Теплофизика и аэромеханика, 2016, том 23, № 3

УДК 532.517.6

Численное исследование теплопередачи при нестационарном осциллирующем МГД-течении с точкой торможения

Т. Джавед, А. Гаффари*, Х. Ахмад

Международный Исламский Университет, Исламабад, Пакистан

*E-mail: abuzar.iiui@gmail.com

Рассматривается неустановившееся течение с точкой торможения в присутствии однородного магнитного поля, возникающее при наклонном натекании осциллирующего потока на плоскую пластину. Изучены точки торможения нестационарных потоков по наклонной плоской пластине в присутствии равномерно приложенного магнитного поля в пульсирующем потоке. Соответствующие дифференциальные уравнения приводятся к безразмерному виду и решаются с помощью функции тока аналогично [1]. Безразмерные дифференциальные уравнения в частных производных решаются численно с помощью известной неявной разностной схемы, названной блочным методом Келлера. Полученные результаты хорошо согласуются с исследованиями, имеющимися в литературе. Влияние соответствующих параметров, участвующих в задаче, а именно магнитного параметра, числа Прандтля, угла наклона потока и теплообменнных характеристик проиллюстрированы в виде графиков. Показано, что присутствие магнитного поля приводит к увеличению скорости жидкости и что при увеличении угла наклона поверхностное трение увеличивается.

Ключевые слова: МГД, точка торможения при наклонном натекании, теплоперенос, численное решение.

Введение

Изучению течения с точкой торможения уделялось значительное внимание исследователями в последнем столетии, что обусловлено его важностью для многих инженерных приложений. В некоторых случаях поток тормозится твердой поверхностью, также встречаются случаи свободных точек или линий торможения, существующих внутри области жидкости. В настоящем исследовании рассматривается случай твердой поверхности, на которую жидкость натекает в общем случае наклонно. Задача о течении с точкой торможения занимает значительное место в истории гидродинамики. В работе [1] впервые было получено точное решение уравнений, описывающих стационарное течение с точкой торможения при натекании потока по нормали на бесконечную плоскую пластину. В работе [2] рассматривалось соответствующее течение при колеблющейся плоской пластине. Колебания пластины считались синусоидальными. Было предложено решение в виде наложения колебаний с частотой колебаний пластины на стационарное течение Хименца [1]. Позже в работах [3–5] независимо исследовалось решение для точки торможения при наклонном натекании жидкости на пластину. Авторы обобщили решение для течения с точкой торможения на случай наклонного натекания, когда набегающий поток составлял острый угол с пластиной. В работе [6] рассматривалось нестационарное течение с колебательной точкой торможения при наклонном натекании на пластину. В работе [7] рассматривался поток, в котором плоская стенка движется с постоянной скоростью либо к точке торможения, либо от нее. Наклонный поток от стены считался состоящим из невихревой точки застоя, простого сдвигового течения с постоянной завихренностью и однородной струи, направленных параллельно стене. В работах [8, 9] исследовалась точка торможения наклонного течения несжимаемой вязкоупругой жидкости в направлении растяжения. МГД-эффекты в области точки торможения также обсуждались в работах [10–13].

В настоящей работе исследуется течение вязкой несжимаемой жидкости с нестационарной точкой торможения. Нестационарность обусловлена тем, что наклонно натекающий на плоскую пластину поток является колебательным. Учитывается влияние поперечного магнитного поля на течение. Определяющие уравнения преобразовываются к удобному виду и численно решаются с использованием конечно-разностной схемы, называемой блочным методом Келлера. Насколько известно авторам, эта проблема до сих пор не рассматривалась в литературе.

1. Математическая формулировка

Рассматривается нестационарное ламинарное течение несжимаемой проводящей жидкости, в котором набегающий наклонно на бесконечную плоскую пластину поток имеет скорость $U_\mathrm{e} = K\left(x+\gamma y\right) - U\mathrm{e}^{i\Omega t}$ (не следует забывать, что другая ортогональная составляющая скорости при этом характеризуется выражением $V_\mathrm{e} = -Ky$.) Оси x и y отложены вдоль пластины и по нормали к ней соответственно. Внешнее однородное магнитное поле напряженности B_0 приложено перпендикулярно потоку жидкости в направлении оси y. Магнитное число Рейнольдса принимается малым с тем, чтобы можно было пренебречь индуцированным магнитным полем. Также пренебрежём влиянием джоулевого тепла, считая параметр магнитогидродинамического взаимодействия малым. Физическая модель и система координат показаны на рис. 1. При изложенных предположениях уравнения неразрывности, Навье–Стокса и уравнения энергии задаются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho}u, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho C_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{4}$$

