УДК 532.59:539.3:534.1

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТНЫХ СВОЙСТВ ЛЬДА НА ПРОГИБ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО НЕМУ НАГРУЗКИ

В. М. Козин, А. В. Погорелова*

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
681013 Комсомольск-на-Амуре
* Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005 Комсомольск-на-Амуре
E-mail: sasha@imim.ru

Рассматривается прямолинейное стационарное движение нагрузки по ледовому покрову, моделируемому вязкоупругой пластиной. Для описания вязкоупругих свойств льда используются линейные модели Максвелла, Кельвина — Фойгта и обобщенная модель Максвелла — Кельвина. Проводится сравнение полученных в расчетах значений вертикального перемещения и деформаций ледяной пластины с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, вязкоупругая пластина, стационарное движение нагрузки, ледовый покров.

1. Гидродинамическая задача о движущейся по сплошному льду нагрузке моделируется с помощью системы поверхностных давлений, перемещающейся над плавающей ледяной пластиной [1, 2].

Рассмотрим бесконечную область, покрытую сплошным льдом, по которой со скоростью u перемещается заданная система поверхностных давлений q. Совмещенная с нагрузкой система координат располагается следующим образом: плоскость xOy совпадает с невозмущенной поверхностью раздела лед — вода, направление оси x совпадает с направлением движения нагрузки, ось z направлена вертикально вверх. Предполагается, что вода — идеальная несжимаемая жидкость с плотностью ρ_2, движение жидкости потенциальное. Ледяной покров моделируется вязкоупругой, изначально не напряженной однородной изотропной пластиной. В качестве линейной вязкоупругой среды, имитирующей лед, рассматриваются модели Максвелла, Кельвина — Фойгта и обобщенная модель Максвелла — Кельвина [3]. При чистом сдвиге поведение тела Максвелла может быть описано с помощью механической модели, состоящей из пружины и вязкого демпфера, соединенных последовательно, поведение тела Кельвина — Фойгта — с помощью модели, состоящей из пружины и вязкого демпфера, соединенных параллельно. В случае одномерного состояния обобщенная модель Максвелла — Кельвина, рассматриваемая в данной работе, представляет собой узлы Максвелла и Кельвина, соединенные последовательно. В данной модели учитываются мгновенная упругая реакция, вязкое течение и запаздывающая упругая реакция.

По аналогии с работами [1, 4] при использовании обобщенной модели вязкоупругой среды Максвелла — Кельвина для описания деформирования ледяного покрова под дей-

Работа выполнена в рамках программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008)” (код проекта РНП.2.1.2.1809).

ствием движущейся нагрузки можно получить следующее уравнение малых колебаний плавающей вязкоупругой пластины:

$$\frac{G_{\text{M}}h^3}{3}\Big(-u\,\frac{\partial}{\partial x}+\tau_{\text{K}}u^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)\nabla^4 w+\Big[\tau_{\text{M}}^{-1}+\Big(1+\frac{G_{\text{M}}}{G_{\text{K}}}+\frac{\tau_{\text{K}}}{\tau_{\text{M}}}\Big)\Big(-u\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)+\tau_{\text{K}}u^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big]\times$$
$$\times\Big(q+\rho_2 gw+\rho_1 hu^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\rho_2 u\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)\Big|_{z=0}\Big)=0. \qquad (1.1)$$

Здесь $G_{\text{M}}=E_{\text{M}}/[2(1+\nu)]$, $G_{\text{K}}=E_{\text{K}}/[2(1+\nu)]$ — модули упругости льда при сдвиге, соответствующие средам Максвелла и Кельвина; E_{M}, E_{K} — модули Юнга для тел Максвелла и Кельвина; ν — коэффициент Пуассона; τ_{M}, τ_{K} — времена релаксаций напряжения и деформации льда соответственно; $h(x,y)$ — толщина льда; $\rho_1(x,y)$ — плотность льда; $w(x,y)$ — вертикальное перемещение льда; $\Phi=\Phi(x,y,z)$ — функция потенциала скорости жидкости, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta\Phi=0$. В дальнейшем предполагается, что ρ_1, h — постоянные. В качестве расчетных величин модуля сдвига G и плотности льда ρ_1 следует принимать их приведенные значения, определяемые как интегральные величины по толщине пластины.

В предположении, что для льда выполняется закон деформирования линейной вязкоупругой среды Максвелла, уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{G_{\text{M}}h^3}{3}\Big(-u\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)\nabla^4 w=\Big(\frac{1}{\tau_{\text{M}}}-u\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(-q-\rho_2 gw-\rho_1 hu^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho_2 u\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)\Big|_{z=0}\Big). \qquad (1.2)$$

В случае линейно-упругой среды с запаздыванием (среды Кельвина — Фойгта) уравнение малых колебаний пластины имеет вид [1, 4, 5]

$$\frac{G_{\text{K}}h^3}{3}\Big(1-u\tau_{\text{K}}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)\nabla^4 w+\rho_1 hu^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho_2 gw-\rho_2 u\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)\Big|_{z=0}=-q. \qquad (1.3)$$

Граничное условие на дне водоема:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=-H}=0 \qquad (1.4)$$

($H=H_1-b$; H_1 — глубина водоема; $b=\rho_1 h/\rho_2$ — глубина погружения льда при статическом равновесии). Для больших глубин, когда H_1 существенно больше h, можно считать $H\approx H_1$.

