чает волне, распространяющейся с замороженной скоростью звука. В последней относительное течение среды дозвуковое, а $\tilde{\omega}/\omega_0 \approx 8$, $\tilde{a} = 113p_0$.

В диапазоне скоростей $(c_e(p_0),\ c_f(p_0))$ стационарные возмущения являются солитонами, для которых дисперсионное соотношение вырождается в нелинейную зависимость между скоростью и амплитудой. Для сравнения линией *1* показана дисперсионная зависимость (2).

В заключение автор благодарит В. К. Кедринского за внимание к работе и обсуждение результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С.** Волны в жидкостях с пузырьками // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа.— М.: ВИНИТИ, 1982.— Т. 17.
2. **Плаксин С. И.** О стационарных решениях уравнений движения жидкости с пузырьками газа // ПМТФ.— 1983.— № 1.
3. **Ляпидевский В. Ю., Плаксин С. И.** Структура ударных волн в газожидкостной среде с нелинейным уравнением состояния // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1983.— Вып. 62.
4. **Бхатнагар П.** Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах.— М.: Мир, 1983.
5. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.

*Поступила 18/V 1987 г.*

---

УДК 532.517.6.013.4

# УСТОЙЧИВОСТЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЗАПЫЛЕННОЙ ГАЗОВОЙ СТРУИ

*Е. П. Курочкина, М. П. Стронгин*

*(Новосибирск)*

Интерес к моделированию поведения газодисперсных потоков с сильными градиентами параметров существенно усилился в последние годы, с одной стороны, из-за все возрастающего числа практических приложений потоков, в частности, в химической технологии и в проблеме охраны окружающей среды (распространение аэрозолей), а с другой — из-за возрастающих возможностей расчета таких течений. Особое место занимает здесь проблема устойчивости подобных потоков, решение которой позволяет в ряде случаев получить оценки критических параметров перехода ламинарного течения в турбулентное. Расчеты устойчивости, проведенные для запыленных изотермических газовых потоков [1—3], показали возможности существенной стабилизации течения частицами (критические числа Рейнольдса могут возрасти при определенных условиях на несколько порядков величины). Однако расчеты устойчивости термически стратифицированных потоков с примесью дисперсной фазы в настоящее время отсутствуют, хотя имеют, пожалуй, большее практическое значение. В данной работе рассматривается устойчивость плоской газопылевой струи с температурой, существенно отличной от температуры среды, в которой течет эта струя.

Течение затопленной вязкой неизотермической газодисперсной струи описывается системой уравнений Навье — Стокса с учетом взаимодействия газ — частицы, моделируемого членом типа стоксовской силы. Как отмечалось в [1—3], важным параметром является $\beta = \tau/\tau_0$, где $\tau = L/(U_m\alpha C)$ ($L$ и $U_m$ — характерные масштабы длины и скорости струи, $\alpha$ и $C$ — волновое число и фазовая скорость возмущений), а $\tau_0 = \rho_0 d^2/(18\mu_g)$— время стоксовской релаксации относительной скорости частиц ($\rho_0$ — плотность материала частиц, $d$ — диаметр частицы, $\mu_g$ — вязкость газа). Обычно в реальных запыленных потоках реализуется случай $\beta \ll 1$. В качестве иллюстрации можно провести следующие оценки. Для частиц диаметром $10^{-4}$ м с плотностью $\rho_0 \approx 10^4$ кг/м$^3$ и при вязкости горячего воздуха $\mu_g \approx 2\cdot10^{-5}$ кг/(м·с) время релаксации составляет $\tau_0 \approx 5/18$ с. В то же время для типичных масштабов струй $L \approx 10^{-2}$ м, $U_m \approx 2\cdot10^2$ м/с, $\alpha C \approx 10^{-2}$ (из результатов данной работы) $\tau \approx 5\cdot10^{-3}$ с, а $\beta \approx 18\cdot10^{-3}$. Таким образом, характерные пульсационные скорости частиц существенно меньше пульсационной скорости газа. Поэтому при проводимом здесь анализе устойчивости возмущением частиц можно пренебречь. Так как параметр $\beta_1 = 18\rho_g L^2/(\rho_0 \operatorname{Re} d^2)$ зависит от числа Рейнольдса $\operatorname{Re} = LU_m/\nu_g$ ($\nu_g^{-1} = \rho_g/\mu_g$, $\rho_g$ — плотность газа), то его неудобно использовать как независимый (в [2—4] $\beta_1$ задавалось, что привело к очевидным трудностям при расчете нейтральных кривых с $\beta_1 \ll 1$). В качестве характерного параметра в данной работе берется $A = 18\delta(L/d)^2$ ($\delta$ — объемная концентрация частиц). Для приведенных выше параметров $18(L/d) \approx 1{,}8\cdot 10^5$ и при изменении $\delta$ от $10^{-5}$ до $10^{-2}$ $A$ может увеличиться от 1,8 до $1{,}8\cdot 10^3$.

