

ОБТЕКАНИЕ КЛИНА ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

В. В. Лунев

(Москва)

Обтекание тел газом с очень большими энергиями сопряжено с появлением высокотемпературных областей за скачками уплотнения. Это обстоятельство в некоторых случаях может привести к необходимости учитывать влияние процессов излучения и поглощения газа на его движение.

В работе рассматривается обтекание бесконечного клина гиперзвуковым потоком излучающего газа в предположении, что влияние излучения невелико.

Предполагается также, что излучение газа не влияет на его движение перед скачком уплотнения, это будет справедливо в тех случаях, когда газ в невозмущенном состоянии прозрачен для того диапазона частот, в котором излучается основное количество энергии при температуре за скачком уплотнения, а температура его невелика. Будем ограничиваться таким диапазоном температур, когда радиационное давление и плотность лучистой энергии не существенны. В работах [1, 2] указано, например, что эти факторы существенны для воздуха лишь при температурах порядка сотен тысяч градусов. Влиянием пограничного слоя будем пренебрегать, а температуру поверхности клина будем считать заданной постоянной величиной.

1. При отсутствии перепоглощения, что имеет место при малой оптической толщине высокотемпературного слоя с температурой T , газовая частица излучает энергию, равную $4\pi\alpha_1 B$ с единицы массы, где α_1 — средний по частотам коэффициент поглощения, $B = (\sigma/\pi) T^4$ — интенсивность излучения абсолютно черного тела, σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Если L — характерный размер тела, V — скорость газа в возмущенном слое, а i_{00} — полное теплосодержание единицы массы газа, то отношение энергии, излученной частицей за время движения вдоль тела, к полной будет определяться параметром $\beta = 4\pi\alpha_1 BL / i_{00} V$.

В том случае, когда процесс внутреннего перепоглощения играет существенную роль, действительное влияние излучения будет меньше определяемого параметром β .

Если M_∞ и U — число M и скорость набегающего потока, то при $M_\infty \gg 1$ имеем $i_{00} \approx \frac{1}{2} U^2$ и параметр $\beta = 8\pi\alpha_1 BL / U^2 V$.

При обтекании тел с присоединенным скачком уплотнения $V \sim U$, в случае отошедшей ударной волны $V \sim kU$, где k — отношение плотностей до и после скачка.

Будем рассматривать обтекание бесконечного клина гиперзвуковым потоком невязкого излучающего газа, когда параметр $\beta_0 = 8\pi\alpha_1 BL / U^3 \ll 1$, что всегда имеет место вблизи носка заостренного тела.

Пусть xL , yL — координаты вдоль и нормально к поверхности клина, uU , vU — составляющие скорости по этим осям, aU , $\rho\rho_\infty$, $\rho\rho_\infty U^2$, Ui^2 , T — скорость звука, плотность, давление, удельная энтальпия и температура газа, ρ_∞ — плотность газа в невозмущенном потоке $q_R = (\beta_0 U^3 / L) q$ — скорость притока тепла в единице массы за счет излучения. Тогда при принятых допущениях уравнения движения излучающего газа примут вид

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial p}{\partial x}, & \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, & \rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} &= u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \beta_0 q \end{aligned} \quad (1.1)$$

Будем искать решение задачи в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \beta_0 u_1 + \dots, & v &= v_0 + \beta_0 v_1, & i &= i_0 + \beta_0 i_1 \\ p &= p_0 + \beta_0 p_1 + \dots, & \rho &= \rho_0 + \beta_0 \rho_1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

Очевидно, что $v_0 = 0$, а прочие величины с индексом 0 постоянные. Подставляя (1.2) в (1.1), с точностью до членов порядка β_0^2 , будем иметь

$$(M^2 - 1) \frac{\partial p_1}{\partial x} + \rho_0 u_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} = - \frac{u_0}{i_\rho} q, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} + \rho_0 u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_0 u_0} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial i_1}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{u_0} q, \quad \left(M = \frac{u_0}{a_0}, \quad i_\rho = \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_p \right) \quad (1.4)$$

