

AMS subject classification: 65L05, 65L06

Класс $A(\alpha)$ -устойчивых численных методов для жестких задач в обыкновенных дифференциальных уравнениях

Р.И. Окуонгае

Department of Mathematics, University of Benin, P.M.B 1154, Benin City, Edo state. Nigeria
Email: okunghae01@yahoo.co.uk

Окуонгае Р.И. Класс $A(\alpha)$ -устойчивых численных методов для жестких задач в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 347–364.

Предложены $A(\alpha)$ -устойчивые численные методы (АЧМ) при числе шагов $k \leq 7$ для решения жестких начальных задач (НЗ) в обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ). Предлагаемые дискретные схемы получены из их эквивалентных непрерывных схем. Масштабная временная переменная t в непрерывном методе, которая определяет дискретные коэффициенты дискретного метода, выбирается таким образом, чтобы гарантировать, что дискретная схема имеет высокий порядок и $A(\alpha)$ -устойчивость. Мы выбираем значение α , для которого предлагаемые схемы абсолютно устойчивы. Установлено, что точность новых алгоритмов сравнима с точностью формулы дифференцирования назад (ФДН), которая обсуждается в [12] и реализует Ode15s в программах Matlab.

Ключевые слова: жесткие начальные задачи, непрерывный линейный многошаговый метод, подход коллокации и интерполяции, граничное место точек.

Okuonghae R.I. A class of $A(\alpha)$ -stable numerical methods for stiff problems in ordinary differential equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 4. — P. 347–364.

The $A(\alpha)$ -stable numerical methods (ANM) for the number of steps $k \leq 7$ for stiff initial value problems (IVPs) in ordinary differential equations (ODEs) are proposed. The discrete schemes proposed from their equivalent continuous schemes are obtained. The scaled time variable t in a continuous method, which determines the discrete coefficients of the discrete method is chosen in such a way as to ensure that the discrete scheme attains a high order and $A(\alpha)$ -stability. We select the value of α for which the schemes proposed are absolutely stable. The new algorithms are found to have a comparable accuracy with that of the backward differentiation formula (BDF) discussed in [12] which implements the Ode15s in the Matlab suite.

Key words: stiff IVPs, continuous LMM, collocation and interpolation approach, boundary locus.

1. Введение

В [21–27] обсуждались различные классы непрерывных гибридных схем для численного решения жестких начальных задач (НЗ) в обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ):

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)), & x \in [x_0, X], \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Предположим, что (1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности [20, с. 2]. Предлагаемый численный метод для численного решения (1) имеет следующий вид:

$$y_{n+(t+1)} = \alpha_{2,k-1}(t)y_{n+k-1} + h \sum_{j=0}^k \beta_j(t)f_{n+j} + h\phi_v(t)f_{n+v}, \quad \alpha_{2,k} \neq 0, \quad (2)$$

с гибридным предиктором, задаваемым в виде

$$y_{n+v} = \sum_{j=0}^k \alpha_{1,j}(t)y_{n+j} + h\gamma_k(t)f_{n+k}, \quad \alpha_{1,v} \neq 0, \quad (3)$$

фиксируя t и v в (2) и (3) следующим образом:

$$v = k - \frac{1}{2}, \quad t = k - 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

и

$$v = t + 1, \quad t = k - \frac{3}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

соответственно, где k — число шагов, y_{n+j} — численная аппроксимация точного решения $y(x_{n+j})$ и $f_{n+j} = f(x_{n+j}, y_{n+j})$, $\{\alpha_{1,j}(t)\}_{j=0}^k$, $\alpha_{2,k-1}(t)$, $\{\beta_j(t)\}_{j=0}^k$, $\phi_v(t)$ и $\gamma_k(t)$ — непрерывные коэффициенты, которые обычно представляют собой многочлен, степень которого меньше или равна p , а $\alpha_{1,v}(t)$ и $\alpha_{2,k}(t)$ равны единице. Уравнение (3) считается явным, если $\beta_k(t) = 0$ и может генерировать y_{n+k} прямо из ранее полученных значений y_{n+j} , $j = 0(1)k - 1$. Масштабная временная переменная t в (2) и (3) определяется как $t = (x - x_{n+1})/h$, а фиксированный размер шага h обозначается $h = x_{n+1} - x_n$. В действительности, в различных практических случаях, например, для контроля ошибок, достижения эффективности, запуска численной схемы или получения решения нелинейных систем иногда необходимо использовать переменный размер шага $h_n = x_{n+j} - x_{n+j-1}$. Заданную формулу с фиксированным размером шага в (2) и (3) желательно расширить до формулы с переменным размером шага

$$y_{n+(t+1)} = \alpha_{2,k-1}(t)y_{n+k-1} + h_n \sum_{j=0}^k \beta_j(t)f_{n+j} + h_n \phi_v(t)f_{n+v}, \quad \alpha_{2,k} \neq 0, \quad (6)$$

с предиктором

$$y_{n+v} = \sum_{j=0}^k \alpha_{1,j}(t)y_{n+j} + h_n \gamma_k(t)f_{n+k}, \quad (7)$$

здесь $t = k - 1$ для $k = 1, 2, 3, \dots$. Как установлено ранее, метод с фиксированными коэффициентами можно рассматривать как алгоритм с переменным размером шага. Приведем пример ФДН второго порядка с переменным размером шага и фиксированными коэффициентами

$$y(x_n + (t+1)h) = \left(-\frac{2t}{3} + \frac{t^2}{3}\right)y_n - \left(1 + \frac{2t}{3} - \frac{t^2}{3}\right)y_{n+1} = \left(\frac{t}{3} + \frac{t^2}{3}\right)h_n f_{n+2}. \quad (8)$$

Положив $t = 1$, мы получим ФДН второго порядка с фиксированными коэффициентами

$$y_{n+2} = -\frac{y_n}{3} + \frac{4y_{n+1}}{3} + \frac{2}{3}h_n f_{n+2}. \quad (9)$$

Экспериментальные и теоретические данные ясно показали, что методы с переменным размером шага, такие как формула дифференцирования назад (ФДН), обсуждавшаяся в [12], и линейные многшаговые методы со второй производной (ЛММВП) [8], являются устойчивыми для большего числа многшаговых последовательностей, чем методы с фиксированными коэффициентами, т. е. дискретные методы (см. также [13]). Однако, если $\beta_k \neq 0$, то формула (3) неявная, и поэтому нелинейное уравнение для y_{n+k} необходимо определить итерационно с использованием схемы Ньютона–Рафсона:

$$y_{n+k}^{(s+1)} = y_{n+k}^{(s)} - J(y_{n+k}^{(s)})^{-1}F(y_{n+k}^{(s)}), \quad (10)$$

где

$$F(y_{n+k}^{(s)}) = y_{n+k}^{(s)} - \alpha_{2,k-1}(t)y_{n+k-1} - h \left[\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j(t)f(x_{n+j}, y_{n+j}) + \beta_k(t)f(x_{n+k}, y_{n+k}^{(s)}) \right] - h\phi_v(t)f(x_{n+v}, y_{n+v}^{(s)}) \tag{11}$$

с гибридным предиктором

$$y_{n+v}^{(s)} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{1,j}(t)y_{n+j} + \alpha_{1,k}(t)y_{n+k}^{(s)} + h\gamma_k(t)f(x_{n+k}, y_{n+k}^{(s)}). \tag{12}$$

Подставив (12) в (11) и взяв частную производную от $F(y_{n+k}^{(s)})$ по $y_{n+k}^{(s)}$, мы получим следующую матрицу Якоби в (6):

$$J(y_{n+k}^{(s)}) = \frac{\delta F(y_{n+k}^{(s)})}{\delta y_{n+k}^{(s)}} = 1 - h\beta_k(t) \frac{\delta f(x_{n+k}, y_{n+k}^{(s)})}{y_{n+k}^{(s)}} + h\phi_v(t) \frac{\delta f\left(\alpha_{1,k} + h\gamma_k \delta \frac{f(x_{n+k}, y_{n+k}^{(s)})}{y_{n+k}^{(s)}}\right)}{\delta y_{n+k}^{(s)}}. \tag{13}$$

Для получения начального значения схемы Ньютона в (10) используется явная формула трапеций. В практических расчетах мы должны оценить значение y_{n+v} в (3), а затем подставить полученное в результате значение в (2) для окончательного вычисления y_{n+k} в (2). Одна из целей данной статьи — показать, что из (2) и (3) может быть получен класс $A(\alpha)$ -устойчивых дискретных алгоритмов высокого порядка и малой постоянной ошибки при помощи подхода коллокации и интерполяции соответственно. Примеры непрерывных методов для численного решения (1) обсуждались в [7, 16, 18, 21–27, 30] и [31]. Предлагаемые дискретные схемы (2) и (3) аналогичны дискретным методам, обсуждавшимся в [1–5, 9–11, 13, 17, 19, 20] и [32].