где u и v — это x- и y-компоненты скорости соответственно, t — время, ν — кинематическая вязкость, σ — электропроводимость, B_0 — напряженность однородного магнитного поля, ρ — плотность жидкости, T — температура жидкости, C_p — удельная теплоемкость, k — теплопроводность жидкости. Граничные условия

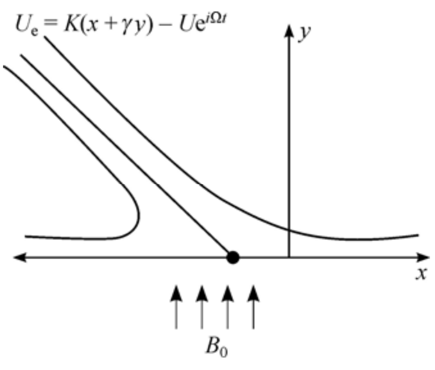

Рис. 1. Физическая модель задачи.

имеют вид:

$$\begin{aligned} &u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_w \quad \text{при} \quad y = 0, \\ &u = U_e, \quad T = T_\infty \quad \text{при} \quad y \to \infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь T_w — температура стенки, T_∞ — температура окружающей среды, $U_\mathrm{e} = K(x + \gamma y) - U\mathrm{e}^{i\Omega t}$ — x-компонента скорости набегающего пульсирующего потока, γ — безразмерная константа, характеризующая наклон набегающего потока. Исключив давление p из уравнений (2) и (3), получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \nu\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}\right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Рассмотрим функцию тока ψ, как предлагалось в работе [6]:

$$\psi = K\left(xf(y) + g(y,t)\right), \tag{7}$$

при этом граничные условия приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} &f = g = 0, \;\; f_y = 0, \;\; g_y = 0 \;\; \text{при} \;\; y = 0, \\ &f \sim y, \;\; g - (1/2)\gamma y^2 - \frac{U}{K} y\mathrm{e}^{i\Omega t}, \quad T \to T_\infty \;\; \text{при}\; y \to \infty, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

а компоненты скорости будут иметь следующий вид:

$$u = \partial\psi/\partial y = K\left(xf_y + g_y\right), \;\; v = -\partial\psi/\partial x = -Kf. \tag{9}$$

Здесь K — константа, а индекс определяет частную производную. Подставляя уравнение (7) в уравнение (6), получим:

$$\begin{aligned} g_{yyt} + K[(xf_{yy} + g_{yy})f_y + f_{yy}(xf_y + g_y) - f_y(xf_{yy} + g_{yy}) - f(xf_{yyy} + g_{yyy})] = \\ = \nu(xf_{yyyy} + g_{yyyy}) - \tfrac{\sigma B_0^2}{\rho}(xf_{yy} + g_{yy}). \end{aligned} \tag{10}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в уравнении (10), получаем следующие уравнения:

$$K\left(2f_y f_{yy} - ff_{yyy} - f_y f_{yy}\right) = \nu f_{yyyy} - (\sigma B_0^2/\rho) f_{yy}, \tag{11}$$

$$g_{yyt} + K\left(g_{yy} f_y + g_y f_{yy} - fg_{yyy} - f_y g_{yy}\right) = \nu g_{yyyy} - (\sigma B_0^2/\rho) g_{yy}. \tag{12}$$

Проинтегрируем уравнения (11) и (12) по y и с учетом граничных условий на бесконечности получим:

$$K\left((f_y)^2 - ff_{yy} - 1\right) = \nu f_{yyy} - (\sigma B_0^2/\rho)(f_y - 1), \tag{13}$$

и

$$g_{yt} + K\left(f_y g_y - fg_{yy}\right) = \nu g_{yyy} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho}(g_y - \gamma y + \frac{U}{K}\mathrm{e}^{i\Omega t}) - U\mathrm{e}^{i\Omega t} - \left(\frac{U}{K}\right) i\Omega \mathrm{e}^{i\Omega t}. \tag{14}$$

Введем безразмерные переменные:

$$y = \left(\frac{\nu}{K}\right)^{\frac{1}{2}}\eta, \; t = \frac{\tau}{\Omega}, \; f(y) = \left(\frac{\nu}{K}\right)^{\frac{1}{2}} F(\eta), \;\; g(y,t) = \left(\frac{\nu}{K}\right) G(\eta,\tau), \; T = T_\infty + (T_w - T_\infty)\theta. \tag{15}$$