На поверхности раздела лед — вода ставится линеаризованное кинематическое условие

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=0}=-u\,\frac{\partial w}{\partial x}. \qquad (1.5)$$

Предполагается, что в заданной подвижной системе координат давление q не зависит от времени, т. е. $q=q(x,y)$. В качестве системы перемещающихся давлений используется функция $q(x,y)$ в виде [5, 6]

$$q(x,y)=(q_0/4)[\operatorname{th}(\alpha_1(x+L/2))-\operatorname{th}(\alpha_1(x-L/2))]\times$$
$$\times[\operatorname{th}(\alpha_2(y+L/(2\omega)))-\operatorname{th}(\alpha_2(y-L/(2\omega)))], \qquad (1.6)$$

где q_0 — номинальное давление; $\omega=L/B$; L, B — длина и ширина прямоугольной области, в которой приложена нагрузка; α_1, α_2 — параметры, характеризующие отклонение распределения давления в продольном и поперечном направлениях от прямоугольной формы. Чем больше значения α_1, α_2, тем ближе форма распределения давления к прямоугольной. При $\alpha_1\to\infty$, $\alpha_2\to\infty$ давление q эквивалентно давлению q_0, равномерно распределенному по прямоугольнику.

2. При построении аналитического решения задачи предполагается, что функции $w(x,y)$, $\Phi(x,y,z)$ и $q(x,y)$ удовлетворяют условиям, необходимым для представления их в виде разложения в интегралы Фурье по переменным x, y:

$$\Phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty k\,dk\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\theta\iint\limits_\Omega (F_1\exp(-kz)+F_2\exp(kz))\times$$
$$\times\exp\left[ik((x-x_1)\cos\theta+(y-y_1)\sin\theta)\right]dx_1\,dy_1,$$

$$q(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty k\,dk\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\theta\iint\limits_\Omega q(x_1,y_1)\exp\left[ik((x-x_1)\cos\theta+(y-y_1)\sin\theta)\right]dx_1\,dy_1, \quad (2.1)$$

$$w(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty k\,dk\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\theta\iint\limits_\Omega w(x_1,y_1)\exp\left[ik((x-x_1)\cos\theta+(y-y_1)\sin\theta)\right]dx_1\,dy_1.$$

Здесь Ω — область распределения нагрузки q (в случае нагрузки вида (1.6) область Ω — вся плоскость x_1Oy_1); F_1, F_2 — неизвестные функции переменных x_1, y_1, k, θ. Подставляя выражения (2.1) в граничное условие (1.1) с использованием граничного условия (1.4) и кинематического условия (1.5) и выполняя замену переменных $\lambda=k$, $\alpha=k\cos\theta$, после несложных преобразований можно получить формулу для расчета прогиба ледяной пластины, имитируемой средой Максвелла — Кельвина, при стационарном режиме движения по ней нагрузки вида (1.6):

$$\operatorname{Re}(w(x,y))=\frac{q_0}{\rho_2u^2\alpha_1\alpha_2}\int\limits_0^\infty\lambda^2\operatorname{th}(\lambda H)\int\limits_0^\lambda\frac{\sin(\alpha L/2)\sin(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,L/(2\omega))}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/(2\alpha_1))\operatorname{sh}(\pi\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}/(2\alpha_2))}\times$$
$$\times\frac{\cos(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,y)}{\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,(\xi^2+\eta^2)}\Big[\Big((1-\tau_M\tau_Ku^2\alpha^2)\cos(\alpha x)+\tau_Mu\alpha\Big(1+\frac{G_M}{G_K}+\frac{\tau_K}{\tau_M}\Big)\sin(\alpha x)\Big)\xi+$$
$$+\Big((1-\tau_M\tau_Ku^2\alpha^2)\sin(\alpha x)-\tau_Mu\alpha\Big(1+\frac{G_M}{G_K}+\frac{\tau_K}{\tau_M}\Big)\cos(\alpha x)\Big)\eta\Big]\,d\alpha\,d\lambda, \quad (2.2)$$

где

$$\xi=\frac{G_Mh^3\lambda^5\tau_M\operatorname{th}(\lambda H)}{3\rho_2}\tau_K\alpha^2+(1-\tau_M\tau_Ku^2\alpha^2)\Big(-\frac{g\lambda\operatorname{th}(\lambda H)}{u^2}+\frac{\rho_1h\alpha^2\lambda\operatorname{th}(\lambda H)}{\rho_2}+\alpha^2\Big),$$

$$\eta=\frac{G_Mh^3\lambda^5\tau_M\operatorname{th}(\lambda H)}{3\rho_2u}\alpha-\Big(1+\frac{G_M}{G_K}+\frac{\tau_K}{\tau_M}\Big)\tau_Mu\alpha\Big(-\frac{g\lambda\operatorname{th}(\lambda H)}{u^2}+\frac{\rho_1h\alpha^2\lambda\operatorname{th}(\lambda H)}{\rho_2}+\alpha^2\Big).$$

