ла) к появлению сильных ударных волн и нежелательной перестройке потока. Поэтому такое сужение потребует внимательного анализа неоднородности потока. По существу, обсуждаемое явление связано с некоторым подогревом газа в сверхзвуковой области течения и оптимальные значения α_j позволяют получить это наилучшее распределение температуры и давления сверхзвукового потока. В этом смысле полученные результаты обладают большей общностью, поскольку необходимое повышение температуры газа можно осуществить и иными методами (вдув горячего газа, электроподогрев и т. п.), используя при этом сопла без поджатия. Такой подогрев можно осуществить и с помощью системы достаточно слабых ударных волн (косых скачков уплотнения) аналогично предлагаемому в [2].

Поступила 17 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лосев С. А., Макаров В. Н.** Многофакторная оптимизация газодинамического лазера на углекислом газе. I. Оптимизация коэффициента усиления.— «Квант. электроника», 1975, т. 2, № 7, с. 1454—1458.
2. **Blackman A. W.** Laser device. Patent USA, 1971, N 3566297.

УДК 533.9+621.039.61

ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ ИОННОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В МНОГОПРОБОЧНОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

Ю. В. Васильев, Д. Д. Рютов

(*Новосибирск*)

Существенное уменьшение теплопроводности и скорости продольного расширения плазмы в многопробочных магнитных ловушках [1] делает такие системы весьма перспективными с точки зрения осуществления термоизоляции плотной плазмы вдоль магнитного поля в термоядерном реакторе. Количественно поведение плазмы в многопробочных ловушках может быть описано с помощью уравнений газодинамического типа, полученных в работах [2, 3]. Справедливость этих уравнений подтверждена экспериментально на установках со щелочной плазмой [4, 5].

На установках следующего поколения с дейтериевой или дейтерий-тритиевой плазмой актуальными станут измерения выхода нейтронов из плазмы (прежде всего в диагностических целях). В связи с этим возникает вопрос о нахождении связи между выходом нейтронов и макроскопическими параметрами плазмы.

Решение этой задачи в применении к рассматриваемым установкам связано со следующей специфической особенностью. Система газодинамических уравнений [1—3] правильно описывает функции распределения частиц, длина свободного пробега которых λ мала по сравнению с длиной установки L. В практически интересных случаях это условие выполняется для основной массы частиц плазмы, однако, как хорошо известно (см., например, [6]), вклад в нейтронный выход при не слишком больших температурах плазмы ($T \leqslant 40$—50 кэВ) вносят главным образом высокоэнергетические «хвосты» функций распределения. А так как длина свободного пробега быстро растет с энергией, может оказаться, что для нахождения нейтронного выхода требуется знать функции распределения в области энергий ε, где $\lambda(\varepsilon) > L$ и где поэтому нельзя пользоваться результатами работ [1—3].

Цель данной работы * — отыскание функций распределения в области энергий, где $\lambda(\varepsilon) > L$.

1. Асимптотика функций распределения в дейтериевой или дейтерий-тритиевой плазме. Частицы с $\lambda(\varepsilon)/k \ll L$ покидают установку диффузионным образом, испытывая множество столкновений. Для них функция распределения близка к максвелловской. В области энергий $\lambda(\varepsilon)/k \gg L$ важную роль в формировании функций распределения, помимо кулоновских столкновений, начинает играть сток частиц в конус потерь установки. Как известно, кулоновские столкновения приводят, во-первых, к притоку частиц в область больших энергий вследствие их диффузии в пространстве скоростей и, во-вторых, к обратному стоку в область малых энергий за счет силы динамического трения, которую испытывает движущаяся в среде частица. В стационарном случае для безграничной плазмы без каких-либо потерь равенство между этими двумя потоками динамическим образом поддерживает максвелловскую функцию распределения частиц. Дополнительный сток частиц в конус потерь в многопробочных ловушках приводит, очевидно, к искажению этой функции. Ниже получены асимптотики функций распределения ядер дейтерия и трития в области энергий, где $\lambda(\varepsilon)/k > L$.

Согласно [1—3], наибольшая эффективность удержания плазмы достигается при выполнении следующих двух условий: 1) длина отдельного пробкотрона l должна быть порядка $\lambda(T)/k$; 2) длина пробки (т. е. длина области, где магнитное поле меняется от $H_{\min}$ до $H_{\max}$) должна быть много меньше l**. Ниже эти условия считаются выполненными, что, в частности, позволяет пренебречь длиною пробок по сравнению с длиной пробкотрона.