При использовании соотношений (15) уравнения (13, 14) и (4) приводятся к виду:

$$F''' + FF'' - (F')^2 - M(F' - 1) + 1 = 0, \tag{16}$$

$$G''' + FG'' - F'G' - \beta \dot{G}' - M(G' - \gamma\eta + \varepsilon e^{i\tau}) = (1 + i\beta)\varepsilon e^{i\tau}, \tag{17}$$

$$(1/\mathrm{Pr})\,\theta'' + F\theta' - \beta\dot{\theta} = 0, \tag{18}$$

где штрих означает дифференцирование по η, точка над символами означает дифференцирование по τ, $M = \sigma B_o^2 / \rho K$ — магнитный параметр. Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} &F = G = 0,\ F' = 0,\ G' = 0,\ \theta = 1 \ \text{ при } \ \eta = 0, \\ &F' = 1,\ G' = \gamma\eta - \varepsilon e^{i\tau},\ \theta = 0 \ \text{ при } \ \eta \to \infty, \end{aligned} \tag{19}$$

здесь $\beta = \Omega/K$, $\varepsilon = U/\sqrt{\nu K}$ — безразмерные параметры. Коэффициент поверхностного трения C_f задается следующим образом:

$$C_f = \tau_w \Big/ \left(\rho U^2\right),\ \tau_w = \mu\left(\partial u/\partial y\right)_{y=0}, \tag{20}$$

$$(\varepsilon\cos\tau)^2 C_f = \xi F''(0) + (\partial^2 G/\partial\eta^2)\cdot(0,\tau), \tag{21}$$

где x заменена безразмерной переменной $\xi = \left(K/\nu\right)^{1/2} x$. Безразмерная функция тока и компоненты скорости равны:

$$\psi^* = \psi/\nu = \xi F(\eta) + G(\eta, \tau), \tag{22}$$

$$u^* = u/\sqrt{\nu k} = \xi F'(\eta) + \partial G/\partial\eta, \tag{23}$$

$$v^* = v/\sqrt{\nu k} = -F(\eta). \tag{24}$$

На рис. 1 разделяющая линия тока образует угол θ с пластиной. Разделяющая линия тока — это прямая, наклон которой определяется подстановкой $\psi^* = 0,$ тогда, как следует из [5],

$$\psi^* = \xi\eta + (1/2)\gamma\eta^2 = 0,\ \text{где } \ \eta = \left(-2/\gamma\right)\xi, \tag{25}$$

отсюда находим, что наклон равен

$$m = -2/\gamma. \tag{26}$$

Следовательно, соотношение между параметром γ и углом наклона имеет вид

$$\theta = \tan^{-1}(-2/\gamma). \tag{27}$$

2. Результаты и обсуждение

Система дифференциальных уравнений (16)–(18) с учетом граничных условий (19) решается численно в стационарном случае (т.е. когда $\tau = 0$), при помощи метода Келлера, что очень хорошо объясняется в монографии [14]. Размер шага $\Delta\eta$ вдоль η и на границе пограничного слоя η_∞ регулируется для различных значений параметров M, Pr и γ для сохранения точности результатов. Переходим к $\tau = \pi/4$, $\pi/2$ и π, взяв размер шага $\Delta\eta = 0,01$ и $\Delta\tau = \pi/36$ для проводимого численного исследования. Чтобы оценить точность полученных результатов, значения $F''(0)$ по M сравниваются с данными [15] и [16] (см. таблицу). Видно, что полученные результаты отличаются высокой точностью и хорошо согласуются с данными предыдущих исследований.

Таблица

Сравнение вариаций $F''(0)$ для разных значений M при $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

M	Работа [15]	Работа [16]	Настоящее исследование
0,0	1,232588	1,232588	1,232597
0,16	1,295368	1,295368	1,295377
0,64	1,467976	1,467976	1,467987
1,00	1,585331	1,585331	1,585342