Формулировка непрерывной схемы в (2), (3) основана на многочленном интерполянте

$$y(x) = \sum_{j=0}^N a_j x^j \tag{14}$$

степени N , где $\{a_j\}_{j=0}^N$ — действительные постоянные параметры, которые должны быть определены, и $x=x_{n+1}+th$. Без потери общности, положим $x_n=0$, так что $x=h+th$ в (14).

Заменив приближенные решения $y_{n+(t+1)}$ и y_{n+v} на соответствующие точные решения $y(x_n+(t+1)h_n)$, $y(x_n+vh_n)$ в разностном уравнении с переменными коэффициентами (2), (3), соответственно получим локальные ошибки усечения T_{n+k} и T_{n+v} следующего вида:

$$T_{n+k} = \left[y(x_n+h(t+1)) - \alpha_{2,k-1}(t)y(x_n+(k-1)h) - h \sum_{j=0}^k \beta_j(t)y'(x_n+jh) - h\phi_v(t)y'(x_n+vh) \right], \tag{15}$$

$$T_{n+v} = \left[y(x_n+vh) - \sum_{j=0}^k \alpha_{1,j}(t)y(x_n+jh) - h\gamma_k(t)y'(x_n+kh) \right], \tag{16}$$

где $\{\alpha_{1,j}(t)\}_{j=0}^k$, $\alpha_{2,k-1}(t)$, $\{\beta_j(t)\}_{j=0}^k$, $\phi_v(t)$, v и $\gamma_k(t)$ считаются известными, а $y(x)$ — точное решение (3), которое предполагается достаточно дифференцируемым. Используя разложение в ряды Тейлора, мы получили постоянные ошибки ($C_{p+1} \neq 0$) и порядок p для (2) и (3) из (15) и (16) соответственно. Для (2) и (3) — порядки $k+2$ и $k+1$ соответственно. В табл. 5 будут представлены постоянные дискретной ошибки (C_{p+1}) алгоритмов в (2) и (3). В п. 2 будут получены непрерывные и дискретные гибридные схемы в (2) и предикторные формулы в (3). В п. 3 будет рассмотрена область абсолютной устойчивости, а в п. 4 будут подробно описаны численные эксперименты.

2. Построение метода (2), (3)

Положив $N = k + 2$ в (7) и дифференцируя полученное в результате выражение по x , мы получим

$$y'(x) = f(x, y) = \sum_{j=1}^{N=k+2} j a_j x^{j-1}. \quad (17)$$

Используя коллокацию (17) при $x = x_{n+j}$, $j = 0(1)k$, $x = x_{n+v}$ и интерполяцию (14) при $x = x_{n+k-1}$, мы получим линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{n+k-1} & x_{n+k-1}^2 & x_{n+k-1}^3 & \cdots & x_{n+k-1}^{k+2} \\ 0 & 1 & 2x_{n+1} & 3x_{n+1}^2 & \cdots & (k+2)x_{n+1}^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2x_{n+k} & 3x_{n+k}^2 & \cdots & (k+2)x_{n+k}^{k+1} \\ 0 & 1 & 2x_{n+v} & 3x_{n+v}^2 & \cdots & (k+2)x_{n+v}^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k+1} \\ a_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{n+k-1} \\ f_n \\ \vdots \\ f_{n+k} \\ f_{n+v} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Например, фиксируя $k = 1$ и $v = \frac{1}{2}$ (см. (4)) в (18), получим

$$\begin{pmatrix} 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \\ 0 & 1 & 2x_n & 3x_n^2 \\ 0 & 1 & 2x_{n+1} & 3x_{n+1}^2 \\ 0 & 1 & 2x_{n+\frac{1}{2}} & 3x_{n+\frac{1}{2}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ f_n \\ f_{n+1} \\ f_{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Положив $x_{n+1} = x_n + h$ и $x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{1}{2}h$ в (19) и решая полученную линейную систему уравнений с использованием формулы Крамера для значений $\{a_j\}_{j=0}^3$, мы получим, что значение детерминанта матрицы в (19) есть $214.5h^3$. Эта матрица является хорошо обусловленной для $h \neq 0$. Следовательно, (19) имеет единственное решение. Подставив полученные значения $\{a_j\}_{j=0}^3$ и масштабную переменную $t = (x - x_{n+1})/h$ (без потери общности положим $x_n = 0$, так что $x = h + th$) в (14), мы получим схему непрерывных коэффициентов

$$y_{n+(t+1)} = y_n + h \left(\left(\frac{1}{6} + \frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} \right) f_n + \left(\frac{1}{6} + t + \frac{3t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} \right) f_{n+1} + \left(\frac{2}{3} - 2t^2 - \frac{4t^3}{3} \right) f_{n+\frac{1}{2}} \right), \quad p = 4 \quad (20)$$

в (2) для $k = 1$. Снова используя (4), подставив $t = 0$ в полученную схему непрерывных коэффициентов, мы имеем метод дискретных коэффициентов в (2) для $k = 1$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{hf_n}{6} + \frac{h}{6}f_{n+1} + \frac{2h}{3}f_{n+\frac{1}{2}}, \quad p = 4. \quad (21)$$

Следуя вышеупомянутой процедуре, мы получим непрерывные и дискретные коэффициенты алгоритма в (2) для $k \leq 7$ (см. табл. 1 и 2 соответственно).

Таблица 1. Непрерывные коэффициенты непрерывной схемы (2), $v = k - 1/2$

k	j	$\alpha_{2,j}(t)$	$\beta_j(t)$	$\phi_v(t)$
1	0	1	$\frac{1}{6} + \frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{2}{3} - 2t^2 - \frac{4t^3}{3}$
	1	1	$\frac{1}{6} + t + \frac{3t^2}{2} + \frac{2t^3}{3}$	0
2	0	0	$-\frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{12}$	0
	1	1	$t - t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{2}$	0
	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{4t^2}{3} - \frac{2t^4}{3}$
	2	1	$-\frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{4}$	0
3	0	0	$\frac{31}{1800} - \frac{t^2}{10} + \frac{13t^3}{90} - \frac{3t^4}{40} + \frac{t^5}{75}$	0
	1	0	$-\frac{151}{360} + t - \frac{7t^2}{12} - \frac{2t^3}{9} + \frac{7t^4}{24} - \frac{t^5}{15}$	0
	2	1	$-\frac{109}{120} + \frac{3t^2}{2} - \frac{t^3}{6} - \frac{5t^4}{8} + \frac{t^5}{5}$	0
	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{88}{225} - \frac{16t^2}{15} + \frac{16t^3}{45} + \frac{8t^4}{15} - \frac{16t^5}{75}$
	3	1	$-\frac{29}{360} + \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{9} - \frac{t^4}{8} + \frac{t^5}{15}$	0
4	0	0	$\frac{1}{90} - \frac{5t^2}{56} + \frac{67t^3}{504} - \frac{13t^4}{168} + \frac{17t^5}{840} - \frac{t^6}{504}$	0
	1	0	$-\frac{17}{45} + t - \frac{37t^2}{60} - \frac{t^3}{6} + \frac{7t^4}{24} - \frac{t^5}{10} + \frac{t^6}{90}$	0
	2	0	$-\frac{19}{15} + \frac{5t^2}{4} - \frac{7t^3}{36} - \frac{11t^4}{24} + \frac{13t^5}{60} - \frac{t^6}{36}$	0
	3	1	$-\frac{17}{45} - \frac{5t^2}{4} + \frac{11t^3}{18} + \frac{13t^4}{24} - \frac{11t^5}{30} + \frac{t^6}{18}$	0
	$\frac{7}{2}$	0	0	$\frac{32t^2}{35} - \frac{32t^3}{63} - \frac{8t^4}{21} + \frac{32t^5}{105} - \frac{16t^6}{315}$
4	1	$\frac{1}{90} - \frac{5t^2}{24} + \frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{12} - \frac{3t^5}{40} + \frac{t^6}{72}$	0	
5	0	0	$\frac{37}{3360} - \frac{7t^2}{90} + \frac{199t^3}{1620} - \frac{23t^4}{288} + \frac{7t^5}{270} - \frac{t^6}{240} + \frac{t^7}{3780}$	0
	1	0	$-\frac{2991}{7840} + t - \frac{115t^2}{168} - \frac{53t^3}{504} + \frac{205t^4}{672} - \frac{113t^5}{840} + \frac{25t^6}{1008} - \frac{t^7}{588}$	0
	2	0	$-\frac{687}{560} + \frac{7t^2}{5} - \frac{31t^3}{90} - \frac{23t^4}{48} + \frac{3t^5}{10} - \frac{23t^6}{360} + \frac{t^7}{210}$	0
	3	0	$-\frac{479}{560} - \frac{7t^2}{6} + \frac{73t^3}{74} + \frac{7t^4}{74} - \frac{71t^5}{74} + \frac{7t^6}{74} - \frac{t^7}{74}$	0
	4	1	$-\frac{560}{873} + \frac{7t^2}{6} - \frac{108}{29t^3} - \frac{16}{37t^4} + \frac{180}{7t^5} - \frac{72}{19t^6} + \frac{126}{84t^7}$	0
	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{208}{735} - \frac{256t^2}{315} + \frac{1664t^3}{2835} + \frac{16t^4}{63} - \frac{64t^5}{189} + \frac{32t^6}{315} - \frac{64t^7}{6615}$
5	1	$-\frac{57}{1120} + \frac{7t^2}{40} - \frac{47t^3}{360} - \frac{5t^4}{96} + \frac{3t^5}{40} - \frac{17t^6}{720} + \frac{t^7}{420}$	0	
6	0	0	$\frac{8}{945} - \frac{3t^2}{44} + \frac{41t^3}{360} - \frac{2573t^4}{31680} + \frac{27t^5}{880} - \frac{61t^6}{9504} + \frac{13t^7}{18480} - \frac{t^8}{31680}$	0
	1	0	$-\frac{38}{105} + t - \frac{271t^2}{360} - \frac{133t^3}{3240} + \frac{679t^4}{2160}$	0

