УДК 533

ГАЗОВЫЙ МАЯТНИК

Л. В. Овсянников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Показано существование периодического по времени двумерного изэнтропического движения газа, описываемого точным решением уравнений газовой динамики. Политропный газ, заполняющий круглый цилиндр, под действием периодически меняющегося внешнего давления находится одновременно во вращательном и колебательном (по радиусу) режиме движения. Полученное решение принадлежит классу решений с линейным по координатам полем скоростей (с однородной деформацией).

Введение. Теория движений газа (или жидкости) с однородной деформацией имеет давнюю историю и обширную литературу (см., например, [1]). Напомним, что для политропного газа с показателем адиабаты $\gamma > 1$ один из классов таких движений описывается формулами

$$x = M\xi, \qquad \boldsymbol{u} = \dot{M}\xi, \qquad p = (\gamma - 1)m^{-\gamma}g(h), \qquad \rho = m^{-1}g'(h), \tag{0.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ — соответственно декартовы и лагранжевы координаты частиц газа; $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости; $M = M(t)$ — невырожденная $(n \times n)$-матрица $(n = 2, 3)$; $g(h) > 0$ — произвольная дифференцируемая функция, $g'(h) > 0$ — ее производная; величины $m(t)$ и $h(\xi)$ таковы:

$$m = \det M > 0, \qquad h = \varepsilon|\xi|^2/2 \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{0.2}$$

Точка над M и другими величинами обозначает производную по времени t. Величины (0.1), (0.2) являются точным решением уравнений газовой динамики, если матрица M удовлетворяет уравнению

$$\ddot{M} + \varepsilon(\gamma - 1)m^{1-\gamma}M_*^{-1} = 0, \tag{0.3}$$

где M_*^{-1} — обратная матрица для транспонированной матрицы M_*.

Уравнение (0.3) — динамическая система порядка $2n^2$ для n^2 элементов матрицы $M = (M_{ij})$. Эта система имеет $n^2 - n + 1$ первых интегралов, по-видимому, впервые указанных в [2], а именно интегралы момента импульса

$$M\dot{M}_* - \dot{M}M_* = J,$$

интегралы завихренности

$$M_*\dot{M} - \dot{M}_*M = \mathcal{K}$$

и интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\dot{M}_{ij}^2 = \varepsilon m^{1-\gamma} + E,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00523).

где J и K — произвольные постоянные кососимметричные $(n \times n)$-матрицы; E — произвольная постоянная (интегралы $\mathcal{K}$ и E получены для более общего случая в [3]). В [4] замечено, что при $\gamma = (n+2)/n$ система (0.3) имеет дополнительные интегралы

$$\sum_{i,j} M_{ij}^2 = 2Et^2 + At + B$$

(A, B — константы). В случае $n = 2$ ($\gamma = 2$) они были использованы в [4] для доказательства интегрируемости соответствующей системы (0.3) в квадратурах.

Величиной $\varepsilon = \pm 1$ и функцией $g(h)$ можно распоряжаться для описания различных конкретных физических моделей движения газа. Например, при $\varepsilon = -1$ в [2] рассмотрена получаемая при $g = \exp(h)$ модель "газового облака". Также с $\varepsilon = -1$ выбор финитной функции $g(h)$ дает примеры разлета газового эллипсоида в вакуум. При $\varepsilon = 1$ можно рассматривать движение газового эллипсоида, находящегося под действием изменяющегося со временем внешнего давления. Изэнтропические движения газа получаются при выборе g согласно соотношению $g(g')^{-\gamma} = \text{const}$, что приводит к функции вида

$$g = (c_0 + c_1 h)^{\gamma/(\gamma-1)} \qquad (c_0,\ c_1 = \text{const}). \tag{0.4}$$

Далее приводится простой пример точного решения, описывающего двумерное движение ($n = 2$) газового цилиндра, находящегося под действием внешнего давления.

1. Модель движений цилиндра. Для $n = 2$ рассматривается матрица

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad M_*^{-1} = m^{-1}M, \qquad m = a^2 + b^2. \tag{1.1}$$

В этом случае динамическая система (0.3) сводится к уравнениям

$$\ddot{a} + \varepsilon(\gamma - 1)m^{-\gamma}a = 0, \qquad \ddot{b} + \varepsilon(\gamma - 1)m^{-\gamma}b = 0. \tag{1.2}$$

Здесь J и $\mathcal{K}$ связаны соотношением $J + \mathcal{K} = 0$, в силу чего система (1.2) имеет два первых интеграла

$$b\dot{a} - a\dot{b} = j \quad (j = \text{const}), \qquad \dot{a}^2 + \dot{b}^2 = \varepsilon m^{1-\gamma} + 2E. \tag{1.3}$$

В полярных координатах

$$a = m^{1/2}\cos\beta, \qquad b = m^{1/2}\sin\beta \tag{1.4}$$

система (1.3) переходит в следующую:

$$\dot{\beta} = -j/m; \tag{1.5}$$

$$\dot{m}^2 = 4f(m), \qquad f(m) = \varepsilon m^{2-\gamma} + 2Em - j^2. \tag{1.6}$$

Тем самым интегрирование динамической системы (1.2) свелось к квадратурам.