Результаты для поверхностного трения, профилей скорости и температуры представлены на графиках. На рис. 2*a*–2*d* изображена функция тока $\psi^*(\xi,\eta)$ для двух различных значений магнитного параметра M при $\gamma = 2$, $\beta = 2$, $\varepsilon = 1$, Pr = 0,7 при $\tau = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$ и π соответственно. Штриховыми линиями показаны линии тока в отсутствие магнитного поля (т.е. $M = 0$), а сплошными линиями — в присутствии магнитного поля (т.е. $M = 2$). Заметно, что на разных временных шагах положение точки торможения может быть приближено к исходной точке, и линии тока становятся ближе к стенке при приложении магнитного поля, которое также уменьшает толщину пограничного слоя. На рис. 3*a*–3*d* представлены линии тока для $\varepsilon = 0$ (*1*) и $\varepsilon = 2$ (*2*), где $\gamma = 1$, $\beta = 2$,

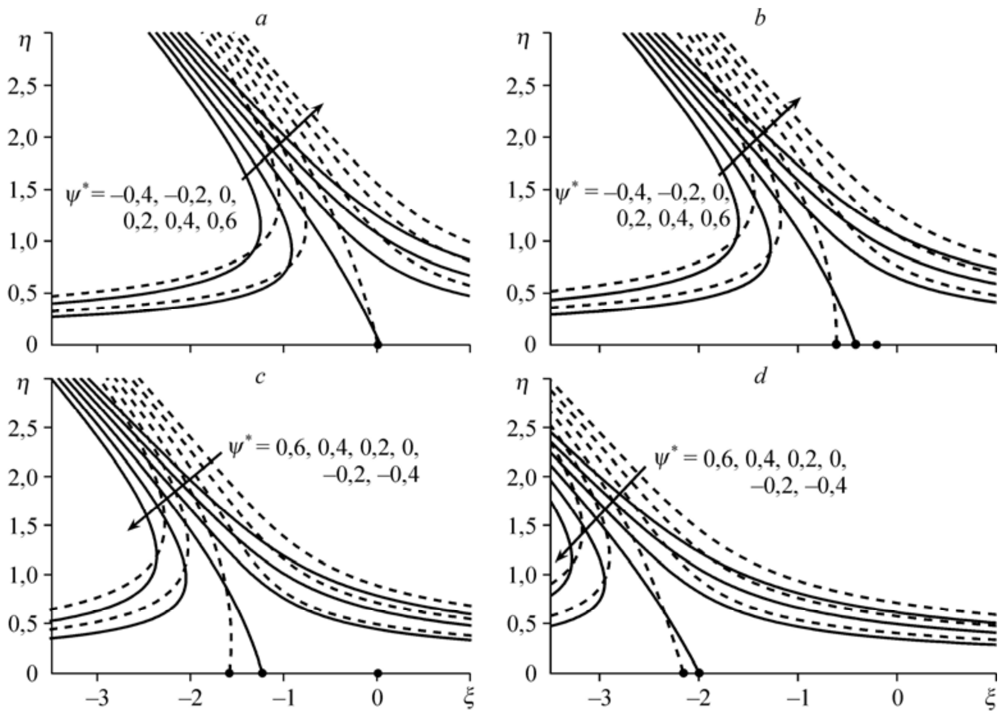

Рис. 2. Линии тока при $\tau = 0$ (*a*), $\pi/4$ (*b*), $\pi/2$ (*c*), π (*d*) в случаях $M = 0$ (штриховые линии), 2 (сплошные линии). $\gamma = 2$, $\beta = 2$, $\varepsilon = 1$ и Pr = 0,7.