Продолжение таблицы 1

k	j	$\alpha_{2,j}(t)$	$\beta_j(t)$	$\phi_v(t)$
	2	0	$-\frac{91t^5}{540} + \frac{133t^6}{3240} - \frac{37t^7}{7560} + \frac{t^8}{4320}$	0
	3	0	$-\frac{105}{97t^5} + \frac{28}{11t^6} - \frac{24}{5t^7} - \frac{192}{t^8}$	0
	4	0	$+\frac{240}{664} - \frac{96}{3t^2} + \frac{336}{181t^3} - \frac{1344}{169t^4}$	0
	5	1	$-\frac{30}{945} + \frac{27}{5t^6} - \frac{420}{11t^7} + \frac{720}{t^8}$	0
	$\frac{11}{2}$	0	0	$+\frac{512t^2}{693} - \frac{256t^3}{405} - \frac{224t^4}{1485}$
	6	1	$-\frac{136}{105} + \frac{5t^2}{4} - \frac{211t^3}{216} - \frac{185t^4}{576}$	0
			$+\frac{391t^5}{720} - \frac{173t^6}{864} + \frac{31t^7}{1008} - \frac{t^8}{576}$	0
			$-\frac{38}{105} - \frac{9t^2}{8} + \frac{113t^3}{120} + \frac{59t^4}{240} - \frac{31t^5}{60} + \frac{5t^6}{24} - \frac{29t^7}{840} + \frac{t^8}{480}$	0
			$+\frac{8}{945} - \frac{3t^2}{20} + \frac{47t^3}{360} + \frac{83t^4}{2880} - \frac{17t^5}{240} + \frac{131t^6}{4320} - \frac{3t^7}{560} + \frac{t^8}{2880}$	0
7	0	0	$\frac{7325}{943488} - \frac{11t^2}{182} + \frac{193t^3}{1820} - \frac{191t^4}{2340} + \frac{1619t^5}{46800}$	0
	1	0	$-\frac{97t^6}{11232} + \frac{83t^7}{65520} - \frac{53t^8}{524160} + \frac{t^9}{294840}$	0
	2	0	$-\frac{284915}{798336} + t - \frac{359t^2}{440} + \frac{137t^3}{5940} + \frac{3353t^4}{10560}$	0
	3	0	$-\frac{441t^5}{2200} + \frac{469t^6}{7920} - \frac{t^7}{105} + \frac{21120}{35640} - \frac{t^9}{5603t^5}$	0
	4	0	$-\frac{285025}{217728} + \frac{11t^2}{6} - \frac{139t^3}{180} - \frac{557t^4}{1080} + \frac{5603t^5}{10800}$	0
	5	1	$-\frac{467t^6}{2592} + \frac{479t^7}{15120} - \frac{49t^8}{17280} + \frac{t^9}{9720}$	0
	6	1	$-\frac{50125}{72576} - \frac{55t^2}{28} + \frac{83t^3}{56} + \frac{281t^4}{576} - \frac{289t^5}{360}$	0
	7	1	$+\frac{139t^6}{432} - \frac{31t^7}{504} + \frac{47t^8}{8064} - \frac{t^9}{4536}$	0
			$-\frac{90925}{72576} + \frac{11t^2}{6} - \frac{857t^3}{540} - \frac{t^4}{3} + \frac{337t^5}{400}$	0
			$-\frac{109t^6}{288} + \frac{131t^7}{1680} - \frac{t^8}{128} + \frac{t^9}{3240}$	0
			$-\frac{63275}{72576} - \frac{11t^2}{8} + \frac{19t^3}{15} + \frac{547t^4}{2880} - \frac{1189t^5}{1800}$	0
			$+\frac{139t^6}{432} - \frac{89t^7}{1260} + \frac{43t^8}{5760} - \frac{t^9}{3240}$	0
			$-\frac{51865}{72576} + \frac{11t^2}{10} - \frac{21t^3}{20} - \frac{43t^4}{360} + \frac{1943t^5}{3600}$	0
			$-\frac{1199t^6}{4320} + \frac{323t^7}{5040} - \frac{41t^8}{5760} + \frac{t^9}{3240}$	0
	$\frac{13}{2}$	0	0	$-\frac{54400}{243243} - \frac{2048t^2}{3003} + \frac{29696t^3}{45045} + \frac{256t^4}{3861}$
				$-\frac{32512t^5}{96525} + \frac{2048t^6}{11583} - \frac{512t^7}{12285} + \frac{128t^8}{27027} - \frac{256t^9}{1216215}$
	7	1	$-\frac{2575}{72576} + \frac{11t^2}{84} - \frac{967t^3}{7560} - \frac{11t^4}{960}$	0
			$+\frac{13t^5}{200} - \frac{5t^6}{144} + \frac{t^7}{120} - \frac{13t^8}{13440} + \frac{t^9}{22680}$	0

Таблица 2. Дискретные коэффициенты метода (2), $\alpha_k(t - 1) = 1$ и $v = k - 1/2$

k	1	2	3	4	5	6	7
v	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$
ϕ_v	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{152}{225}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{13808}{19845}$	$\frac{400}{567}$	$\frac{4345984}{6081075}$
β_7	0	0	0	0	0	0	$\frac{1814400}{196367}$
β_6	0	0	0	0	0	$\frac{1577}{10080}$	$\frac{1814400}{74413}$
β_5	0	0	0	0	$\frac{533}{3360}$	$\frac{409}{3360}$	$\frac{1814400}{54373}$
β_4	0	0	0	$\frac{29}{180}$	$\frac{151}{1120}$	$\frac{26}{945}$	$\frac{1814400}{5983}$
β_3	0	0	$\frac{59}{360}$	$\frac{53}{360}$	$\frac{251}{15120}$	$\frac{83}{5040}$	$\frac{362880}{33913}$
β_2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{13}{1680}$	$\frac{23}{3360}$	$\frac{5443200}{28453}$
β_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{17}{7840}$	$\frac{157}{90720}$	$\frac{19958400}{3499}$
β_0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{1800}$	$\frac{1}{2520}$	$\frac{1}{18144}$	$\frac{1}{5040}$	$\frac{23587200}{23587200}$

Соответствующие предикторные формулы для (3) получены с использованием многочленного интерполанта (14). Положив $N = k + 1$ в (14) и дифференцируя полученный многочлен по x , мы имеем

$$y'(x) = f(x, y) = \sum_{j=1}^{N=k+1} j a_j x^{j-1}. \tag{22}$$

Используя коллокацию (22) при $x = x_{n+k}$ и интерполяцию (14) при $x = x_{n+j}$, $j = 0(1)k$, мы получим линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{k+1} \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 & \dots & x_{n+1}^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+k} & x_{n+k}^2 & x_{n+k}^3 & \dots & x_{n+k}^{k+1} \\ 0 & 1 & 2x_{n+k} & 3x_{n+k}^2 & \dots & (k+1)x_{n+k}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+k} \\ f_{n+k} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Аналогичным образом рассмотрим случай для $k = 1$ в (23). Мы имеем линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_n & x_n^2 \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 \\ 0 & 1 & 2x_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Решая полученную линейную систему уравнений (26) для $\{a_j\}_{j=0}^2$ с использованием формулы Крамера и подставив преобразование $t = (x - x_{n+1})/h$ в (7), мы получим непрерывные коэффициенты схемы (3) для $k = 1$:

$$y_{n+v} = (t^2)y_n + (1 - t^2)y_{n+1} - (t + t^2)f_{n+1}, \quad p = 2, \quad v = t + 1. \tag{25}$$