Наглядное представление о кинематике описываемых этими решениями движений газа дается в полярных координатах

$$(x, y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad (\xi, \eta) = \sigma(\cos\theta, \sin\theta)$$

в терминах радиальной V_r и окружной V_φ компонент вектора скорости $\boldsymbol{u} = (u, v)$

$$V_r = u\cos\varphi + v\sin\varphi, \qquad V_\varphi = -u\sin\varphi + v\cos\varphi.$$

Простой подсчет на основе уравнений (1.3)–(1.5) дает выражения

$$V_r = r\dot{m}/(2m), \qquad V_\varphi = rj/m, \qquad r = \sigma m^{1/2}. \tag{1.7}$$

Следовательно, в каждый фиксированный момент времени распределение окружных скоростей такое же, как при твердотельном вращении с угловой скоростью $\Omega = j/m$, а распределение радиальных пропорционально радиусу r. Не нарушая общности рассмотрения, можно считать, что занятая газом область ограничена поверхностью цилиндра C_R радиуса R, соответствующего значению $\sigma = 1$, т. е. $R = r\big|_{\sigma=1}$. Тогда $R = [m(t)]^{1/2}$, радиальная скорость движения поверхности C_R равна

$$V_R = R\dot{m}/(2m), \tag{1.8}$$

и весь цилиндр вращается с угловой скоростью $\Omega = j/m$. При этом занятая газом область предполагается расположенной внутри C_R, т. е. при $r < R$ или $\sigma < 1$. Давление на C_R определяется формулой (0.1) и равно

$$p_R = (\gamma - 1)m^{-\gamma}g(1/2). \tag{1.9}$$

Определение возможных форм конкретных движений газа в модели (1.1) свелось к анализу решений ключевого уравнения (1.6). Они существенно зависят от знаков трех величин: ε, $\gamma - 2$ и E.

Вещественные решения уравнения (1.6) возможны только в таких интервалах $\Delta \in (0 < m < \infty)$, в которых $f(m) > 0$. При $\varepsilon = -1$ должно быть $E > 0$. В этом случае для любого $\gamma > 1$ существует интервал $\Delta = (m_0, \infty)$ с $m_0 > 0$, и соответствующие решения описывают неограниченный разлет газового цилиндра C_R в вакуум. При $\varepsilon = 1$, $\gamma \geqslant 2$ и любом значении E существует интервал $\Delta = (0, m_0)$, которому соответствует движение C_R с коллапсом плотности и давления на оси $r = 0$. Если же $\varepsilon = 1$ и $\gamma < 2$, то возможна колебательная форма движения C_R, обсуждаемая в п. **2**.

2. Пульсации цилиндра. Пусть $\varepsilon = 1$, $\gamma < 2$ и $E < 0$. В этом случае из выражений

$$f'(m) = (2-\gamma)m^{1-\gamma} + 2E, \qquad f''(m) = (2-\gamma)(1-\gamma)m^{-\gamma}$$

следует, что функция $f(m)$ выпукла вверх и имеет максимум в точке m_*, определяемой соотношением

$$(2-\gamma)m_*^{1-\gamma} = 2|E|. \tag{2.1}$$

В этой точке функция f имеет следующее значение:

$$f(m_*) = \frac{\gamma - 1}{2 - \gamma}\, 2|E|m_* - j^2. \tag{2.2}$$

Поэтому, если величина (2.2) положительна, то существует интервал $\Delta = (m_1, m_2)$, $0 < m_1 < m < m_2 < \infty$, в котором $f(m) > 0$, $f(m_1) = f(m_2) = 0$. При этом $f'(m_1) > 0$ и $f'(m_2) < 0$. Значит, справедливо представление

$$f(m) = (m - m_1)(m_2 - m)F(m) \tag{2.3}$$

с функцией $F(m) > 0$ при $m_1 \leqslant m \leqslant m_2$, и квадратура

$$\pm \int \frac{dm}{\sqrt{f(m)}} = 2t + C \tag{2.4}$$

определяет периодическую функцию $m(t)$ с периодом

$$T = \int\limits_{m_1}^{m_2} \frac{dm}{\sqrt{f(m)}}. \tag{2.5}$$

Пусть $m(0) = m_1$ при $t = 0$, что соответствует минимальному радиусу $R = \sqrt{m_1}$ цилиндра C_R и максимальному внешнему давлению на него согласно (1.9). При $t = 0$ газ вращается как твердое тело с максимальной угловой скоростью $\Omega_1 = j/m_1$. При $t > 0$ начинается расширение цилиндра по закону $R = \sqrt{m(t)}$, где $m(t)$ определяется формулой (знак "$+$" в (2.4))