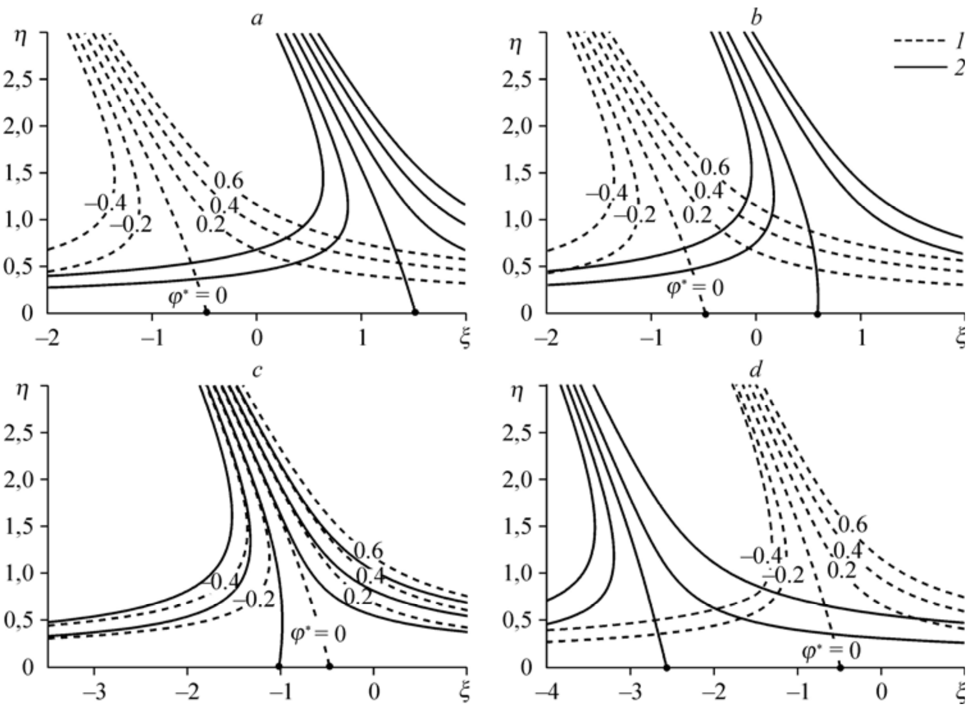

Рис. 3. Линии тока для $\tau = 0$ (*a*), $\pi/4$ (*b*), $\pi/2$ (*c*), π (*d*) при $\varepsilon = 0$ (*1*), 2 (*2*).
$M = 2$, $\gamma = 1$, $\beta = 2$, Pr = 0,7.

Pr = 0,7 и $M = 2$ при $\tau = 0,\ \pi/4,\ \pi/2$ и π соответственно. Видно, что точка торможения колеблется между 1,5 и –2,5 со средним значением –0,5 на разных временных шагах.

На рис. 4*a–d* отображено изменение безразмерных профилей скорости $u^*(\xi = 1, \eta)$ для различных значений $M = 0, 0{,}5, 1, 2$ для $\gamma = 1, \beta = 2, \varepsilon = 1$ и Pr = 0,7. Видно, что имеется небольшое возрастание скорости с увеличением значения магнитного поля на разных временных шагах $\tau = 0,\ \pi/4,\ \pi/2$ и π. На рис. 5*a*–5*d* изменение безразмерных профилей скорости $u^*(\xi = 1, \eta)$ для различных значений $\varepsilon = 0,\ 1,\ 2,\ 5$ для $\gamma = 1,\ \beta = 2,\ M = 2$ и Pr = 0,7 показано на временных шагах $\tau = 0,\ \pi/4,\ \pi/2$ и π соответственно. Для $\tau = 0$ и $\pi/4$ увеличение значения ε приводит к уменьшению значения скорости $u^*(\xi, \eta)$, в то время как для $\tau = \pi/2$ и π скорость $u^*(\xi, \eta)$ увеличивается с увеличением ε. На рис. 6 изображен профиль температуры $\theta(\eta, \tau)$ при $\tau = 0$ по η при $\gamma = 1, \beta = 2, \varepsilon = 1$ и Pr = 0,7. Можно заметить, что с увеличением значения M температура уменьшается. Заметно также, что наблюдается незначительное снижение толщины теплового пограничного слоя с увеличением значений M. На рис. 7 представлен температурный профиль $\theta(\eta, \tau)$, полученный для различных значений Pr и M при $\gamma = 1, \beta = 2$ и $\varepsilon = 1$. Из рисунка видно, что температура уменьшается с увеличением значений числа Прандтля. Также видно, что с увеличением числа Прандтля толщина теплового пограничного слоя уменьшается.

На рис. 8 изображена зависимость поверхностного трения от τ для различных значений ε при $M = 2, \gamma = 2, \beta = 2$ и $\xi = 1$. Видно, что амплитуда колебаний поверхностного трения увеличивается с увеличением значения ε. Рисунок 9 иллюстрируют зависимость