Таблица 3. Непрерывные коэффициенты гибридного предиктора (3)

k	j	$\alpha_{1,j}(t)$	$\gamma_k(t)$
1	0	t^2	0
	1/2	1	0
	1	$1 - t^2$	$t + t^2$
2	0	$-\frac{t}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{4}$	0
	1	$1 - t - t^2 + t^3$	0
	3/2	1	0
	2	$\frac{5t}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{3t^3}{4}$	$-\frac{t}{2} + \frac{t^3}{2}$
3	0	$-\frac{2t}{9} + \frac{4t^2}{9} - \frac{5t^3}{18} + \frac{t^4}{18}$	0
	1	$1 - t - \frac{3t^2}{4} + t^3 - \frac{t^4}{4}$	0
	2	$2t - \frac{3t^3}{2} + \frac{t^4}{2}$	0
	5/2	1	0
	3	$-\frac{7t}{9} + \frac{11t^2}{36} + \frac{7t^3}{9} - \frac{11t^4}{36}$	$\frac{t}{3} - \frac{t^2}{6} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{6}$
4	0	$-\frac{3t}{16} + \frac{13t^2}{32} - \frac{29t^3}{96} + \frac{3t^4}{32} - \frac{t^5}{96}$	0
	1	$1 - \frac{7t}{6} - \frac{5t^2}{9} + \frac{10t^3}{9} - \frac{4t^4}{9} + \frac{t^5}{18}$	0
	2	$\frac{9t}{4} - \frac{3t^2}{8} - \frac{13t^3}{8} + \frac{7t^4}{8} - \frac{t^5}{8}$	0
	3	$-\frac{3t}{2} + t^2 + \frac{4t^3}{3} - t^4 + \frac{t^5}{6}$	0
	7/2	1	0
	4	$\frac{29t}{48} - \frac{137t^2}{288} - \frac{149t^3}{288} + \frac{137t^4}{288} - \frac{25t^5}{288}$	$-\frac{t}{4} + \frac{5t^2}{24} + \frac{5t^3}{24} - \frac{5t^4}{24} + \frac{t^5}{24}$
5	0	$-\frac{4t}{25} + \frac{28t^2}{75} - \frac{19t^3}{60} + \frac{t^4}{8} - \frac{7t^5}{300} + \frac{t^6}{600}$	0
	1	$1 - \frac{4t}{3} - \frac{17t^2}{48} + \frac{115t^3}{96} - \frac{61t^4}{96} + \frac{13t^5}{96} - \frac{t^6}{96}$	0
	2	$\frac{8t}{3} - \frac{8t^2}{9} - \frac{11t^3}{6} + \frac{49t^4}{36} - \frac{t^5}{3} + \frac{t^6}{36}$	0
	3	$-2t + \frac{5t^2}{3} + \frac{37t^3}{24} - \frac{13t^4}{8} + \frac{11t^5}{24} - \frac{t^6}{24}$	0
	4	$\frac{4t}{3} - \frac{4t^2}{3} - \frac{11t^3}{12} + \frac{31t^4}{24} - \frac{5t^5}{12} + \frac{t^6}{24}$	0
	9/2	1	0
5	$-\frac{38t}{75} + \frac{1931t^2}{3600} + \frac{157t^3}{480} - \frac{149t^4}{288} + \frac{431t^5}{2400} - \frac{137t^6}{7200}$	$\frac{t}{5} - \frac{13t^2}{60} - \frac{t^3}{8} + \frac{5t^4}{24} - \frac{3t^5}{40} + \frac{t^6}{120}$	
6	0	$-\frac{5t}{36} + \frac{149t^2}{432} - \frac{1399t^3}{4320} + \frac{65t^4}{432} - \frac{t^5}{27} + \frac{t^6}{216} - \frac{t^7}{4320}$	0
	1	$1 - \frac{89t}{60} - \frac{91t^2}{600} + \frac{749t^3}{600} - \frac{49t^4}{60} + \frac{7t^5}{30} - \frac{19t^6}{600} + \frac{t^7}{600}$	0
	2	$\frac{25t}{8} - \frac{145t^2}{96} - \frac{127t^3}{64} + \frac{23t^4}{12} - \frac{61t^5}{96} + \frac{3t^6}{32} - \frac{t^7}{192}$	0
	3	$-\frac{25t}{9} + \frac{295t^2}{108} + \frac{193t^3}{108} - \frac{139t^4}{54} + \frac{53t^5}{54} - \frac{17t^6}{108} + \frac{t^7}{108}$	0
	4	$\frac{25t}{12} - \frac{115t^2}{48} - \frac{107t^3}{96} + \frac{107t^4}{48} - \frac{23t^5}{24} + \frac{t^6}{6} - \frac{t^7}{96}$	0

Продолжение таблицы 3

k	j	$\alpha_{1,j}(t)$	$\gamma_k(t)$
	5	$-\frac{5t}{4} + \frac{37t^2}{24} + \frac{23t^3}{40} - \frac{17t^4}{12} + \frac{2t^5}{3} - \frac{t^6}{8} + \frac{t^7}{120}$	0
	$\frac{11}{2}$	1	0
	6	$\frac{53t}{120} - \frac{4033t^2}{7200} - \frac{2701t^3}{14400} + \frac{23t^4}{45} - \frac{361t^5}{1440} + \frac{353t^6}{7200} - \frac{49t^7}{14400}$	$-\frac{t}{6} + \frac{77t^2}{360} + \frac{49t^3}{720} - \frac{7t^4}{36} + \frac{7t^5}{72} - \frac{7t^6}{360} + \frac{t^7}{720}$
7	0	$-\frac{6t}{49} + \frac{157t^2}{490} - \frac{137t^3}{420} + \frac{431t^4}{2520} - \frac{17t^5}{336} + \frac{43t^6}{5040} - \frac{3t^7}{3920} + \frac{t^8}{35280}$	0
	1	$1 - \frac{97t}{60} + \frac{17t^2}{360} + \frac{2737t^3}{2160} - \frac{4249t^4}{4320} + \frac{371t^5}{1080} - \frac{137t^6}{2160} + \frac{13t^7}{2160} - \frac{t^8}{4320}$	0
	2	$\frac{18t}{5} - \frac{111t^2}{50} - \frac{41t^3}{20} + \frac{1507t^4}{600} - \frac{247t^5}{240} + \frac{83t^6}{400} - \frac{t^7}{48} + \frac{t^8}{1200}$	0
	3	$-\frac{15t}{4} + \frac{67t^2}{16} + \frac{23t^3}{12} - \frac{2185t^4}{576} + \frac{43t^5}{24} - \frac{113t^6}{288} + \frac{t^7}{24} - \frac{t^8}{576}$	0
	4	$\frac{10t}{3} - \frac{77t^2}{18} - \frac{137t^3}{108} + \frac{821t^4}{216} - \frac{869t^5}{432} + \frac{205t^6}{432} - \frac{23t^7}{432} + \frac{t^8}{432}$	0
	5	$-\frac{9t}{4} + \frac{123t^2}{40} + \frac{53t^3}{80} - \frac{1289t^4}{480} + \frac{37t^5}{24} - \frac{31t^6}{80} + \frac{11t^7}{240} - \frac{t^8}{480}$	0
	6	$\frac{6t}{5} - \frac{17t^2}{10} - \frac{17t^3}{60} + \frac{527t^4}{360} - \frac{71t^5}{80} + \frac{169t^6}{720} - \frac{7t^7}{240} + \frac{t^8}{720}$	0
	$\frac{13}{2}$	1	0
7	$-\frac{1159t}{2940} + \frac{100133t^2}{176400} + \frac{103t^3}{1260} - \frac{48901t^4}{100800} + \frac{761t^5}{2520} - \frac{4133t^6}{50400} + \frac{37t^7}{3528} - \frac{121t^8}{235200}$	$\frac{t}{7} - \frac{29t^2}{140} - \frac{t^3}{36} + \frac{127t^4}{720} - \frac{t^5}{9} + \frac{11t^6}{360} - \frac{t^7}{252} + \frac{t^8}{5040}$	