Исходя из уравнений Навье — Стокса для неизотермического течения и используя закон Стокса для описания влияния частиц на течение газа, можно получить следующую систему уравнений:

$$\rho\frac{dU}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2}{\operatorname{Re}_-}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{1}{\operatorname{Re}_-}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] -$$
$$-\frac{2}{3\operatorname{Re}_-}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\right] + \frac{An\mu}{\operatorname{Re}_-}(U - U_0),$$
$$\rho\frac{dV}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{2}{\operatorname{Re}_-}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{1}{\operatorname{Re}_-}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] -$$
$$-\frac{2}{3\operatorname{Re}_-}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\right] + \frac{An\mu}{\operatorname{Re}_-}(V - V_0),$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} = 0.$$

Здесь и ниже $U$, $V$ и $x$, $y$ — продольные, поперечные скорости и координаты; $P$ — давление; $n$ — распределение концентрации частиц; $\rho = \rho_g/\rho_{g-}$; $\mu = \mu_g/\mu_{g-}$; $\operatorname{Re}_- = LU_m/\nu_{g-}$; индекс плюс соответствует значению параметров на оси струи, минус — на бесконечности по координате $y$, нуль — скорости частиц. В плоскопараллельном приближении исследуется устойчивость стационарных решений этой системы. Поля скорости, температуры и концентрации считаются заданными и зависящими от $y$. Для поля скорости принимаются зависимости: ступенчатого типа, соответствующие начальному участку струи, и автомодельного типа:

(1) $$U_1 = 1, \ |y| < 1; \ U_1 = 0, \ |y| \geqslant 1;$$

(2) $$U_1 = \{1 + \operatorname{th}[(1 - |y|)/\theta]\}/2, \ \theta \ll 1, \ -\infty < y < +\infty;$$

(3) $$U_1 = 1 - \operatorname{th}^2 y, \ -\infty < y < +\infty,$$

а $T(y) = sU_1(y) + 1$, $n(y) = -U_1(y)$. Параметр $s$ варьируется от 0 до $-0{,}9$ (холодное течение) и от 0 до 10 (горячее), при $s = 0$ течение изотермическое. Считается, что плотность обратно пропорциональна температуре, а для вязкости используется зависимость $\mu = \sqrt{T}$. Пренебрегается пульсациями температуры и концентрации частиц.

С помощью метода малых возмущений [5] получается система уравнений

(4) $$i\alpha\operatorname{Re}_-\rho(U_1 - C)u + \rho\operatorname{Re}_- U_1' v = -i\alpha\operatorname{Re}_- p -$$
$$-4\alpha^2\mu u/3 - 2i\alpha\mu v'/3 + i\alpha(\mu v)' + (\mu u')' + An\mu u;$$

(5) $$i\alpha\operatorname{Re}_-\rho(U_1 - C)v = -\operatorname{Re}_- p' - \alpha^2\mu v -$$
$$-2i\alpha(\mu u)'/3 + i\alpha\mu u' + 4(\mu v')'/3 + An\mu v;$$

(6) $$i\alpha\rho u + (\rho v)' = 0,$$

где $u(y)$, $v(y)$, $p(y)$ — амплитуды возмущений скоростей и давления. Рассматриваются симметричные на оси и затухающие на бесконечности решения. Математическая формулировка этих условий приводится ниже. Критическое число Рейнольдса $\operatorname{Re}_*$ находится как минимум $\operatorname{Re}_+ = \operatorname{Re}_-\rho_+/\mu_+$ для нейтральных возмущений. В силу симметрии задачи можно ограничиться положительными $y$. Устойчивость однофазного изотермического течения для (1) исследована в [6], а двухфазного для (2), (3) — в [1, 7, 8].

Для профиля (1) система (4)—(6) имеет кусочно-постоянные коэффициенты. Область по $y$ можно разбить на две подобласти ($0 \leqslant y < 1$) и $1 \leqslant y < +\infty$) и в каждой записать аналитическое решение. Из-за наличия разрывов у функций $U_1$ и $\rho$, $\mu$ анализ системы (4)—(6) затруднителен. Поэтому сначала, согласно законам сохранения массы и потоков импульса, вводятся новые переменные: $\varphi = \rho v$ (используется (6)), $q = 4\mu v'/3 - 2i\alpha\mu u/3 - \mathrm{Re}_- p$ (из уравнения (5)) и $w = \mathrm{Re}_- U_1 \varphi + i\alpha\mu v/3 - \mu u'$. При определении $w$ применяются (4) и соотношение $\mu v' = 2(\mu v)'/3 - i\alpha\mu u/3$, которое следует из принятых зависимостей плотности и вязкости от температуры. Новые переменные непрерывны и для разрывных профилей $U_1$ и $T$.