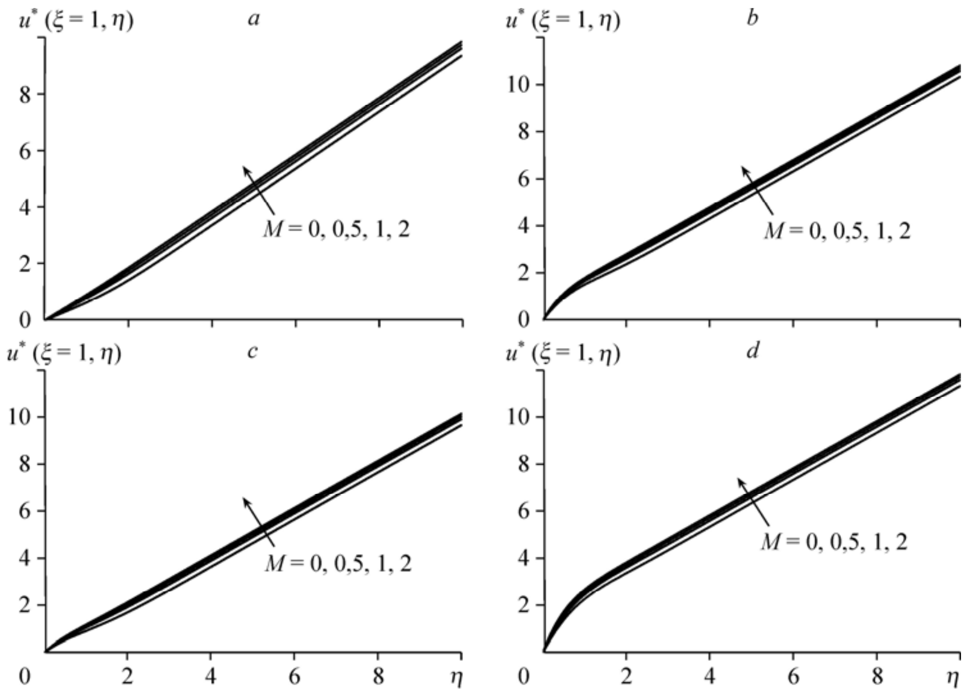

Рис. 4. Профиль скорости u^* для разных значений M.
$\xi = 1$, $\gamma = 1$, $\beta = 2$, $\varepsilon = 1$ и $\mathrm{Pr} = 0{,}7$; $\tau = 0$ (*a*), $\pi/4$ (*b*), $\pi/2$ (*c*), π (*d*).

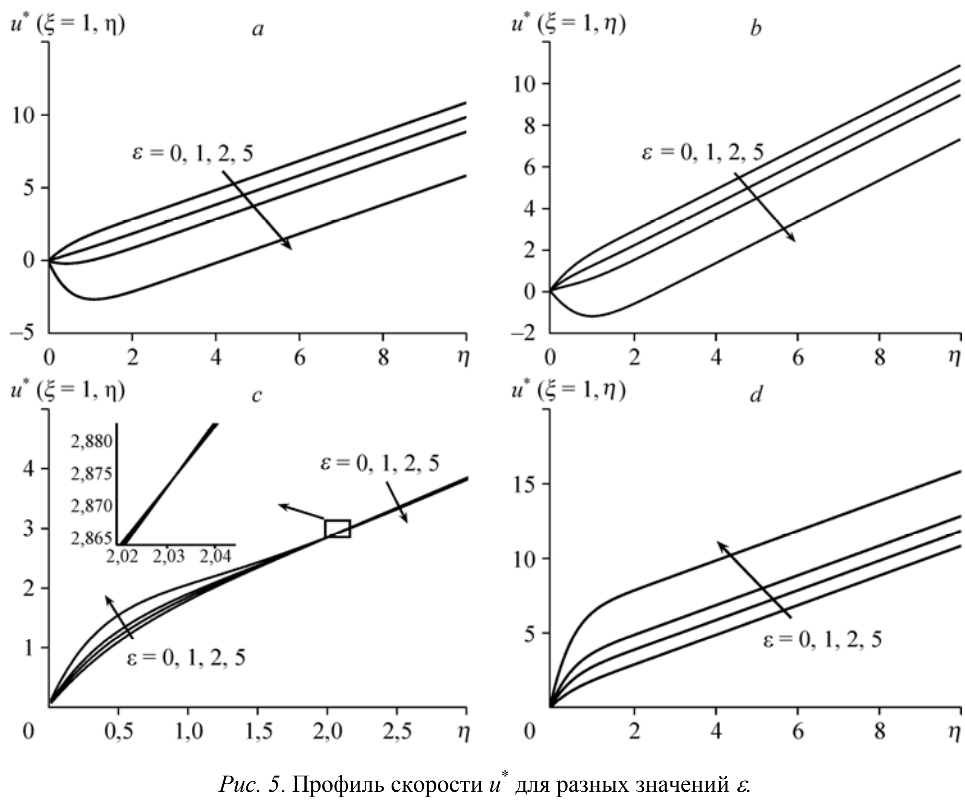

Рис. 5. Профиль скорости u^* для разных значений ε.
$\gamma = 1$, $M = 2$, $\beta = 2$ и $\mathrm{Pr} = 0{,}7$; $\tau = 0$ (*a*), $\pi/4$ (*b*), $\pi/2$ (*c*) и π (*d*).