Плотность n и температуру T (которые характеризуют основную массу частиц плазмы) при решении можно считать известными функциями координат и времени: они могут быть найдены в рамках газодинамических уравнений [2, 3]. Поскольку перепад электростатического потенциала на длине отдельного пробкотрона не превышает $(T/e)(l/L)$, влиянием электрического поля на движение частиц с энергией $\varepsilon \gg T$ можно пренебречь. Имеет смысл ограничиться рассмотрением лишь той области энергий частиц с $\lambda(\varepsilon)/k > L$, в которой функции распределения в каждый момент времени успевают подстраиваться под n и T. Для частиц с бо́льшими энергиями вид функций распределения определяется заданием их в начальный момент времени и скоростью дальнейшего распада этого состояния. Установки, в которых эта группа частиц вносит основной вклад в нейтронный выход, малоинтересны с практической точки зрения. Таким образом, в кинетических уравнениях можно опустить производную по времени от функции распределения; в окончательный результат зависимость от времени входит только параметрически, через функции $n(t)$ и $T(t)$.

Учитывая указанные обстоятельства (стационарность задачи, малость электрического поля, однородность магнитного поля в пространстве между пробками), можно записать следующее уравнение для функции распределения частиц сорта a:

$$\sum_b St_{ab}\{f_a, f_b\} = 0,$$

* В случаях, когда пробочное отношение $k \equiv H_{\max}/H_{\min}$ велико по сравнению с единицей, условие применимости газодинамического подхода определяется неравенством $\lambda(\varepsilon)/k < L$ (а не $\lambda(\varepsilon) < L$), что и будет учитываться ниже.

** Использование таких «точечных» пробок предпочтительно и в том отношении, что на их создание требуются малые затраты магнитной энергии.

где St_{ab} — интеграл столкновений частиц сорта a с частицами сорта b [7]; f_a и f_b — соответствующие функции распределения. Учитывая, что скорость ионов в рассматриваемой области энергий $T \ll \varepsilon \ll T\,(m_a/m_e)$ (где m_a — масса иона сорта a, m_e — масса электрона), приведем интеграл столкновений к простой форме

$$(1.1)\qquad \sum_b St_{ab} = \frac{2\pi\Lambda e_a^2}{m_a^2 v_{Ta}^3} \sum_b{}' e_b^2 n_b \frac{m_a}{m_b} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(2f_a + \frac{1}{v} \frac{\partial f_a}{\partial v} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(2v^3 f_a + v^2 \frac{\partial f_a}{\partial v} \right) + \frac{\delta_2}{v^3} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial f_a}{\partial\theta} \right\} = 0;$$

$$(1.2)\qquad \delta_1 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_e}{m_a} \right)^{1/2} \frac{e^2 n_e}{\sum_b{}' e_b^2 n_b \frac{m_a}{m_b}}, \qquad \delta_2 = \sum_b{}' e_b^2 n_b \Big/ \sum_b{}' e_b^2 n_b \frac{m_a}{m_b},$$

где v измеряется в единицах $v_{Ta} \equiv \sqrt{2T/m_a}$, а штрих у знаков сумм означает, что суммирование ведется только по ионам (электроны из суммирования исключаются). Второй член в фигурных скобках описывает столкновения ионов с электронами (плазма предполагается изотермической $T_e = T_i = T$, что справедливо для достаточно длинных сгустков [2]).

Граничные условия для уравнения (1.1) имеют вид

$$f_a\big|_{\theta=\theta_0} = 0; \quad f_a(v)\big|_{v=v_0} = f_{a0}; \quad f_a(v)\big|_{v\to\infty} \to 0.$$

Первое из них соответствует обращению в нуль функций распределения быстрых ионов на границе конуса потерь $\theta = \theta_0 \equiv \arcsin\sqrt{H_{\max}/H_{\min}}$, во втором величина v_0 выбирается так, что $\lambda(v_0)/k \sim L$ (это автоматически означает, что $v_0 \gg 1$), смысл третьего очевиден.