Таблица 4. Дискретные коэффициенты гибридного предиктора (3), $t = k - 3/2$ и $v = k - 1/2$

k	γ_k	α_v	$\alpha_{1,7}$	$\alpha_{1,6}$	$\alpha_{1,5}$	$\alpha_{1,4}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,0}$
1	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$-\frac{3}{16}$	1	0	0	0	0	0	$\frac{21}{32}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{32}$
3	$-\frac{5}{32}$	1	0	0	0	0	$\frac{115}{192}$	$\frac{15}{32}$	$-\frac{5}{64}$	$\frac{1}{96}$
4	$-\frac{35}{256}$	1	0	0	0	$\frac{1715}{3072}$	$\frac{35}{64}$	$-\frac{35}{256}$	$\frac{7}{192}$	$-\frac{5}{1024}$
5	$-\frac{63}{512}$	1	0	0	$\frac{5397}{10240}$	$\frac{315}{512}$	$-\frac{105}{512}$	$\frac{21}{256}$	$-\frac{45}{2048}$	$\frac{7}{2560}$
6	$-\frac{231}{2048}$	1	0	$\frac{20559}{40960}$	$\frac{693}{1024}$	$-\frac{1155}{4096}$	$\frac{77}{512}$	$-\frac{495}{8192}$	$\frac{77}{5120}$	$-\frac{7}{4096}$
7	$-\frac{429}{4096}$	1	$\frac{275847}{573440}$	$\frac{3003}{4096}$	$-\frac{3003}{8192}$	$\frac{1001}{4096}$	$-\frac{2145}{16384}$	$\frac{1001}{20480}$	$-\frac{91}{8192}$	$\frac{33}{28672}$

Используя уравнение (5) и вставив $t = k - \frac{3}{2}$ в полученные непрерывные коэффициенты (25), мы имеем дискретные коэффициенты гибридных предикторных формул (3) для $k = 1$ следующего вида:

$$y_{n+\frac{1}{2}} = \frac{y_n}{4} + \frac{3y_{n+1}}{4} - \frac{1}{4}hf_{n+1}, \quad p = 2. \quad (26)$$

Используя приведенную выше процедуру, мы получим дискретный гибридный предиктор (3) для $k \leq 7$ (см. табл. 3 и 4).

3. Область абсолютной устойчивости (ОАУ)

Определение 1. ЛММ считается A -устойчивым, если абсолютное значение корня (корней) многочлена устойчивости численного интегратора лежит в открытой левой половине z -плоскости области устойчивости. Примеры A -устойчивых методов можно найти в работах [2, 4–7, 11].

Определение 2 [32]. Схема численного интегрирования называется $A(\alpha)$ -устойчивой для некоторого $\alpha \in [0, \pi/2)$, если клин $S_\alpha = \{z : |\arg(-z)| < \alpha, z \neq 0\}$ содержится в области абсолютной устойчивости. Самое большое значение $\alpha(\alpha_{\max})$ называется углом устойчивости аргумента устойчивости (см. [9, с. 182–188] и [13]). Ясная диаграмма области $A(\alpha)$ -устойчивости приводится в [9, с. 186].

Определение 3 [9, с. 183–188]. Схема является $A(0)$ -устойчивой, если она $A(\alpha)$ -устойчива для некоторого $\alpha \in [0, \pi/2)$.

Определение 4 [9, с. 183–188]. Численная схема считается $A(\alpha, D)$ -устойчивой, если все численные решения скалярной тестовой задачи ($y' = \lambda y, \operatorname{Re}(\lambda) < 0$) сходятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, с фиксированным h для $|\arg(-z)| < \alpha, D \leq \operatorname{Re}(z) < 0, |\lambda| \neq 0$ и для $\operatorname{Re}(z) \leq D$ (см. [9, с. 188]). $A(\alpha, D)$ -устойчивые методы до 9-го порядка были впервые предложены Гупа в 1976 г.

Определение 5 [9, с. 183]. Численная схема называется жестко устойчивой, если она: (а) точна в области R_2 , заданной в виде $R_2 = \{-D < \operatorname{Re}(z) < \delta, |\operatorname{Im}(z)| < \theta\}, D > 0,$

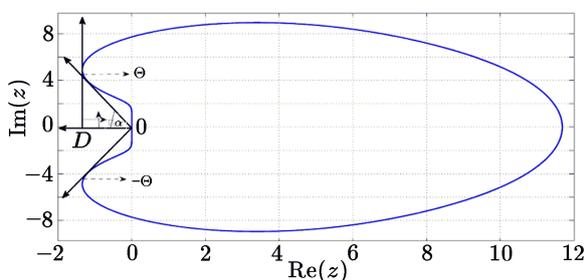


Рис. 1. Области $A(\alpha)$ -устойчивости и $A(\alpha, D)$ -устойчивости для ЛММ

$\delta > 0$, и (б) абсолютно устойчива в области $R_1 = \{\operatorname{Re}(z) \leq -D\}$. Диаграмма жесткой устойчивости представлена в [9, с. 187]. Жесткая устойчивость означает $A(\alpha)$ -устойчивость и $\alpha = \tan^{-1}(\frac{\theta}{D})$. На рис. 1 показано, как измерить значение θ от положительной мнимой оси z комплексной плоскости ($\operatorname{Im}(z)$) и значение D от действительной оси z комплексной плоскости ($\operatorname{Re}(z)$) соответственно.

Применяя дискретный вариант (2) для фиксированного числа шагов k к скалярной тестовой задаче

$$y' = \lambda y, \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0, \tag{27}$$

и подставляя гибридное решение y_{n+v} в (3) в гибридной точке x_{n+v} для соответствующего k , получим многочлен устойчивости

$$\pi(w, z) = w^k - \alpha_{2,k-1}w^{k-1} - z \sum_{j=0}^k \beta_j w^j - z\phi_v \left(\sum_{j=0}^k \alpha_{1,j} w^j + z\gamma_k w^k \right), \quad z = \lambda h, \tag{28}$$

для $k \leq 7$, где $w = \exp(i\theta)$ и $\theta \in [0, 2\pi]$. В соответствии с идеей из [12, с. 218–219], угол (α) абсолютной устойчивости новой схемы (2) вычисляется с использованием $\alpha = \tan^{-1}(\frac{\theta}{D})$ (см. [9]). Подставляя значения $\gamma_1, \alpha_{\frac{1}{2}}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \phi_{\frac{1}{2}}, \beta_1, \beta_0$ и $\alpha_{2,1}$ в (28), получим многочлен устойчивости для $k = 1$ следующего вида:

$$\pi_1(w, z) = w - 1 - \frac{z}{3} - \frac{2wz}{3} + \frac{wz^2}{6}. \tag{29}$$

Корень $\pi_1(w, 0)$ показывает, что схема (3) имеет нулевую устойчивость. Граничное место

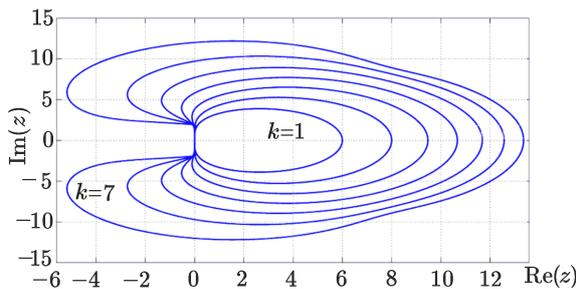


Рис. 2. Область абсолютной устойчивости метода (2) и (3) для $k \leq 7$

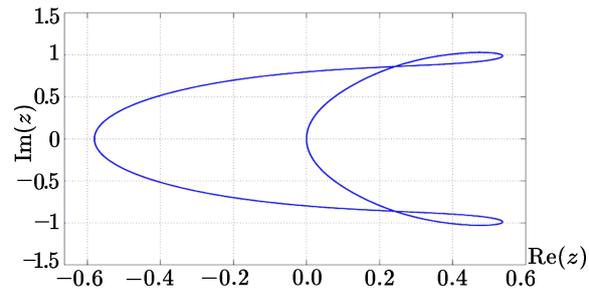


Рис. 3. Область абсолютной устойчивости метода (2) и (3) для $k = 8$

точек $\pi_1(w, z)$ на рис. 2 показывает, что угол (α) абсолютной устойчивости метода (29) составляет 90° , что показывает, что алгоритм (2) является A -устойчивым для $k = 1$. Обсудим теперь функцию устойчивости метода (2), (3) для $k = 2$. Подстановка значений $\gamma_2, \alpha_{\frac{3}{2}}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \phi_{\frac{3}{2}}, \beta_2, \beta_1, \beta_0$ и $\alpha_{2,0}$ в табл. 2 и 4 соответственно в (28) дает функцию устойчивости метода (2) для $k = 2$:

$$\pi_2(w, z) = w^2 - w + \frac{z}{48} - \frac{5wz}{12} - \frac{29w^2z}{48} + \frac{w^2z^2}{8}. \tag{30}$$