Для того чтобы получить формулу для прогиба ледяной пластины, имитируемой средой Максвелла, под действием движущейся нагрузки, можно выполнить аналогичные выкладки для уравнения (1.2) с использованием преобразования Фурье либо в полученном для обобщенной модели решении (2.2) исключить узел Кельвина, т. е. положить $\tau_K=0$, $G_K=\infty$. Формула для расчета вертикального перемещения льда с использованием модели Максвелла имеет вид

$$\operatorname{Re}(w(x,y)) = \frac{q_0}{\rho_2 u^2 \alpha_1 \alpha_2} \int\limits_0^\infty \lambda^2 \operatorname{th}(\lambda H) \int\limits_0^\lambda \frac{\sin(\alpha L/2) \sin(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\, L/(2\omega))}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/(2\alpha_1)) \operatorname{sh}(\pi\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,/(2\alpha_2))} \times$$

$$\times \cos(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\, y) \frac{(\cos(\alpha x) + \tau_{\text{M}} u\alpha \sin(\alpha x))\xi + (\sin(\alpha x) - \tau_{\text{M}} u\alpha \cos(\alpha x))\eta}{\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,(\xi^2+\eta^2)}\, d\alpha\, d\lambda, \qquad (2.3)$$

где

$$\xi = -\frac{g\lambda \operatorname{th}(\lambda H)}{u^2} + \frac{\rho_1 h \alpha^2 \lambda \operatorname{th}(\lambda H)}{\rho_2} + \alpha^2,$$

$$\eta = \frac{G_{\text{M}} h^3 \lambda^5 \tau_{\text{M}} \operatorname{th}(\lambda H)}{3\rho_2 u}\, \alpha - \tau_{\text{M}} u\alpha \Big(-\frac{g\lambda \operatorname{th}(\lambda H)}{u^2} + \frac{\rho_1 h \alpha^2 \lambda \operatorname{th}(\lambda H)}{\rho_2} + \alpha^2 \Big).$$

Выражение для прогиба пластины при моделировании ее средой Кельвина — Фойгта получается аналогично из уравнения (1.3) с использованием преобразования Фурье (2.1) и условий (1.4), (1.5). В случае если давление описывается функцией (1.6), это выражение принимает вид

$$\operatorname{Re}(w(x,y)) = \frac{q_0}{\rho_2 u^2 \alpha_1 \alpha_2} \int\limits_0^\infty \lambda^2 \operatorname{th}(\lambda H) \int\limits_0^\lambda \frac{\sin(\alpha L/2) \sin(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\, L/(2\omega))}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/(2\alpha_1)) \operatorname{sh}(\pi\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,/(2\alpha_2))} \times$$

$$\times \cos(\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\, y) \frac{\cos(\alpha x)\,\xi + \sin(\alpha x)\,\eta}{\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,(\xi^2+\eta^2)}\, d\alpha\, d\lambda, \qquad (2.4)$$

где

$$\xi = -\frac{G_{\text{K}} h^3 \lambda^5 \operatorname{th}(\lambda H)}{3\rho_2 u^2} - \frac{g\lambda \operatorname{th}(\lambda H)}{u^2} + \frac{\rho_1 h \alpha^2 \lambda \operatorname{th}(\lambda H)}{\rho_2} + \alpha^2,$$

$$\eta = \frac{G_{\text{K}} h^3 \lambda^5 \tau_{\text{K}} \operatorname{th}(\lambda H)}{3\rho_2 u}\, \alpha.$$

3. Для определения границ области применимости моделей Максвелла, Кельвина — Фойгта и обобщенной модели Максвелла — Кельвина необходимо сравнить результаты расчетов по формулам (2.2)–(2.4) с известными экспериментальными данными [2, 7, 8]. В работе [7] представлены результаты испытаний, проведенных 4–10 февраля 1981 г. на озере Шарома в Хоккайдо (Япония). В частности, экспериментальные данные, используемые для сравнения с теоретическими результатами, представляют собой зависимость от времени вертикального перемещения ледяного покрова на расстоянии 1 м от линии движения снегохода при различных скоростях. В работе [8] (и позднее (в более полном варианте) в работе [2]) приведены результаты эксперимента “Project Kiwi 131” (проведенного вблизи острова Тент в проливе Мак-Модо), которые, в частности, представляют собой показания тензодатчиков, расположенных на расстоянии 30 и 100 м от линии движения грузового пикапа.

Для сопоставления результатов расчетов по формулам (2.2)–(2.4) с экспериментальными данными [7] используются следующие значения основных характеристик нагрузки, льда и водоема, взятые из работы [7]: $\rho_1 = 900$ кг/м^3, $\rho_2 = 1000$ кг/м^3, $\nu = 1/3$, $\alpha_1 L = \alpha_2 L = 10$, $\omega = 2{,}56$, $y = 1$ м, $h = 0{,}075$ м, $H = 6{,}8$ м, $L = 1{,}23$ м, $B = 0{,}48$ м, $q_0 = 406{,}5$ Па.

Для определения времен релаксации τ_{M}, τ_{K} используются экспериментально полученные в [7] зависимости времени задержки (запаздывания) τ_d максимального прогиба ледяного покрова (относительно центра нагрузки) от скорости (рис. 1). В работах [2, 7] время

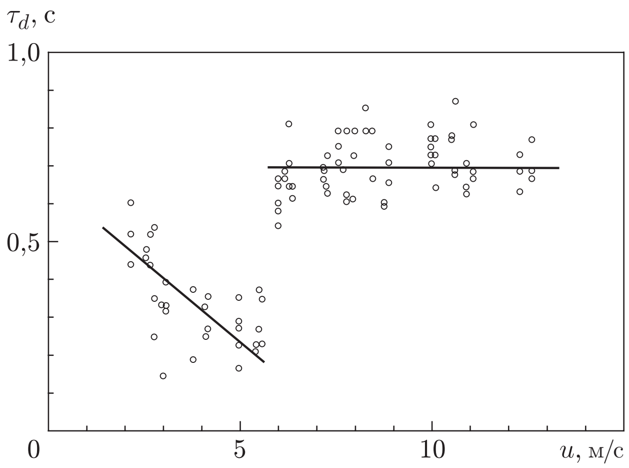

Рис. 1. Зависимости времени запаздывания (относительно центра нагрузки) максимального прогиба пластины от скорости [2, 7]:
точки — экспериментальные данные; линии — результаты аппроксимации