В точке $v = v_0$ происходит переход от максвелловской функции распределения, имеющейся в области $v < v_0$, к более быстро убывающей функции распределения в области $v > v_0$. Для точного определения $f(v_0)$ требуется решить задачу в переходной области $v \sim v_0$, что весьма затруднительно в математическом отношении. Однако заранее ясно, что в точке $v = v_0$ функция распределения не слишком отличается от максвелловской, и поэтому будем полагать значение $f(v_0)$ известным и равным значению максвелловской функции распределения в этой точке. В результате этой аппроксимации полученное решение будет справедливо с точностью до некоторого численного множителя порядка единицы.

Уравнение (1.1) допускает разделение переменных, и его решение представим в виде

$$(1.3)\qquad f_a = \sum_{m=0}^{\infty} A_m R_m(\mu_m, \theta)\, Q_m(v)$$

с

$$R_m(\mu_m, \theta) = F\left(\frac{1-\sqrt{4\mu_m+1}}{4};\ \frac{1+\sqrt{4\mu_m+1}}{4};\ \frac{1}{2};\ \cos^2\theta \right),$$

где F — гипергеометрическая функция, определенная в соответствии с [8]. Собственные значения μ_m определяются из граничного условия $R_m(\mu_m, \theta_0) = 0$, а коэффициенты разложения имеют вид

$$A_m = \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} f_{a0} R_m \sin\theta d\theta \Big/ \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} R_m^2 \sin\theta d\theta.$$

При больших пробочных отношениях $k \gg 1$ функции $R_m(\mu_m, \theta)$ мало отличаются от полиномов Лежандра степени $2m$ для всех θ, за исключением узких областей у точек $\theta = 0, \pi$, а μ_m близки к значениям $2m(2m+1)$ для $m = 1, 2, 3, \ldots$ Для $m = 0$ первый член разложения μ_0 по k имеет вид

$$\mu_0 = 2/\ln k, \quad R_0(\mu_0, \theta) = 1 - \ln \sin^2\theta / \ln k. \tag{1.4}$$

Численно выражение (1.4) является хорошей аппроксимацией μ_0 до значений $k \gtrsim 2$. Например, значению $\mu_0 = 2$ соответствует решение $R_0(\mu_0, \theta)$, определяемое присоединенным полиномом Лежандра первой степени:

$$R_0(\mu_0, \theta) = 1 - \frac{1}{2} \cos\theta \ln \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta},$$

при этом k, найденное из условия $R_0(\mu_0, \theta_0) = 0$, равно 2,8, что находится в хорошем согласии с (1.4).

Отметим, что величины μ_m монотонно убывают с ростом k. Поскольку также известно, что при $k \to \infty$ μ_m имеет пределом значение $2m(2m+1)$, это означает, что при произвольных k имеется неравенство $\mu_m > 2m(2m+1)$ для всех m (ниже воспользуемся этим соотношением при оценке величин слагаемых с разными m в разложении (1.3)).

Функции $Q_m(v)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v}\frac{dQ_m}{dv} + 2Q_m\right) + \delta_1 \frac{d}{dv}\left(v^2\frac{dQ_m}{dv} + 2v^3 Q_m\right) - \frac{\mu_m\delta_2}{v} Q_m = 0 \tag{1.5}$$

с граничными условиями $Q_m(v_0) = 1$, $Q_m(\infty) = 0$.

Последний член в (1.5) соответствует стоку частиц в конус потерь. Без этого члена решением (1.5), удовлетворяющим граничным условиям, была бы максвелловская функция. При учете стока функция распределения будет, очевидно, убывать быстрее максвелловской, т. е. $Q_m(v)$ имеет вид

$$Q_m = q_m(v)\, e^{-v^2+v_0^2}, \tag{1.6}$$

где $q_m(v_0) = 1$; $dq_m/dv < 0$. Подставляя решение в форме (1.6) в уравнение (1.5), находим

$$\frac{1}{v}\frac{d^2q_m}{dv^2} - 2\,\frac{1 + \frac{1}{2v^2} - \delta_1 v + \delta_1 v^3}{1 + \delta_1 v^3}\,\frac{dq_m}{dv} - \frac{\mu_m\delta_2}{v(1+\delta_1 v^3)}\, q_m = 0.$$

Условие $v \gg 1$ позволяет в коэффициенте при dq_m/dv пренебречь членом $1/2v^2$ по сравнению с единицей и членом $\delta_1 v$ по сравнению с $\delta_1 v^3$, что дает

$$\frac{1}{v}\frac{d^2q_m}{dv^2} - 2\frac{dq_m}{dv} - \frac{\mu_m\delta_2}{v(1+\delta_1 v^3)}\, q_m = 0. \tag{1.7}$$