Модули корней (w_1, w_2) первого характеристического многочлена $\pi_2(w, 0) = -w + w^2 = 0$ равны 0 и 1 соответственно. Они показывают, что схема (2) удовлетворяет требованию нулевой устойчивости (см. [9]). Изобразив корни функции устойчивости $\pi_2(w, z)$ в смысле граничного места точек, мы увидим, что угол (α) абсолютной устойчивости схемы (2) составляет 90° (см. рис. 3). Таким образом, мы показали, что схема (2) является A -устойчивой для $k = 2$. Аналогичным образом, положив $k = 3$ в (28) и используя такие же процедуры для получения многочленов устойчивости для $k = 2$ в (2), мы получим многочлен устойчивости метода (2) для $k = 3$ следующего вида:

$$\pi_3(w, z) = w^3 - w^2 - \frac{7z}{1080} + \frac{wz}{20} - \frac{19w^2z}{40} - \frac{307w^3z}{540} + \frac{19w^3z^2}{180}. \tag{31}$$

Для нулевой устойчивости элементы множества $(|w_1|, |w_2|, |w_3|) = (0, 0, 1)$ являются абсолютными значениями корней первого характеристического многочлена $\pi_3(w, z) = 0$ при $z = 0$. Следовательно, алгоритм (2) имеет нулевую устойчивость. Из определения 5 мы вычисляем угол (α) абсолютной устойчивости метода (2) с использованием формулы $\alpha = \tan^{-1}(\frac{\theta}{D})$. Например, от мнимой оси $\text{Im}(z)$ положительной плоскости z граничного места точек многочлена устойчивости полученное значение θ составляет 1.14300523, тогда как значение расстояния (D) от оси $\text{Re}(z)$ составляет 0.1 (см. рис. 1). Следовательно, $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1.14300523}{0.1}) = 85^\circ$, что представляет собой угол (α) абсолютной устойчивости новой схемы (2) для $k = 3$. В действительности она является $A(\alpha)$ -устойчивой при $\alpha = 85^\circ$. Аналогичным образом мы оценим значения α , D и θ , для которых метод (2) является $A(\alpha)$ -устойчивым для $k = 4(1)7$ (см. табл. 5). Функция устойчивости алгоритма (2) для $k = 4$ вновь примет следующий вид:

$$\pi_4(w, z) = -w^3 + w^4 + \frac{17z}{5760} - \frac{wz}{45} + \frac{41w^2z}{480} - \frac{47w^3z}{90} - \frac{3133w^4z}{5760} + \frac{3w^4z^2}{32}. \quad (32)$$

Абсолютные значения корней первого характеристического многочлена ($\pi_4(w, 0) = 0$), заданные множеством $(|w_1|, |w_2|, |w_3|, |w_4|) = (0, 0, 0, 1)$, показывают процесс нулевой устойчивости схемы (2). Угол (α), образуемый с границей области устойчивости, составляет 79° , что показывает, что схема (2) является $A(\alpha)$ -устойчивой. Используя приведенные выше процедуры, мы получим многочлен устойчивости гибридной схемы для пяти шагов следующего вида:

$$\pi_5(w, z) = w^5 - w^4 - \frac{41z}{25200} + \frac{529wz}{40320} - \frac{373w^2z}{7560} + \frac{1271w^3z}{10080} - \frac{2837w^4z}{5040} - \frac{317731w^5z}{604800} + \frac{863w^5z^2}{10080}. \quad (33)$$

Схема (2) имеет процесс нулевой устойчивости при следующих значениях: $(|w_1|, |w_2|, |w_3|, |w_4|, |w_5|) = (0, 0, 0, 0, 1)$, полученных из первых характеристик $\pi_5(w, z)$. С использованием формулы в определении 5 угол абсолютной устойчивости метода (2) оценивается как 62° . Схема (2) опять дает другой $A(\alpha)$ -устойчивый процесс.

Для числа шагов $k = 6$ в (28) мы получили многочлен устойчивости схемы (2) следующего вида:

$$\pi_6(w, z) = -w^5 + w^6 + \frac{731z}{725760} - \frac{179wz}{20160} + \frac{5771w^2z}{161280} - \frac{8131w^3z}{90720} + \frac{13823w^4z}{80640} - \frac{12079w^5z}{20160} - \frac{247021w^6z}{483840} + \frac{275w^6z^2}{3456}. \quad (34)$$

Абсолютные значения корней первого характеристического многочлена $\pi_6(w, z)$ следующие: $(|w_1|, |w_2|, |w_3|, |w_4|, |w_5|, |w_6|) = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Поэтому схема (2) имеет нулевую устойчивость. Аналогичным образом мы получим угол абсолютной устойчивости алгоритма (2), равный 42° . Следовательно, метод является $A(\alpha)$ -устойчивым для $k = 6$. Подобным же образом мы получим функцию устойчивости метода для числа шагов $k = 7$ следующего вида:

$$\pi_7(w, z) = w^7 - w^6 - \frac{8563z}{12700800} + \frac{35453wz}{5443200} - \frac{86791w^2z}{3024000} + \frac{2797w^3z}{36288} - \frac{157513w^4z}{1088640} + \frac{133643w^5z}{604800} - \frac{1147051w^6z}{1814400} - \frac{1758023w^7z}{3528000} + \frac{33953w^7z^2}{453600}. \quad (35)$$

Значения нулевой устойчивости схемы (2) следующие:

$$(|w_1|, |w_2|, |w_3|, |w_4|, |w_5|, |w_6|, |w_7|) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Вычисленное значение α составляет 20° (см. рис. 3). При числе шагов $k = 8$ интервал абсолютной устойчивости алгоритма (2) составляет $(-5.98, 0)$ (см. рис. 3).

Таблица 5. Число шагов (k), порядок (p) и угол (α) абсолютной устойчивости, для которых АЧМ [2], ФДН [12] и ЛММВП [8] являются устойчивыми

Параметры	k						
	1	2	3	4	5	6	7
	Метод АЧМ (2)						
p (2)	4	4	5	6	7	8	9
p (3)	2	3	4	5	6	7	8
α	90°	90°	85°	79°	62°	42°	20°
D	0	0	0.1	0.6	1.5	2.4	4.1
$C_{p+1}(2)$	$\frac{-1}{2880}$	$\frac{-1}{2880}$	$\frac{-1}{3600}$	$\frac{-5}{24192}$	$\frac{-11}{70560}$	$\frac{-3499}{29030400}$	$\frac{-1039}{10886400}$
$C_{p+1}(3)$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{7}{3072}$	$\frac{3}{2048}$	$\frac{33}{32768}$	$\frac{143}{196608}$
	Метод ФДН [12]						
p	1	2	3	4	5	6	–
α	90°	90°	86°	73°	52°	18°	–
D	0	0	0.1	0.7	2.3	6.1	–
C_{p+1} [11]	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-3}{22}$	$\frac{-12}{125}$	$\frac{-10}{137}$	$\frac{-20}{60480}$	–
	Метод ЛММВП [8]						
p	3	4	5	6	7	8	9
α	90°	90°	87.9°	82.0°	73.1°	59.9°	37.6°
D	0	0	0.1	0.5	1.3	2.7	5.1
C_{p+1} [8]	$\frac{1}{72}$	$\frac{7}{1440}$	$\frac{17}{7200}$	$\frac{41}{30240}$	$\frac{731}{846720}$	$\frac{8563}{14515200}$	$\frac{157513}{585869760}$

В табл. 5 представлены значения постоянных ошибки α и D , для которых метод (2), формула дифференцирования назад (ФДН) [12] и линейный многошаговый метод со второй производной (ЛММВП) [8] являются абсолютно устойчивыми. Величины C_{p+1} (2), C_{p+1} (3), C_{p+1} [8] и C_{p+1} [12] обозначают постоянные дискретной ошибки для схем (2), (3), ФДН [12] и ЛММВП [8] соответственно. Абсолютные значения постоянных ошибки для АЧМ (2) меньше значений для ФДН [12] и ЛММВП [8]. Это является преимуществом малых ошибок в АЧМ по сравнению с другими методами.