запаздывания ассоциируется со временем релаксации τ для вязкоупругой модели ледяного покрова. Зависимости, показанные на рис. 1 отрезками прямых, приближенно можно представить в виде

$$\tau = \begin{cases} 0{,}69(1 - u/\sqrt{gH}\,), & u < u_{\min}, \\ \quad 0{,}69, & u \geqslant u_{\min}, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $u_{\min} = 2(Dg^3/(27\rho_2))^{1/8}$ — минимальная фазовая скорость распространения изгибно-гравитационных волн [1, 2]; $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$.

На рис. 2 кривые *1*, *2* — вертикальные перемещения ледяной пластины, моделируемой соответственно средами Максвелла (2.3) и Кельвина — Фойгта (2.4), при указанных выше значениях параметров для времен релаксации $\tau_{\rm M}$, $\tau_{\rm K}$, определяемых по формулам (3.1) и для $E_{\rm M} = E_{\rm K} = 5\cdot 10^9$ Па. Пунктирными кривыми *3* показаны данные экспериментов [2, 7]. Из результатов сравнения кривых *1*–*3* на рис. 2 следует, что при малых скоростях движения ($u < u_{\min}$) модель Кельвина — Фойгта более точно описывает максимальные прогибы, чем модель Максвелла. При докритических скоростях модель Максвелла дает завышенные (до 150 %) значения максимальных прогибов. Однако при больших скоростях ($u \geqslant u_{\min}$) с использованием модели Максвелла можно получить более точные максимальные значения амплитуды прогиба, кроме того, эта модель описывает волновые предвестники. Модель Кельвина — Фойгта (кривая *2* на рис. 2) при больших скоростях ($u \geqslant u_{\min}$) не описывает волновые предвестники, и значения максимальных прогибов, полученные с использованием этой модели, составляют лишь $60 \div 80$ % экспериментальных значений.

На основании результатов расчетов по моделям Максвелла и Кельвина — Фойгта и с учетом того, что времена релаксации $\tau_{\rm M}$, $\tau_{\rm K}$ имеют различный физический смысл, в качестве базовой зависимости для времени релаксации деформации $\tau_{\rm K}$ выбирается зависимость, соответствующая наклонной прямой на рис. 1, а для времени релаксации напряжения $\tau_{\rm M}$ — зависимость, соответствующая горизонтальной прямой на рис. 1. Предполагается, что в обобщенной модели Максвелла — Кельвина времена релаксации $\tau_{\rm M}$, $\tau_{\rm K}$ определяются по формулам

$$\tau_{\rm M} = \begin{cases} 0{,}69\sqrt{gH}\,/u, & u < \sqrt{gH}\,, \\ \quad 0{,}69, & u \geqslant \sqrt{gH}\,, \end{cases} \qquad \tau_{\rm K} = \begin{cases} 0{,}69(1 - u/\sqrt{gH}\,), & u < u_{\min}, \\ \quad 0, & u \geqslant u_{\min}. \end{cases} \tag{3.2}$$