Для дейтериевой или дейтерий-тритиевой плазмы $\delta_1 \sim 10^{-2}$, $\delta_2 \sim 1$, поэтому при не слишком близких к единице пробочных отношениях ($k - 1 \gtrsim 1$) для первых нескольких m последнее слагаемое в уравнении (1.7) содержит малый множитель

$$\eta_m(v) = \mu_m\delta_2/v(1+\delta_1 v^3) \qquad (v > v_0 \gg 1). \tag{1.8}$$

Если бы этот множитель был равен нулю, то одно из двух линейно-независимых решений (1.7) было бы константой, а при учете конечности η_m оно делается медленно убывающим. Легко проверить, что при отыскании этого решения в уравнении (1.7) можно пренебречь первым слагаемым, т. е. записать (1.7) в виде

$$\frac{dq_m}{dv} = -\frac{\mu_m\delta_2}{2v(1+\delta_1 v^3)}\,q_m,$$

откуда, используя граничное условие $q_m(v_0) = 1$, получим

$$q_m(v) = \left(\frac{v_0^3}{1+\delta_1 v_0^3}\right)^{\frac{\mu_m\delta_2}{6}}\left(\frac{1+\delta_1 v^3}{v^3}\right)^{\frac{\mu_m\delta_2}{6}}. \tag{1.9}$$

Второе линейно-независимое решение уравнения (1.7) является быстро (экспоненциально) нарастающим и должно быть отброшено.

В силу того, что $\mu_m > 2m(2m+1)$, $q_m(v)$ быстро убывает с ростом m, поэтому при расчетах нейтронного выхода в (1.3) достаточно ограничиться учетом одного-двух первых членов ряда.

В области $v \gg v_0$ основной вклад в f_a, очевидно, определяется членом разложения (1.3) с $m = 0$. При $v \to \infty$ $q_0(v)$ имеет пределом величину $\left(\frac{\delta_1 v_0^3}{1+\delta_1 v_0^3}\right)^{\frac{\mu_0\delta_2}{6}}$. Численно эта величина существенно отличается от единицы лишь при относительно небольших значениях пробочного отношения $k \sim 3$ (при $k = 2{,}8$, $\mu_0 = 2$, считая, что $v_0 = 1$, получим $q_0(v)_{v\to\infty} \to 1/5$; поскольку выход нейтронов из плазмы пропорционален квадрату f_a, такое обеднение f_a в области $v > v_0$ может привести к значительному падению нейтронного выхода). Для $k \gg 3$ f_a хорошо аппроксимируется максвелловской функцией практически во всей области пространства скоростей, исключая конус потерь.

2. **Асимптотика функций распределения ядер дейтерия и трития в плазме с примесями многозарядных ионов.** Для улучшения удержания плазмы в многопробочных ловушках ранее предлагалось использовать примеси многозарядных ионов [9]. Как известно, сечение рассеяния частиц по углам растет пропорционально квадратам их зарядов, поэтому уже относительно малые добавки многозарядных ионов $n_a/Z^2 \ll n_Z \ll n_a/Z$ (Z — кратность заряда ионов, n_Z — их концентрация) позволяют существенно уменьшить длину свободного пробега частиц дейтерия и трития и замедлить скорость диффузионного растекания плазмы вдоль установки. Однако факт более быстрой изотропизации f_a существенным образом сказывается на виде функций распределения D и T в многопробочных ловушках для частиц с $\lambda(\varepsilon)/k > L$.

Действительно, увеличение скорости рассеяния частиц D и T по углу приводит в области $\lambda(\varepsilon)/k > L$ к более быстрому стоку частиц в конус потерь по сравнению со случаем D — T-плазмы без примесей. Поскольку, с другой стороны, присутствие в плазме примесей многозарядных ионов с $n_Z \ll n_a/Z$ не влияет сколько-нибудь значительно на процесс диффузии частиц по энергии в пространстве скоростей, это увеличение стока частиц, очевидно, ведет к более быстрому падению f_a с ростом v.