Система (4)—(6) в новых переменных имеет вид (переменная $u$ остается без изменения)

$$
\begin{aligned}
u' &= [\mathrm{Re}_- U_1/\mu + i\alpha/(3\rho)]\varphi - w/\mu,\\
q' &= [4\alpha^2\mu/(3\rho) - i\alpha\mathrm{Re}_- C - An\mu/\rho]\varphi + i\alpha w,\\
\varphi' &= -i\alpha\rho u,\\
w' &= [i\alpha\mathrm{Re}_-\rho(C - 2U_1) - 8\alpha^2\mu/3 + An\mu]u + i\alpha q.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Ищется решение, затухающее на бесконечности и симметричное в нуле по функциям $\varphi$ и $w$:

$$
\begin{aligned}
u_+ &= c_1 \operatorname{sh}(\alpha y) + c_2 \operatorname{sh}(\varkappa y),\\
q_+ &= -i(\alpha + \varkappa^2/\alpha)\mu_+ c_1 \operatorname{sh}(\alpha y) - 2i\alpha\mu_+ c_2 \operatorname{sh}(\varkappa y),\\
\varphi_+ &= -i\rho_+ c_1 \operatorname{ch}(\alpha y) - i\alpha\rho_+ c_2 \operatorname{ch}(\varkappa y)/\varkappa,\\
w_+ &= -(i\mathrm{Re}_-\rho_+ + 2\alpha\mu_+/3)c_1 \operatorname{ch}(\alpha y) +\\
&+ (\alpha^2\mu_+/3 - \varkappa^2\mu_+ - i\alpha\,\mathrm{Re}_-\rho_+)c_2 \operatorname{ch}(\varkappa y)/\varkappa
\end{aligned}
$$

(где $0 \leqslant y < 1$, $\varkappa^2 = \alpha^2 + i\alpha\mathrm{Re}_-(1 - C)\rho_+/\mu_+ - A$), $u_- = c_3\exp(-\alpha y) + c_4 \exp(-\gamma y)$, $q_- = -(\mathrm{Re}_- C + 2i\alpha)c_3 \exp(-\alpha y) - 2i\alpha c_4 \exp(-\gamma y)$, $\varphi_- = ic_3 \exp(-\alpha y) + i\alpha c_4 \exp(-\gamma y)/\gamma$, $w_- = 2\alpha c_3 \exp(-\alpha y)/3 + [\gamma - \alpha^2/(3\gamma)]c_4 \exp(-\gamma y)$ ($1 \leqslant y < +\infty$, $\gamma^2 = \alpha^2 - i\alpha\mathrm{Re}_- C$). Условия непрерывности $u$, $q$, $\varphi$ и $w$ в точке $y = 1$ приводят к системе

$$
Fc_m = 0, \tag{8}
$$

$$
F = \begin{pmatrix}
\operatorname{sh}\alpha & \operatorname{sh}\varkappa & -\exp(-\alpha) & -\exp-(\gamma)\\
F_{21} & F_{22} & F_{23} & 2i\alpha\exp(-\gamma)\\
-i\rho_+\operatorname{ch}\alpha & F_{32} & -i\exp(-\alpha) & -i\alpha\exp(-\gamma)/\gamma\\
F_{41} & F_{42} & -2\alpha\exp(-\alpha)/3 & F_{44}
\end{pmatrix},
$$

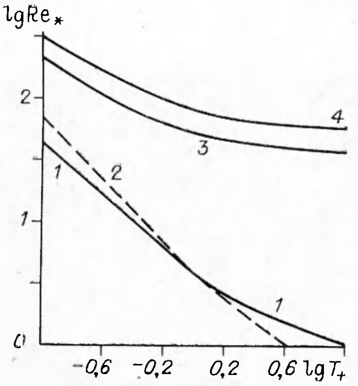
$$
\begin{gathered}
F_{21} = -i(\alpha + \varkappa^2/\alpha)\mu_+ \operatorname{sh}\alpha,\ F_{22} = -2i\alpha\mu_+ \operatorname{sh}\varkappa,\\
F_{23} = (\mathrm{Re}_- C + 2i\alpha)\exp(-\alpha),\ F_{32} = -i\alpha\rho_+ \operatorname{ch}\varkappa/\varkappa,\\
F_{41} = -(2\alpha\mu_+/3 + i\mathrm{Re}_-\rho_+)\operatorname{ch}\alpha,\ F_{42} = (\alpha^2\mu_+/3 - \varkappa^2\mu_+ -\\
- i\alpha\mathrm{Re}_-\rho_+)\operatorname{ch}\varkappa/\varkappa,\\
F_{44} = [\alpha^2/(3\gamma) - \gamma]\exp(-\gamma),\ c_m = (c_1, c_2, c_3, c_4)^{\perp}.
\end{gathered}
$$