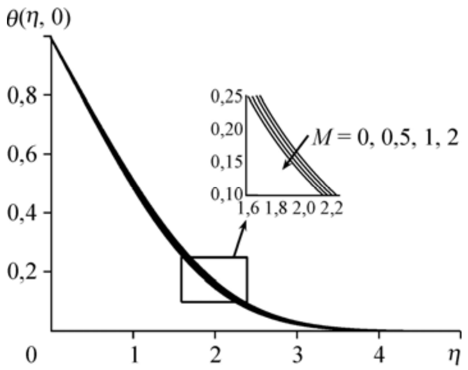

Рис. 6. Профиль температуры $\theta(\eta)$ для разных значений *M*.

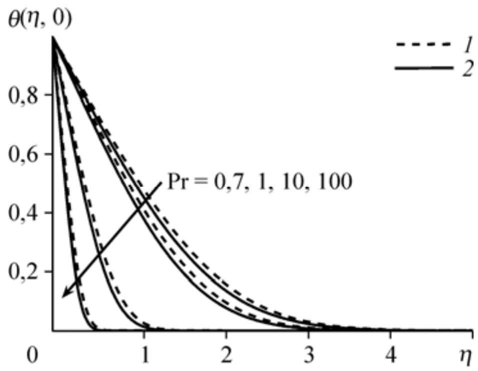

Рис. 7. Профиль температуры $\theta(\eta)$ для разных значений Pr.
M = 0 (*1*), 0,2 (*2*).

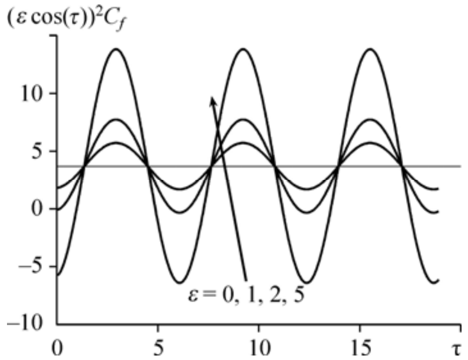

Рис. 8. Коэффициент поверхностного трения для разных значений ε.
$\xi = 1$.

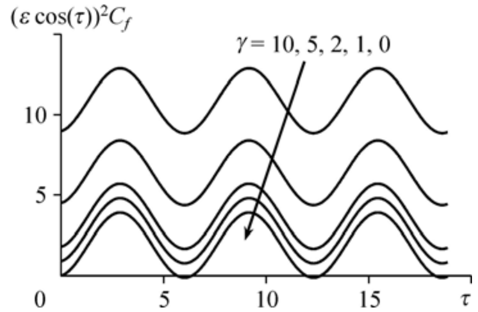

Рис. 9. Коэффициент поверхностного трения для разных значений γ.
$\xi = 1$.

поверхностного трения от τ для различных значений γ при $M = 2, \varepsilon = 1, \beta = 2$ и $\xi = 1$. Видно, что с увеличением γ значение поверхностного трения увеличивается, но колеблется с прежней амплитудой. Рис. 10 показывает изменение поверхностного трения с изменением τ для различных значений магнитного параметра *M* при $\gamma = 2, \varepsilon = 1, \beta = 2$ и $\xi = 1$. С увеличением значения *M* наблюдается периодическое увеличение поверхностного трения. Заметно также, что амплитуда колебаний поверхностного трения увеличивается с увеличением *M*.

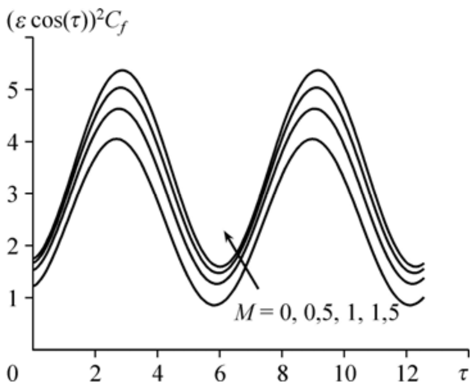

Рис. 10. Коэффициент поверхностного трения для разных значений M.
$\xi = 1$.