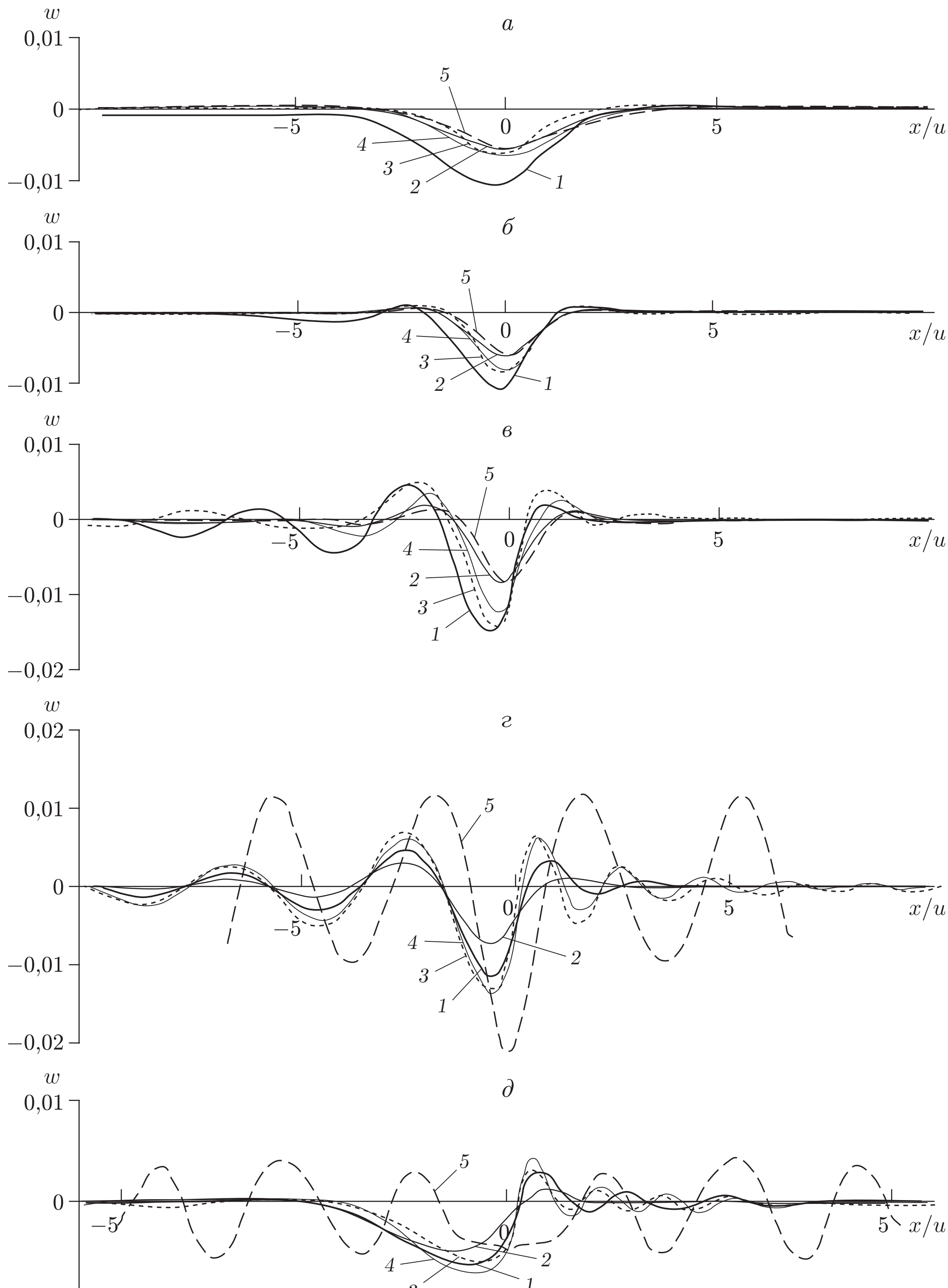

Рис. 2. Вертикальное перемещение ледяной пластины, моделируемой различными вязкоупругими средами, при стационарном движении по ней нагрузки:
а — $u = 2{,}2$ м/с, *б* — $u = 4{,}2$ м/с, *в* — $u = 5{,}5$ м/с, *г* — $u = 6{,}2$ м/с, *д* — $u = 8{,}9$ м/с; *1* — среда Максвелла, *2* — среда Кельвина — Фойгта, *3* — экспериментальные данные [2, 7], *4* — обобщенная среда Максвелла — Кельвина, *5* — абсолютно упругая среда

Результаты анализа механической модели узла Максвелла позволяют сделать предположение, что время релаксации напряжения τ_{M} и модуль упругости льда при сдвиге G_{M} взаимосвязаны: если время релаксации напряжения τ_{M} возрастает с уменьшением скорости на интервале $u < \sqrt{gH}$, то и модуль упругости G_{M} будет возрастать при $u \to 0$. Таким образом, при $u \to 0$ узел Максвелла будет "вырождаться" и обобщенная модель будет стремиться к модели Кельвина — Фойгта. Можно предположить, что модули упругости льда E_{M} и E_K определяются по формулам

$$E_{\mathrm{M}} = \begin{cases} E_0\sqrt{gH}\,/u, & u < \sqrt{gH}, \\ E_0, & u \geqslant \sqrt{gH}, \end{cases} \qquad E_{\mathrm{K}} = E_0, \tag{3.3}$$

где $E_0 = 5\cdot 10^9$ Па — модуль Юнга для изотропной гомогенной упругой ледяной пластины в условиях эксперимента [7]. Заметим, что в области $u \geqslant u_{\min}$ обращение в нуль времени релаксации τ_{K} приводит к образованию нескольких "горбов" изгибной волны, распространяющейся перед нагрузкой.

Кривыми *4* на рис. 2 показаны результаты расчетов вертикального перемещения ледяной пластины, имитируемой обобщенной моделью Максвелла — Кельвина, по формулам (2.2), (3.2), (3.3) при указанных выше значениях параметров. Из анализа кривых *1–4* на рис. 2 следует, что обобщенная модель достаточно точно описывает экспериментально полученные данные [7] на всем интервале рассматриваемых скоростей. Значения максимальных прогибов, полученные с использованием этой модели, отличаются от экспериментальных не более чем на 10 %. Модель описывает поведение изгибной волны перед нагрузкой и гравитационной волны за ней в случае критических и сверхкритических скоростей. При малых (докритических) скоростях движения обобщенная модель Максвелла — Кельвина совпадает с моделью Кельвина — Фойгта, а при больших (сверхкритических) скоростях незначительно отличается от модели Максвелла. Таким образом, при малых докритических скоростях более предпочтительной является модель Кельвина — Фойгта (2.4), а при критических и сверхкритических скоростях — модель Максвелла (2.3) с учетом элементарной зависимости времени релаксации от скорости (3.1) при модуле Юнга $E_0 = 5\cdot 10^9$ Па для обеих моделей.

Если считать, что в обобщенной модели (2.2) времена релаксации равны ($\tau_{\mathrm{K}} = \tau_{\mathrm{M}}$) и определяются по формуле (3.1), то результаты расчетов будут количественно близки к данным эксперимента [7]. Однако при малых скоростях движения ($u = 2{,}2$; $4{,}2$ м/с) амплитуда прогиба по абсолютной величине будет превышать экспериментальные значения на $30 \div 40$ %, а при околокритических и сверхкритических скоростях ($u = 6{,}2$; $8{,}9$ м/с) максимальные прогибы будут совпадать с полученными в эксперименте, но волновые предвестники будут иметь только два теоретических "горба" вместо 4–6 экспериментальных.