$$\int\limits_{m_1}^{m(t)} \frac{dm}{\sqrt{f(m)}} = 2t,$$

а давление на стенку цилиндра монотонно убывает до тех пор, пока не будет достигнуто значение $m = m_2$ в момент $t_1 = T/2$, когда C_R вновь будет вращаться как твердое тело с угловой скоростью $\Omega_2 = j/m_2 < \Omega_1$, а давление на C_R будет минимально. После этого начинается сжатие цилиндра: $m(t)$ убывает согласно формуле (знак "$-$" в (2.4))

$$\int\limits_{m(t)}^{m_2} \frac{dm}{\sqrt{f(m)}} = 2(t - t_1).$$

Сжатие продолжается до момента t_2, когда $m(t)$ вновь достигает значения m_1, причем t_2 определяется соотношением $2t_1 = 2(t_2 - t_1)$, откуда $t_2 = T$. При $t = t_2$ движение принимает исходную форму (как при $t = 0$), и далее процесс повторяется периодически с периодом T. Это движение можно назвать "газовым маятником" по аналогии с обычными механическими колебаниями физического маятника. Принципиальная особенность "газового маятника" состоит в том, что он существует "вечно", аналогично установившимся течениям газа: его нельзя получить из твердотельного вращения газа путем чисто внешнего воздействия на границу C_R за конечное время. Действительно, изменение параметров движения за счет такого воздействия должно распространяться внутрь цилиндра *с конечной скоростью*, а форма движения "газового маятника" определена сразу во всем цилиндре C_R. Это обстоятельство может вызвать определенные трудности при эспериментальной реализации "газового маятника".

Распределение давления в "газовом маятнике" определено с произволом в одну функцию $g(h)$. В частности, возможен *изэнтропический* "газовый маятник", когда давление дается формулами (0.1) и (0.4). Кроме того, вблизи оси ($r = 0$) возможна *область вакуума* ($p = 0$), для получения которой достаточно выбрать в (0.4) значения $c_0 < 0$ и $c_1 > 2|c_0|$.

3. Нормировка и пример. Динамическая система (0.3) допускает (в смысле С. Ли) достаточно богатую группу преобразований пространства $\mathbb{R}^{10}(t, M)$, которая заслуживает отдельного обсуждения. Здесь будет использована только допускаемая однопараметрическая группа растяжений, которая для двумерных движений ($n = 2$) дается формулами

$$t = k^{\gamma} t', \qquad M = kM', \qquad m = k^2 m' \tag{3.1}$$

с параметром растяжения $k > 0$. Применительно к системе (1.1)–(1.3) это приводит к преобразованию констант

$$j = k^{2-\gamma} j', \qquad E = k^{2-2\gamma} E'. \tag{3.2}$$

Легко проверяется, что при преобразованиях (3.1), (3.2) ключевое уравнение (1.6) и его интегралы (1.3) остаются инвариантными.

С помощью (3.1) можно нормировать решение так, что будет $m'_* = 1$, для чего надо взять $k = \sqrt{m_*}$. Согласно (2.1) нормированное решение будет определяться уравнением (1.6) с величиной $2|E| = 2 - \gamma$, т. е. с функцией

$$f(m) = m^{2-\gamma} - (2 - \gamma)m - j^2, \tag{3.3}$$

а условие положительности (2.2) величины $f(m_*) = f(1)$ примет вид $\gamma > 1 + j^2$. Отсюда следует, что нормированный “газовый маятник” существует, если $j^2 < \gamma - 1 < 1$, и колеблется с периодом T (2.5), где $f(m)$ дается формулой (3.3).

В качестве примера рассмотрим значение $\gamma = 3/2$, при котором период T вычисляется точно и оказывается не зависящим от величины $j^2 < 1/2$. Действительно, если вместо m ввести радиус $R = \sqrt{m}$ цилиндра C_R, то при $\gamma = 3/2$ уравнение (1.6) примет вид

$$2R^2\dot{R}^2 = (R - R_1)(R_2 - R),$$

где

$$R_1 = 1 - \sqrt{1 - 2j^2}, \qquad R_2 = 1 + \sqrt{1 - 2j^2}. \tag{3.4}$$

Квадратура дает выражение t через R

$$2\arcsin\sqrt{\frac{R - R_1}{R_2 - R_1}} - \sqrt{(R - R_1)(R_2 - R)} = t/\sqrt{2} \qquad (R_1 \leqslant R \leqslant R_2) \tag{3.5}$$

и значение периода $T = 2\sqrt{2}\pi$.

Естественно возникающий вопрос о существовании шарового ($n = 3$) “газового маятника” пока остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Богоявленский О. И.** Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике // Динамика газовых эллипсоидов. М.: Наука, 1980. С. 261–299.
2. **Dyson F. J.** Dynamics of a spinning gas cloud // J. Math. Mech. 1968. V. 18, N 1. P. 91–101.
3. **Овсянников Л. В.** Новое решение уравнений гидродинамики // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, № 1. С. 47–49.
4. **Анисимов С. И., Лысиков Ю. И.** О расширении газового облака в вакуум // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34. С. 926–929.

Поступила в редакцию 14/IV 2000 г.