Для нетривиальной разрешимости (8) необходимо выполнение условия

$$
\det \| F \| = 0. \tag{9}
$$

Посредством решения (9) методом секущих строится нейтральная кривая относительно $\mathrm{Re}_+$ и находится $\mathrm{Re}_*$.

Для профилей (2), (3) система (7) разрешается только численно. Использование системы (4)—(6) приводит к значительному увеличению трудностей при численной реализации из-за наличия коэффициентов с сильными градиентами ($\sim$ производной от быстроменяющихся функций). Для численного расчета в данной работе используются метод Кран-



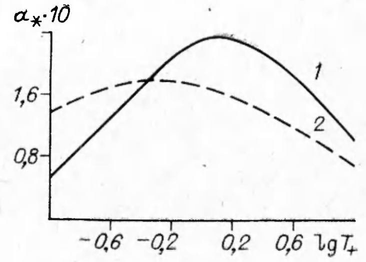




Рис. 2

Рис. 1

ка — Николсона и встречная прогонка. Поскольку при $y \to \infty$ $U_1(y)$, $T(y)$ и $n(y)$ стремятся к нулю, условия затухания могут быть сведены к следующим: $u = [(\gamma^2 - \alpha^2/3 - 2\alpha\gamma/3)\varphi + i(\gamma - \alpha)w]/(\alpha \mathrm{Re}_- C)$, $q = \{[(\alpha^2/3 - \gamma^2)(2i\alpha + \mathrm{Re}_- C) + 4i\alpha^2\gamma/3]\,\varphi - (\gamma - \alpha)^2 w\}/(\alpha \mathrm{Re}_- C)$. Причем для (2) условия затухания можно поставить при $y = 2$, а для (3) — при $y = 6$.

На рис. 1 (кривые *1*, *2*) приведены результаты расчетов для однофазных термически стратифицированных струй ($A = 0$). Значения $\mathrm{Re}_*$ горячего потока уменьшаются (кривая *1* соответствует (1), (2), а *2* — (3)), струя дестабилизируется. При восьмикратном перегреве замедляется процесс для (1), (2) и $\mathrm{Re}_*$ слабее зависит от перегрева. Оказывается, что горячие струи с автомодельным профилем (3) менее устойчивы и дестабилизация замедляется при гораздо более сильном перегреве. В холодной струе происходит степенной (по $T_+$) рост значений $\mathrm{Re}_*$ ($\mathrm{Re}_* \sim T_+^{-1}$ для (3) и $\mathrm{Re}_* \sim T_+^{-0,83}$ для (1), (2)). Причем течение с профилем (3) более устойчиво, чем с профилями (1), (2) для $\lg T_+ < 0$.

Для неизотермических потоков обнаружено интересное поведение критических волновых чисел (рис. 2). Они имеют максимум, который для профилей ступенчатого типа (1), (2) находится в перегретой области (кривая *1*), а для (3) смещен в холодную (кривая *2*). Критические фазовые скорости $C_*$ также имеют максимум (рис. 3), но поведение их более сложно (кривая *1* соответствует (1), (2), а *2* — (3)). Для изучения влияния переменности теплофизических свойств течений на $\mathrm{Re}_*$ проведены расчеты с постоянными $\rho$ и $\mu$. Показано, что наибольшее влияние на $\mathrm{Re}_*$ оказывает изменение плотности, что вполне естественно, поскольку она сильнее зависит от температуры.