Кривые *5* на рис. 2 соответствуют расчетам вертикального перемещения упругой ледяной пластины (без учета сил вязкости) при движении по ней нагрузки с различными скоростями (данный результат можно получить, полагая в модели Максвелла (в формуле (2.3)) $\tau_{\mathrm{M}} = \infty$ либо полагая в модели Кельвина — Фойгта (в формуле (2.4)) $\tau_{\mathrm{K}} = 0$). Кривые *5* получены при указанных выше значениях параметров и $E = 5\cdot 10^9$ Па. Видно, что при докритических скоростях ($u = 2{,}2$; $4{,}2$; $5{,}5$ м/с) прогиб ледяной пластины имеет вид симметричной чаши, что соответствует решению Кельвина — Фойгта. При сверхкритических скоростях движения в рамках используемого интегрального метода решения линейная модель упругой пластины при движении по ней нагрузки дает незатухающие изгибно-гравитационные волны, причем в случае больших значений координаты x при вычислении прогиба w получаются расходящиеся несобственные интегралы.

На рис. 3 представлены прогибы ледяного покрова, рассчитанные по формулам (2.2), (3.2), (3.3) при указанных выше значениях параметров. Показано затухание изгибно-

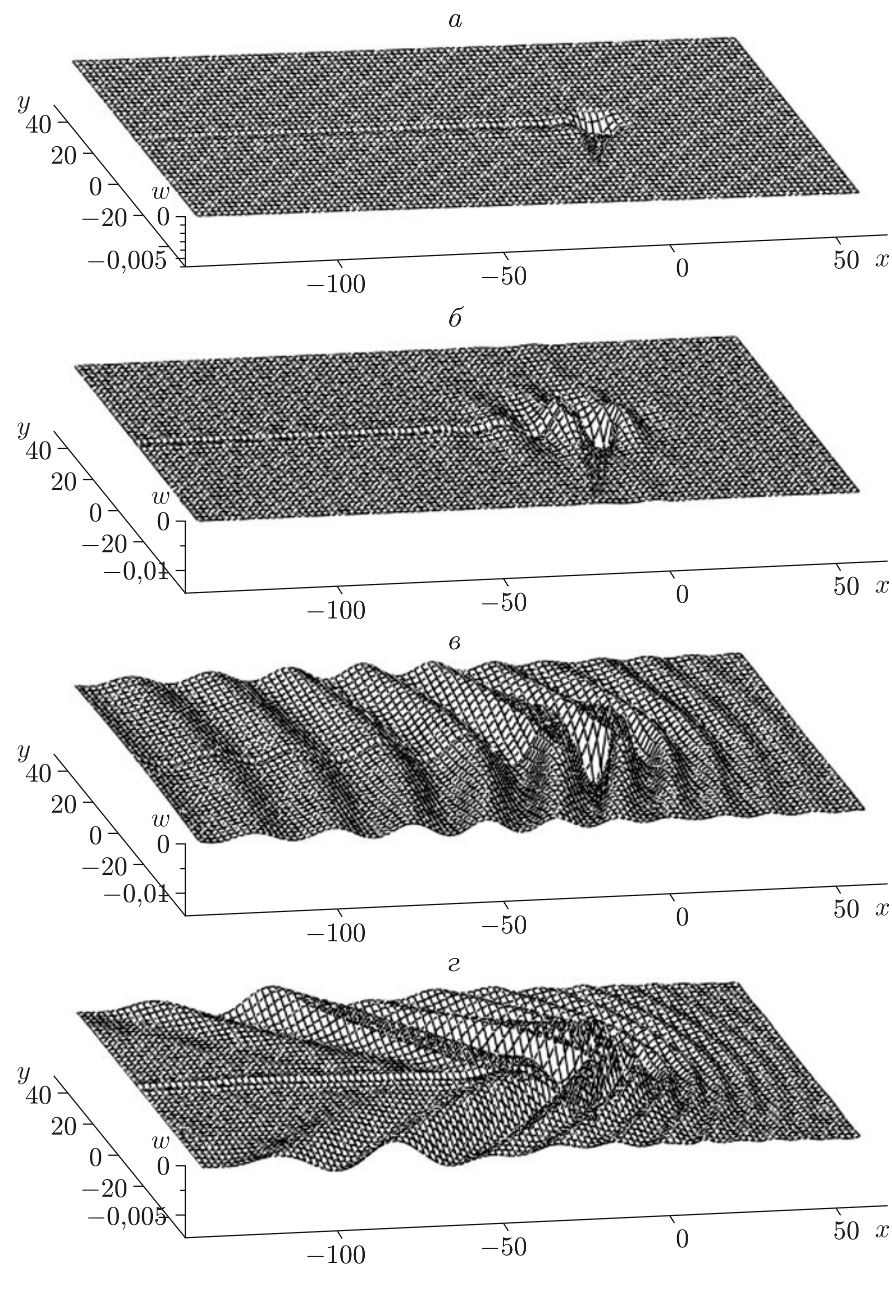

Рис. 3. Прогиб ледяного покрова при различных скоростях стационарного движения нагрузки:
а — $u = 2{,}2$ м/с, *б* — $u = 5{,}5$ м/с, *в* — $u = 6{,}2$ м/с, *г* — $u = 8{,}9$ м/с