4. Численные эксперименты

В этом пункте мы обсудим реализацию гибридной схемы (3), формулы дифференцирования назад Гира [12] и линейных многошаговых методов со второй производной (ЛММВП) Энрайта [8] четвертого порядка соответственно при различном размере шага для следующих задач:

Задача 1. В [9, с. 167]:

$$\begin{cases} y_1' = -0.1y_1 - 199.9y_2, & y_1(0) = 2, \\ y_2' = -200y_2, & y_2(0) = 1, \\ x \in [0, 10]. \end{cases}$$

Задача 2. Сингулярно-возмущенная тестовая задача в [28]:

$$\begin{cases} y_1'(x) = -(2 + \varepsilon^{-1})y_1(x) + \varepsilon^{-1}y_2^2(x), & y_1(0) = 1, \\ y_2' = y_1(x) - y_2(x) - y_2^2(x), & y_2(0) = 1, \\ x \in [0, 10], \quad \varepsilon = 10^{-4}. \end{cases}$$

Задача 3. Химическая задача в [8]:

$$\begin{cases} y_1'(x) = -0.04y_1(x) + 10^4y_2(x)y_3(x), & y_1(0) = 1, \\ y_2' = 0.04y_1(x) - 10^4y_2(x)y_3(x) - 3 \times 10^7y_2(x)y_2(x), & y_2(0) = 0, \\ y_3' = 3 \times 10^7y_2(x)y_2(x), & y_3(0) = 0, \\ x \in [0, 5]. \end{cases}$$

Задача 4. Колебательная задача в [8]:

$$y' = \begin{pmatrix} -10 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} e^{-10x}(\cos \alpha(x) + \sin \alpha(x)) \\ e^{-10x}(\cos \alpha(x) - \sin \alpha(x)) \\ e^{-4x} \\ e^{-x} \\ e^{-0.5x} \\ e^{-0.1x} \end{pmatrix}.$$

В соответствии с [9] задача 1 является умеренно жесткой, и ее точные решения составляют $y_1(x) = e^{-0.1x} + e^{-200x}$ и $y_2(x) = e^{-200x}$, тогда как точные решения задачи 2 составляют $y_1(x) = e^{-2x}$ и $y_2(x) = e^{-x}$ соответственно. Задача 2 становится очень жесткой при $\varepsilon \rightarrow 0$. Собственные значения задачи 4 составляют $(-0.1, -0.5, -1, -4, -10 * i\alpha)$, $\alpha = 3$ и $x \in [0, 10]$.

Предлагаемые алгоритмы, в которых (3) подставляется в (2), реализуются при использовании подхода с различным размером шага для контроля ошибок, полученных на текущем шаге. Сначала пользователь находит альтернативную формулу для аппроксимации y в конце шага и рассматривает их различия как оценку ошибки. Для легкой реализации методов с различными размерами шагов необходимо, чтобы предлагаемый метод, скажем, y_{n+i} , $i = 1(1)k$, и его альтернативная формула $\widehat{y_{n+i}}$, $i = 1(1)k$, имели один и тот же порядок p , чтобы разность между $\widehat{y_{n+i}}$, $i = 1(1)k$, и y_{n+i} была $O(h^p)$. Этот факт будет использован для регулирования размера шагов. Пользователь устанавливает допустимое отклонение для ошибки (T), которое должно выдерживаться на текущем шаге. Ввиду асимптотического поведения оценки ошибки мы можем увеличить или уменьшить ошибку, предсказанную на следующем шаге, путем умножения h на

$$m = S_f * \left(\frac{T}{\|\widehat{y_{n+i}} - y_{n+i}\|} \right)^{1/(p+1)}; \quad h_{\text{new}} = m^* h_{\text{old}}, \quad (36)$$

где задание коэффициента размера шага m^* представлено в табл. 6, а S_f — коэффициент надежности. Предполагается, что значение коэффициента надежности лежит между 0 и 1, и предпочтительно использовать $S_f = 0.9$.

Таблица 6. Задание коэффициента размера шага m^*

m	$m \geq 2$	$1 \leq m < 2$	$0.9 \leq m < 1$	$0.5 \leq m < 0.9$	$m < 0.5$
m^*	2	1	0.9	m	0.5

В работе [5] было отмечено, что цель фиксации размера шага между двумя границами 0.5 и 2.0 — избежать колебаний в h . Уравнение (36) можно улучшить путем умножения h не на m , а на $\min(\max(0.5, fac * m), factax)$. Здесь $factax$ и fac — коэффициенты надежности, включенные в код для того, чтобы не дать размеру шага быстро увеличиваться и тем самым избежать излишнего числа отвергнутых шагов. Мы выбрали $factax = 2.0$ и $fac = 0.9$. Интересен тот факт, что методы переменного числа шагов построены таким образом, что шаг может быть отвергнут и размер шага может быть уменьшен, если $\|\widehat{y_{n+i}} - y_{n+i}\| > T$ или если условие допустимости ошибки удовлетворяется, шаг принимается и выбирается такой размер шага h , который будет подходить для следующего шага. Если условие допустимости не удовлетворяется, шаг повторяется с новым размером шага, равным $h/2$. Если условие допустимости удовлетворяется с большим допуском, т. е. если $\|\widehat{y_{n+i}} - y_{n+i}\| < T$ после принятия шага, то размер следующего шага удваивается. Таким образом, размер шага автоматически приспособливается к размеру, при котором локальная ошибка усечения находится около уровня, заданного пользователем.

В случае гибридных линейных многошаговых методов (2), (3) для $k = 1$ четвертого порядка

$$y_{n+1} = y_n + \frac{hf_n}{6} + \frac{h}{6}f_{n+1} + \frac{2h}{3}f_{n+\frac{1}{2}}, \quad p = 4 \quad (37)$$

с гибридным предиктором в (16) для $k = 1$, задаваемым в виде

$$y_{n+\frac{1}{2}} = \frac{y_n}{4} + \frac{3y_{n+1}}{4} - \frac{1}{4}hf_{n+1}, \quad p = 2, \quad (38)$$

мы предлагаем вычислить альтернативную аппроксимацию к y в конце шага и считать нормированную разность между $\|\widehat{y_{n+1}} - y_{n+1}\|$ оценкой ошибки. Альтернативная формула A -устойчивой аппроксимации — это гибридная корректорная формула, задаваемая в виде

$$\widehat{y_{n+1}} = y_n + \frac{hf_n}{8} + \frac{3}{8}hf_{n+\frac{1}{3}} + \frac{3}{8}hf_{n+\frac{2}{3}} + \frac{1}{8}hf_{n+1}, \quad p = 4 \quad (39)$$

с гибридными предикторами

$$y_{n+\frac{1}{3}} = y_n + \frac{1}{3}hf_{n+1} - \frac{5}{18}h^2f'_{n+1}, \quad p = 2, \quad (40)$$

$$y_{n+\frac{2}{3}} = y_n + \frac{26hf_n}{81} + \frac{28}{81}hf_{n+1} - \frac{10}{81}h^2f'_{n+1}, \quad p = 3. \quad (41)$$

Следовательно, оценка ошибки представляет собой разность между $\widehat{y_{n+1}}$ и y_{n+1} и задается в виде

$$\|\widehat{y_{n+1}} - y_{n+1}\| = \left\| -\frac{1}{24}f_n + \frac{2}{3}hf_{n+\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}hf_{n+\frac{1}{3}} + \frac{3}{8}hf_{n+\frac{2}{3}} - \frac{1}{24}hf_{n+1} \right\|.$$

Подойдет любая норма, однако максимум-норма предпочтительнее для легкости вычислений. Можно убедиться в том, что $\|\widehat{y_{n+1}} - y_{n+1}\| = O(h^4)$. Этот факт будет использоваться при приспособлении размера шага в (36), когда (37), (39), ФДН [12] и ЛММВП [8] применяются к задачам 1–4 соответственно. Полученные в результате нелинейные алгебраические уравнения y_{n+1} в (37), (39), ФДН [12] и ЛММВП [8] были решены с использованием метода Ньютона (10), когда (37), (39), методы ФДН и ЛММВП четвертого порядка применялись к задачам 1–4 соответственно, тогда как явная формула трапеций

$$y_{n+1}^{(s)} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n-1}), \quad s = 0, 1, \dots, \quad p = 2 \quad (42)$$

использовалась для получения начального значения схемы Ньютона (10). В табл. 6–9 представлены результаты численного эксперимента.

Таблица 7. Ошибки АЧМ (2) в сравнении с ФДН и ЛММВП (метод Энрайта) для задачи 1

Метод	Начальный размер шага	ДОП	$\ \widehat{y}_n - y_n\ $	Начальный размер шага	ДОП	$\ \widehat{y}_n - y_n\ $
АЧМ (2)	10^{-2}	10^{-4}	$2.4408 \cdot 10^{-2}$	10^{-4}	10^{-6}	$2.4524 \cdot 10^{-2}$
ФДН [12]	10^{-2}	10^{-4}	1.6467	10^{-4}	10^{-6}	$2.0513 \cdot 10^{-2}$
ЛММВП [8]	10^{-2}	10^{-4}	$5.6075 \cdot 10^{178}$	10^{-4}	10^{-6}	$2.6390 \cdot 10^{-6}$

При малом размере шага порядка $0(10^{-4})$ методы дают допустимые ошибки, тогда как для размера шага порядка $0(10^{-2})$ методы дают нераспознаваемое число (*NaN*). Это обусловлено жесткостью задач. Реализация метода с переменным размером шага лучше при большем размере шага, чем у ФДН и ЛММВП, точность которых увеличивается при уменьшении размера шага (см. табл. 7–10).