Формально присутствие в плазме примесей многозарядных ионов с $n_a/Z^2 \ll n_Z \ll n_a/Z$ соответствует в уравнениях значению $\delta_2 \gg 1$ (см. (1.2)). При оценке f_a основной интерес представляет поведение $q_0(v)$. Аппроксимация (1.9) для $q_0(v)$ справедлива до тех пор, пока выполняется неравенство $\eta_0(v_0) \ll 1$, где $\eta_0(v)$ дается формулой (1.8). Для плазмы с большими концентрациями n_Z это условие нарушается и в некоторой области скоростей $v > v_0$ $\eta_0(v) \gg 1$. Чтобы найти в этом случае асимптотику $q_0(v)$, подставим в (1.7) q_0 (v) в форме $q_0(v) = \exp[-h_0(v)]$. Удерживая лишь квадратичные по $h(v)$ члены, получим

$$(h'(v))^2 = \mu_0 \delta_2 \frac{1}{1+\delta_1 v^3},$$

$$h(v) = \sqrt{\mu_0 \delta_2} \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{(1+\delta_1 v^3)^{1/2}}.$$

В области $\eta_0(v) \ll 1$ $q_0(v)$ с точностью до числового множителя совпадает с (1.9).

Таким образом, в плазме с примесями многозарядных ионов $n_Z \gg \gg n_a/Z^2$ для установок с не слишком большими пробочными отношениями k (такими, что $\mu_0\delta_2/6 = \delta_2/3 \ln k \gtrsim 1$) может наблюдаться сильное обеднение f_a по сравнению с максвелловской фунцией в области больших энергий частиц $\varepsilon \gg T$ и резкое падение выхода нейтронов.

Сделаем также оценку той скорости, с которой начинается в переходной области $\lambda(\varepsilon)/k \sim L$ падение функции распределения по сравнению с максвелловской. Скорость убывания f_a за счет диффузионного растекания плазмы по координате

$$\partial f_a/\partial t \simeq -D\partial^2 f_a/\partial s^2$$

с коэффициентом диффузии $D = (\lambda(a)/k^2)v$, а скорость ее восстановления вследствие диффузии частиц по энергии в пространстве скоростей

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} \gtrsim \frac{1}{\delta_2 \lambda(T)} \frac{v_{Ta}^6}{v^3} \frac{\partial^2 f_{\mu a}}{\partial v^2}.$$

Сравнивая первую и вторую скорости, получим $v_1 \simeq \delta_2^{-1/6}(Lk/\lambda(T))^{1/3} v_{Ta}$. Из того, что v_1, очевидно, должно удовлетворять неравенству $\lambda(v_1)/k < L$, следует, что f_a близка к максвелловской функции практически во всей области $\lambda(\varepsilon)/k \lesssim L$ при концентрациях $n_Z < (Lk/\lambda(T))^{1/2} n_a/Z^2$.

Поступила 24 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Будкер Г. И., Мирнов В. В., Рютов Д. Д.** Влияние гофрировки магнитного поля на расширение и остывание плотной плазмы.— «Письма в ЖЭТФ», 1971. т. 14, вып. 15.
2. **Mirnov V. V., Ryutov D. D.** Gas-dynamic description of plasma in a corrugated magnetic field.— «Nucl. Fusion», 1972, vol. 12, N 6.
3. **Васильев Ю. В., Мирнов В. В.** Газодинамика плазмы в многопробочной магнитной ловушке с «точечными» пробками.— ПМТФ, 1974, № 6.
4. **Logan B. G., Brown I. G., Lichtenberg A. J., Lieberman M. A.** Experimental evidence of multiple-mirror plasma confinement.— «Phys. Rev. Lett.», 1972, vol. 29, N 21, p. 1435.
5. **Будкер Г. И., Данилов В. В., Кругляков Э. П., Рютов Д. Д., Шунько Е. В.** Эксперименты по удержанию плазмы в многопробочной магнитной ловушке.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 2.
6. **Арцимович Л. А.** Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1963.
7. **Трубников Б. А.** Столкновение частиц в полностью ионизованной плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963.
8. **Арфкен Г.** Математические методы в физике. М., Атомиздат, 1970.
9. **Mirnov V. V., Ryutov D. D.** The effect of heavy impurities on plasma motion in a multiple- mirrormagnetic field.— In: Proc. 7th Europ. Conf. on Plasma Physics and Controlled Thermonuclear Fusion. Lausanne, 1975, p. 143.