гравитационных волн по мере удаления от места приложения нагрузки. Этот эффект наблюдается в эксперименте [7], но отсутствует в численных решениях [9, 10]. Таким образом, учет вязкости для ледяной пластины даже в линейной постановке позволяет достаточно точно описать экспериментальные данные. Кроме того, из рис. 3 следует, что за нагрузкой в ледяной пластине помимо изгибно-гравитационной волны образуется небольшая вогнутость в форме желоба вдоль направления движения нагрузки. Данный эффект не наблюдается при решении задачи о движении нагрузки по упругой пластине либо по вязкоупругой пластине, имитируемой телом Кельвина — Фойгта. Это позволяет предположить, что именно введение узла Максвелла, отвечающего за вязкое течение среды под нагрузкой, приводит к возникновению деформации ползучести ледяной пластины. Из анализа рис. 3 и кривых *1* на рис. 2 следует, что деформация ползучести (вязкий прогиб пластины под нагрузкой и за ней вдоль траектории движения) увеличивается при уменьшении скорости движения и уменьшается по мере удаления от места приложения нагрузки. Образование небольшой вогнутости ледяной пластины в форме желоба за нагрузкой подтверждается в теоретической работе [11], в которой на рис. 12 представлен профиль волны в направлении, перпендикулярном движению, на расстоянии 100 м от места приложения нагрузки.

При сравнении с результатами эксперимента [2, 8] деформация вычислялась по формуле

$$\varepsilon_{11} = -\frac{h}{2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

с использованием формул (2.2), (3.2), (3.3).

На рис. 4 сплошными линиями показаны деформации поверхности льда вдоль линии, параллельной средней линии движения нагрузки и расположенной на расстоянии 30 м от нее, при следующих значениях параметров: $\rho_1 = 900$ кг/м^3, $\rho_2 = 1000$ кг/м^3, $\nu = 1/3$, $\alpha_1 L = \alpha_2 L = 10$, $L = 2{,}5$ м, $h = 1{,}6$ м, $H = 400$ м, $\omega = 2$, $q_0 = 6586$ Па, $y = 30$ м, $D = 1{,}536 \cdot 10^9$ Н$\cdot$м, $E_0 = 4 \cdot 10^9$ Па. Следует отметить, что размеры нагрузки (L и ω) приближенно соответствуют размерам области распределенного давления, создаваемого грузовым пикапом; значение q_0 соответствует массе нагрузки (пикапа) 2100 кг [2, 8]. Для данных, использованных в экспериментах [2, 8], $\sqrt{gH} = 62{,}6$ м/с, $u_{\min} = 18$ м/с. Пунктирные линии на рис. 4 соответствуют экспериментальным данным [2, 8], представляющим собой показания тензодатчика, расположенного на расстоянии 30 м от линии движения грузового пикапа.

Из рис. 4 следует, что результаты расчетов по обобщенной модели Максвелла — Кельвина качественно хорошо согласуются с данными эксперимента “Project Kiwi 131” [2, 8]. Некоторое количественное различие теоретических и экспериментальных результатов можно объяснить тем, что в расчетах использованы приближенные размеры нагрузки (пикапа). Необходимо отметить, что результаты расчета деформаций пластины с использованием обобщенной модели Максвелла — Кельвина качественно хорошо согласуются с результатами расчетов [2] по асимптотической формуле, справедливой для ограниченного интервала скоростей нагрузки при больших расстояниях от места приложения нагрузки.

4. Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Результаты расчетов с использованием линейных моделей вязкоупругой среды Максвелла, Кельвина — Фойгта и Максвелла — Кельвина хорошо согласуются с результатами известных экспериментов. Зависимость времени релаксации от скорости описывается формулой (3.1) в случае использования простых моделей Максвелла или Кельвина — Фойгта либо более сложной формулой (3.2) в случае использования обобщенной модели Максвелла — Кельвина. Обобщенная модель Максвелла — Кельвина достаточно точно описывает максималь-

