} - \frac{1}{n}\int_0^{\infty} \iint_{\Omega_s(\mathbf{r},u)} (t_0 - t_s) H^{(m)} Bf u^2 d\Omega du \tag{16}$$

Если t_0 брать не зависящим от $\mathbf{u}$, то из первого интеграла получаются обычные моментные дифференциальные операторы [5]. Второй интеграл, имеющий более сложную структуру, вносит в моментные уравнения влияние границы. Естественность его особенностей обусловливает их простоту и необходимость.

Таким образом, упрощенные моментные операторы (16), являясь одновременно и содержательными и доступными, не только облегчают возможности численных расчетов, но и открывают интересные перспективы для аналитических исследований.

Поступила 10 VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Валландер С. В. Новые кинетические уравнения в теории одноатомных газов. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 1.
2. Филиппов Б. В. Вариант нестационарных кинетических уравнений аэродинамики разреженных газов. Вестник ЛГУ, 1962, № 1.
3. Аэродинамика разреженных газов. Сб. 1. Ред. С. В. Валландер. Изд. ЛГУ, 1963.
4. Баранцев Р. Г. Метод интегральных моментных кинетических уравнений. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 5.
5. Ольховский И. И. О методе моментных приближений в обобщенной гидродинамике. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.