Результаты исследований для двухфазных струй с профилем (1) представлены на рис. 1 (линии *3*, *4*) и рис. 4. Так как горячие струи менее стабильны по сравнению с изотермическими или холодными, рассматриваются горячие газопылевые течения. При $T_+ = 11$ получена зависимость $\mathrm{Re}_*$ от параметра $A$ (рис. 4, кривая *2*), пропорционального объемной концентрации частиц. Для $A > 30$ наблюдается линейная зависимость $\mathrm{Re}_*$ от $A$ ($\mathrm{Re}_* = 0{,}5A + 32$), но стабилизация гораздо слабее, чем в изотермическом случае (кривая *1*). На рис. 1 (линии *3*, *4*) приведены

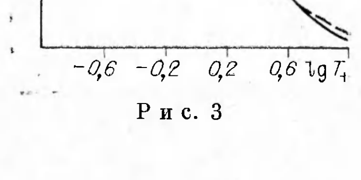



Рис. 3

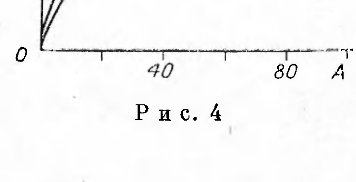



Рис. 4

зависимости $\mathrm{Re}_*$ от $T_+$ для различных $A$ (линии *3*, *4* отвечают $A = 23$ и 50). Уже при семикратном перегреве $\mathrm{Re}_*$ очень слабо меняется. Проведенные расчеты для профилей (1) и (2) практически совпадают. Поскольку при расчете их устойчивости использовались различные методы, это обеспечило взаимный контроль.

Таким образом, с ростом концентрации частиц наблюдается стабилизация потока. Нагрев струи определенным образом (рис. 1, кривые *3*, *4*, рис. 4, кривая *2*) гасит эффект стабилизации, не нерушая, однако, линейной зависимости $\mathrm{Re}_*$ от $A$, т. е., как и в изотермическом случае, показана возможность значительной стабилизации струи частицами ($\mathrm{Re}_*$ могут увеличиться на несколько порядков величины). Кроме того, отмечена большая устойчивость сильно перегретой струи со ступенчатым профилем по сравнению со струей с автомодельным профилем, в то время как в изотермическом случае значения $\mathrm{Re}_*$ совпадают.

Авторы признательны В. Н. Штерну за полезные консультации и замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Курочкина Е. П., Стронгин М. П.** Нелинейная устойчивость двухфазных струй // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 3.
2. **Saffman P. G.** On the stability of laminar flow of a dusty gas // J. Fluid Mech.— 1962.— V. 13, N 1.
3. **Michael D. H.** The stability of plane Poiseuille flow of a dusty gas // J. Fluid Mech.— 1964.— V. 18, N 1.
4. **Нармуратов Ч. Б., Соловьев А. С.** О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 1.
5. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н.** Гидродинамическая устойчивость и турбулентность.— Новосибирск: Наука, 1977.
6. **Курочкина Е. П.** Смена режима в плоской струе со ступенчатым профилем скорости // ПМТФ.— 1984.— № 6.
7. **Курочкина Е. П.** Устойчивость и ветвление плоских двухфазных струйных течений // Устойчивость и турбулентность.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985.
8. **Курочкина Е. П.** Расчет нелинейной устойчивости двухфазных течений // Турбулентные двухфазные течения и техника эксперимента.— Таллин: Ин-т термофизики и электрофизики АН ЭССР, 1985.— Ч. 2.

*Поступила 16/VI 1987 г.*

---

УДК 536.25

# О ГИДРОХИМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КАПЛИ ПРИ МАССОПЕРЕНОСЕ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ

*А. А. Головин, Л. М. Рабинович*

*(Москва)*

Известно, что массоперенос веществ, способных существенно изменять поверхностное натяжение, и межфазная химическая реакция могут приводить к возникновению градиентов поверхностного натяжения. Эти градиенты в результате эффекта Марангони [1] способны вызывать неустойчивость поверхности раздела фаз и приводить к образованию приповерхностных конвективных структур, а также к развитию в объемах фаз межфазной конвекции и турбулентности [2]. Исследование гидродинамической устойчивости жидкой реагирующей капли, окруженной газом или другой несмешивающейся жидкостью, представляет особый интерес в связи с проблемой интенсификации процессов массопереноса при хемосорбции газов и жидкостной экстракции, сопровождающейся химическими реакциями [3].

Задача об устойчивости сферической границы раздела фаз (поверхности капли или пузыря) при наличии поверхностных реакций и переноса поверхностно-активных веществ (ПАВ) в наиболее общем виде поставлена в [4, 5]. В [4] приведен линейный анализ устойчивости стационарного состояния, учитывающего произвольное число реагирующих веществ и химические реакции на поверхности, зависимость скорости которых от концентрации описывается произвольной функцией, получено дисперсионное уравнение и проведен его анализ в приближении малых капель для одного реагирующего вещества. При этом подробно рассматривалась деформационная устойчивость поверхности капли. Результаты этой работы обобщены в [5], где при условии локального адсорбционного равновесия между поверхностью раздела и примыкающими слоями жидкости учитывалась конвективная диффузия реагентов в объемах фаз.