Таблица 8. Ошибки АЧМ (2) в сравнении с ФДН и ЛММВП (метод Энрайта) для задачи 2

Метод	Начальный размер шага	ДОП	$\ \widehat{y}_n - y_n\ $	Начальный размер шага	ДОП	$\ \widehat{y}_n - y_n\ $
АЧМ (2)	10^{-2}	10^{-4}	<i>NaN</i>	10^{-4}	10^{-6}	$4.4935 \cdot 10^{-3}$
ФДН [12]	10^{-2}	10^{-4}	<i>NaN</i>	10^{-4}	10^{-6}	$5.9182 \cdot 10^{-9}$
ЛММВП [8]	10^{-2}	10^{-4}	<i>NaN</i>	10^{-4}	10^{-6}	$9.6892 \cdot 10^{-7}$

Таблица 9. Ошибки АЧМ (2) в сравнении с ФДН и ЛММВП (метод Энрайта) для задачи 3

Метод	Начальный размер шага	ДОП	$\ \widehat{y}_n - y_n\ $	Начальный размер шага	ДОП	$\ \widehat{y}_n - y_n\ $
АНМ (2)	10^{-2}	10^{-4}	<i>NaN</i>	10^{-4}	10^{-6}	$1.6815 \cdot 10^{-2}$
ФДН [12]	10^{-2}	10^{-4}	<i>NaN</i>	10^{-4}	10^{-6}	$3.1065 \cdot 10^{-1}$
ЛММВП [8]	10^{-2}	10^{-4}	<i>NaN</i>	10^{-4}	10^{-6}	$9.6892 \cdot 10^{-7}$

Таблица 10. Ошибки АЧМ (2) в сравнении с ФДН и ЛММВП (метод Энрайта) для задачи 4

Метод	Начальный размер шага	ДОП	$\ \widehat{y}_n - y_n\ $	Начальный размер шага	ДОП	$\ \widehat{y}_n - y_n\ $
АЧМ (2)	10^{-2}	10^{-4}	$3.7385 \cdot 10^{-43}$	10^{-4}	10^{-6}	$3.6622 \cdot 10^{-43}$
ФДН [12]	10^{-2}	10^{-4}	$2.8296 \cdot 10^{-173}$	10^{-4}	10^{-6}	$1.4395 \cdot 10^{-174}$
ЛММВП [8]	10^{-2}	10^{-4}	$2.2165 \cdot 10^{-87}$	10^{-4}	10^{-6}	$1.969 \cdot 10^{-89}$

Заключение

В данной статье представлен класс $A(\alpha)$ -устойчивых численных методов (АЧМ) для решения жестких НЗ в обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ). Кривые граничного места точек на рис. 2 и 3 показывают, что метод (2), (3) имеет неограниченный интервал абсолютной устойчивости для числа шагов $k \leq 7$. Кривые устойчивости показывают, что новое семейство методов имеет более $A(\alpha)$ -устойчивые методы, чем для

формулы дифференцирования назад, и сравнимо с линейными многошаговыми методами Энрайта со второй производной.

Благодарности. Автор благодарит проф. Дж.С. Бутчера за присланные его статьи, опубликованные во время подготовки Ph.D программы в 2007 г. Автор благодарит рецензентов за предложения, которые помогли значительно улучшить статью.

Литература

1. **Butcher J.C.** A modified multistep method for the numerical integration of ordinary differential equations // J. ACM. — 1965. — Vol. 12, № 1. — P. 125–135.
2. **Butcher J.C.** The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods. — Chichester: Wiley, 1987.
3. **Butcher J.C.** Some new hybrid methods for IVPs // Computational ODEs / J.R. Cash and Glad Well, eds. — Oxford: Clarendon Press. — 1992. — P. 29–46.
4. **Butcher J.C.** High order *A*-stable numerical methods for stiff problems // J. of Scientific Computing. — 2005. — Vol. 25. — P. 51–66.
5. **Butcher J.C.** Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Second Edition. — Chichester: Wiley, 2008.
6. **Dahlquist G.** A special stability problem for linear multistep methods // BIT. — 1963. — Vol. 3. — P. 27–43.
7. **Enright W.H.** Continuous numerical methods for ODEs with defect control // J. Comput. Appl. Math. — 2000. — Vol. 125. — P. 159–170.
8. **Enright W.H.** Second derivative multistep methods for stiff ordinary differential equations // SIAM. J. Numer. Anal. — 1974. — Vol. 11. — P. 321–331.
9. **Fatunla S.O.** Numerical Methods for Initial Value Problems in ODEs. — New York: Academic Press, 1978.
10. **Gragg W.B., Stetter H.J.** Generalized multistep predictor-corrector methods // J. Assoc. Comput. Mach. — 1964. — Vol. 11. — P. 188–209.
11. **Gear C.W.** Hybrid methods for initial value problems in ordinary differential equations // SIAM. J. Numer. Anal. — 1965. — Vol. 2. — P. 69–86.
12. **Gear C.W.** Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. Englewood Cliffs. — NJ: Prentice-Hall, 1971.
13. **Hairer E., Wanner G.** Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.
14. **Higham J.D., Higham J.N.** Matlab Guide. — Philadelphia: SIAM, 2000.
15. **Ikhile M.N.O., Okuonghae R.I.** Stiffly stable continuous extension of second derivative LMM with an off-step point for IVPs in ODEs // J. Nig. Assoc. Math. Physics. — 2007. — Vol. 11. — P. 175–190.
16. **Ikhile M.N.O., Okuonghae R.I., and Ogunleye S.O.** Some general linear methods for the numerical solution of non-stiff IVPs in ODEs // J. of Algorithms and Computational Technology. — 2013. — Vol. 7, iss. 1. — P. 41.
17. **Ikhile M.N.O.** Coefficients for studding one-step rational schemes for IVPs in ODEs: III. Extrapolation methods // Comp. and Maths. with Appli. — 2004. — Vol. 47. — P. 1463–1475.
18. **Lie I., Norsett S.P.** Superconvergence for multistep collocation // Math. Comp. — 1989. — Vol. 52, № 185. — P. 65–79.

19. **Lambert J.D.** Numerical Methods for Ordinary Differential Systems. The Initial Value Problems. — Chichester: Wiley, 1991.
20. **Lambert J.D.** Computational Methods for Ordinary Differential Systems. The Initial Value Problems. — Chichester: Wiley, 1973.
21. **Okuonghae R.I.** Stiffly Stable Second Derivative Continuous LMM for IVPs in ODEs: Ph.D Thesis. — Nigeria, Benin City: Dept. of Math. University of Benin, 2008.
22. **Okuonghae R.I.** A Class of Continuous Hybrid LMM for Stiff IVPs in ODEs. Annals of the Alexandru Ioan Cuza University. Mathematics. — 2012. — Vol. LVIII, iss. 2. — P. 239–258.
23. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** A continuous formulation of $A(\alpha)$ -stable second derivative linear multistep methods for stiff IVPs and ODEs // J. of Algorithms and Comp. Technology. — 2012. — Vol. 6, iss. 1. — P. 80–100.
24. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** $A(\alpha)$ -stable linear multistep methods for stiff IVPs and ODEs // Acta Univ. Palacki. Olomuc. Fac. rer. nat. Mathematica. — 2011. — Vol. 50, № 1. — P. 75–92.
25. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** On the construction of high order $A(\alpha)$ -stable hybrid linear multistep methods for stiff IVPs and ODEs // J. of Numerical Analysis and Applications. — 2012. — Vol. 15, № 3. — P. 231–241.
26. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** The numerical solution of stiff IVPs in ODEs using modified second derivative BDF // Acta Univ. Palacki. Olomuc. Fac. rer. nat. Mathematica. — 2012. — Vol. 51. — P. 51–77.
27. **Okuonghae R.I., Ikhile M.N.O.** A class of hybrid linear multistep methods with $A(\alpha)$ -stability properties for stiff IVPs in ODEs // J. of Numerical Mathematics. — (Accepted for publication.)
28. **Kaps P.** Rosenbrock-type methods // Numerical Methods for Solving Stiff Initial Value Problems / G. Dahlquist, R. Jeltsch, eds. — Aachen, Germany: Inst. für Geometrie und praktische Math. (IGPM) der RWTH Aachen, 1981. — Bericht № 9.
29. **Nordsieck A.** On numerical integration of ordinary differential equations // Math. Comp. — 1962. — Vol. 16. — P. 22–49.
30. **Selva M., Arevalo C., and Fuhrer C.** A collocation formulation of multistep methods for variable step-size extensions // Appl. Numer. Math. — 2002. — Vol. 42. — P. 5–16.
31. **Sirisena U., Onumanyi P., and Chollon J.P.** Continuous hybrid methods through multistep collocation // ABACUS. — 2002. — Vol. 28. — P. 58–66.
32. **Widlund O.** A note on unconditionally stable linear multistep methods // BIT. — 1967. — Vol. 7. — P. 65–70.

Поступила в редакцию 27 августа 2012 г.