Заключение

Анализируется случай нестационарного МГД ламинарного потока несжимаемой электропроводящей вязкой жидкости, натекающей наклонно на бесконечную плоскую пластину. Исследование этого явления важно с точки зрения применения в металлургии, включая охлаждение металлических листов и волокон, протягиваемых через покоящуюся жидкость. Магнитное поле используется для очистки расплавленного металла от неметаллических включений, что является еще одним важным применением. Уравнения, описывающие течение и теплоперенос, преобразуются в безразмерную форму. Нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных затем решается численно по неявной разностной схеме (метод Келлера). Настоящее исследование позволяет заключить, что присутствие магнитного поля увеличивает скорость жидкости, но снижает импульс и толщину теплового пограничного слоя. Также отмечено, что из-за его применения местоположение точки торможения становится ближе к исходной точке. Наблюдается еще один важный эффект магнитного поля, увеличивающего поверхностное трение. Кроме того, видно также, что за счет увеличения наклона, поверхностное трение может увеличиваться. Эффекты теплопереноса показаны при $\tau = 0$, поскольку осциллирующий поток и наклонный поток не влияют на распределение температуры и скорость теплопереноса.

Авторы выражают благодарность редактору и рецензенту за ценные замечания, которые помогли улучшить рукопись.

Список литературы

1. **Hiemenz K.** Göttingen Dissertation // Dingler's Polytech. J. 1911. Vol. 326. P. 321.
2. **Glauert M.B.** The laminar boundary layer on the oscillating plate and cylinders // J. Fluid Mech. 1956. Vol. 1, No. 1. P. 97–110.
3. **Stuart J.T.** The viscous flow near a stagnation point when the external flow has uniform vorticity // J. Aerospace Sci. 1959. Vol. 26. P. 124–125.
4. **Tamada K.J.** Two-dimensional stagnation point flow impinging obliquely on a plane wall // J. Phys. Soc. Japan. 1979. Vol. 46. P. 310–311.
5. **Dorrepaal J.M.** An exact solution of the Navier–Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation point flow in two dimensions // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 163. P. 141–147.
6. **Takemitsu N., Matunobu Y.** Unsteady stagnation-point flow impinging obliquely on an oscillating flat plate // J. Phys. Soc. Japan. 1979. Vol. 47. P. 1347–1353.
7. **Weidman P.D., Sprague M.A.** Flows induced by a plate moving normal to stagnation-point flow // Acta Mech. 2011. Vol. 221, No. 3. P. 219–229.
8. **Mahapatra T.R., Dholey S., Gupta A.S.** Oblique stagnation point flow of incompressible visco-elastic fluid towards a stretching sheet // Int. J. Non-Linear Mech. 2007. Vol. 42, No. 3. P. 484–499.
9. **Labropulu F., Chinichian M.** Unsteady oscillatory stagnation point flow of a viscoelastic fluid // Int. J. Eng. Sci. 2004. Vol. 42, No. 7. P. 625–633.
10. **Singh P., Tomer N.S., Kumar S., Sinha D.** MHD oblique stagnation-point flow towards a stretching sheet with heat transfer // Int. J. Appl. Math. Mech. 2010. Vol. 6, No. 13. P. 94–111.
11. **Lok Y.Y., Ishak A., Pop I.** MHD stagnation-point flow towards a shrinking sheet // Int. J. Num. Methods for Heat & Fluid Flow. 2011. Vol. 21, No. 1. P. 61–72.
12. **Rossow V.J.** Magnetohydrodynamic analysis of heat transfer near a stagnation point // J. Aerospace Sci. 1958. Vol. 25, No. 5. P. 334–335.
13. **Borrelli A., Giantesio G., Patria M.C.** MHD oblique stagnation-point flow of a Newtonian fluid // ZAMP. 2012. Vol. 63, No. 2. P. 271–294.
14. **Себиси Т., Брэдшоу П.** Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы. М.: Мир, 1987. 592 с.
15. **Ariel P.D.** Hiemenz flow in hydromagnetics // Acta Mech. 1994. Vol. 103, No. 1. P. 31–43.
16. **Grosan T., Pop I., Revnic C., Ingham D.B.** Magnetohydrodynamic oblique stagnation-point flow // Acta Mech. 2009. Vol. 44, No. 5. P. 565–572.

Статья поступила в редакцию 19 декабря 2014 г.,
после доработки — 28 июня 2015 г.