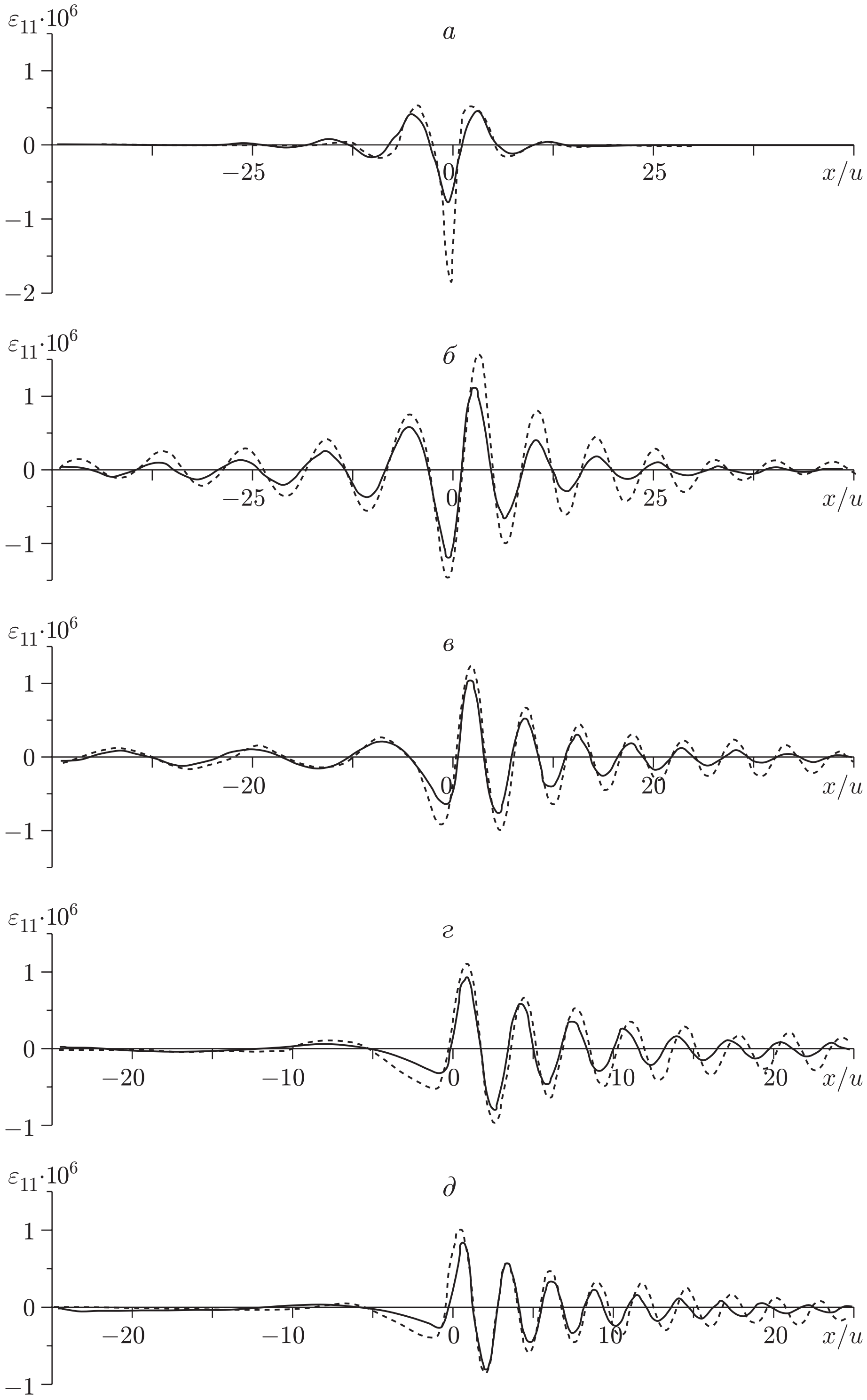

Рис. 4. Деформация вязкоупругой ледяной пластины:
а — $u = 17{,}5$ м/с, *б* — $u = 18{,}4$ м/с, *в* — $u = 20{,}7$ м/с, *г* — $u = 25{,}8$ м/с, *д* — $u = 28{,}5$ м/с;
сплошная линия — результаты расчета, пунктирная — экспериментальные данные

ные прогибы вязкоупругой пластины, гравитационную волну за нагрузкой и изгибную волну перед нагрузкой.

При расчете прогибов под движущейся нагрузкой в случае докритических скоростей модель упругой пластины дает результаты, близкие к результатам, полученным с использованием модели Кельвина — Фойгта. Эти результаты тем ближе к эксперименту, чем меньше скорость движения нагрузки. При $u \geqslant u_{\min}$ в рамках используемого интегрального метода решения модель абсолютно упругой пластины дает незатухающие изгибно-гравитационные волны.

Следует отметить, что формулы (3.1), (3.2) соответствуют движению нагрузки по глубокой воде ($u_{\min} < \sqrt{gH}$). В случае движения нагрузки по мелкой воде ($\sqrt{gH} < u_{\min}$), для того чтобы избежать отрицательных значений времени релаксации, получаемых в формулах (3.1), (3.2) в интервале $u \in (\sqrt{gH}\,; u_{\min})$, предлагается в этих формулах поменять местами величины $u_{\min}$ и $\sqrt{gH}$. Однако данное предположение также нуждается в обосновании.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
2. **Squire V. A.** Moving loads on ice plates / V. A. Squire, R. J. Hosking, A. D. Kerr, P. J. Langhorne. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
3. **Мейз Дж.** Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974.
4. **Фрейденталь А.** Математические модели неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. М.: Физматгиз, 1962.
5. **Козин В. М., Погорелова А. В.** Волновое сопротивление амфибийных судов на воздушной подушке при движении по ледяному покрову // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 49–55.
6. **Doctors L. J., Sharma S. D.** The wave resistance of an aircushion vehicle in steady and acceleration motion // J. Ship Res. 1972. V. 16, N 4. P. 248–260.
7. **Takizava T.** Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load // Cold Regions Sci. Technol. 1985. V. 11. P. 171–180.
8. **Squire V. A., Robinson W. H., Langhorne P. J., Haskell T. G.** Vehicles and aircraft on floating ice // Nature. 1988. V. 333. P. 159–161.
9. **Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N. W.** A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of rectangular load // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 173–197.
10. **Yeung R. W., Kim J. W.** Structural drag and deformation of a moving load on a floating plate // Proc. of the 2nd Intern. conf. on hydroelasticity in marine technology, Fukuoka (Japan), Dec. 1–3, 1998. Fukuoka: Yomei Printing Cooperative Soc., 1998. P. 77–88.
11. **Wang K., Hosking R. J., Milinazzo F.** Time-dependent response of a floating viscoelastic plate to an impulsively started moving load // J. Fluid Mech. 2004. V. 521. P. 295–317.

Поступила в редакцию 14/I 2008 г.,
в окончательном варианте — 24/III 2008 г.