Здесь величины q и i_ρ определяются через параметры с индексом 0. Уравнения (1.4) легко интегрируются:

$$u_1 = u_1^*(x_0) - \frac{1}{\rho_0 u_0} [p_1 - p_1^*(x_0)], \quad (1.5)$$

$$i_1 = i_{11} + i_{12},$$

$$i_{11} = - \frac{1}{u_0} u_1^*, \quad i_{12} = \frac{1}{u_0} \int_{x_0}^x q(x, y) dx$$

Здесь звездочкой отмечены величины на скачке уплотнения, x_0 — абсцисса скачка уплотнения при данном y . Величины i_{11} и u_1 соответствуют адиабатическому процессу и удовлетворяют уравнению Бернулли. Величина i_{12} есть изменение полной энтальпии газа за счет излучения.

Примем в дальнейшем, что уравнение состояния газа за скачком уплотнения имеет вид¹

$$i = i^\circ + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \quad \begin{matrix} (i^\circ = \text{const}) \\ (\kappa = \text{const}) \end{matrix} \quad (1.6)$$

Полагая $p_1 = p_{11} + p_{12}$, будем из (1.5) — (1.6) иметь:

$$\frac{p_{11}}{\rho_0} = \frac{p_1}{\rho_0} + \frac{i_{11}}{\rho_0 i_\rho}, \quad \frac{p_{12}}{\rho_0} = \frac{i_{12}}{\rho_0 i_\rho}, \quad i_\rho = - \frac{i_0 - i^\circ}{\rho_0} \quad (1.7)$$

Пусть φ и θ есть углы касательной к скачку уплотнения с направлением набегающего потока и осью x . Полагая $\varphi = \varphi_0 + \beta_0 \varphi_1$, с помощью обычных соотношений на скачке уплотнения при $M_\infty \sin \varphi \gg 1$ получим²:

$$\begin{aligned} \frac{p_1^*}{\rho_0} &= 2\varphi_1 \frac{i^\circ (\rho_0^2 - 1) \operatorname{ctg} \varphi_0}{(\rho_0^2 - \rho_0) (i_0 - i^\circ) + 2i^\circ}, & \frac{i_1^*}{i_0 - i^\circ} &= \frac{p_1^*}{\rho_0} - \frac{p_1^*}{\rho_0} \\ \frac{p_{11}^*}{\rho_0} &= 2\varphi_1 \left[1 - \frac{(\rho_0 + 1) i^\circ}{(\rho_0^2 - \rho_0) (i_0 - i^\circ) + 2i^\circ} \right] \operatorname{ctg} \varphi_0, & u_1^* &= - \frac{1}{u_0} i_1^* \\ v_1^* &= \varphi_1 \left\{ 1 - \frac{2(\rho_0 + 1) \rho_0 i^\circ}{(\rho_0 - \operatorname{tg}^2 \varphi) [(\rho_0^2 - \rho_0) (i_0 - i^\circ) + 2i^\circ]} \right\} \left(1 - \frac{1}{\rho_0} \right) \cos (\theta_0 + \varphi_0) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Соотношения (1.8), вообще говоря, имеют место на возмущенной линии скачка, но так как в нашем случае параметры течения при $\beta_0 = 0$ постоянны, то эти соотношения с точностью до β_0^2 будут выполняться на невозмущенной линии скачка $y = x \operatorname{tg} \theta_0$. Исключая φ_1 из (1.8), получим следующие граничные условия для системы (1.3):

$$p_1 = \gamma v_1 \quad \text{при } y = x \operatorname{tg} \theta_0, \quad v_1 = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.9)$$

Постоянная γ всегда положительная и легко определяется из (1.8). Заметим, что при больших скоростях угол $\theta_0 \approx \operatorname{tg} \theta_0 = (\operatorname{tg} \varphi_0) / \rho_0$ мал вследствие большого уплотнения газа за скачком уплотнения.

¹ Для диссоциированного воздуха при изменении давления и температуры в небольшом диапазоне эта формула, как показывает сравнение с табличными данными [3], имеет для $i = i(p, \rho)$ и ее производных i_ρ и i_p точность в несколько процентов. Величина i° при этом оказывается небольшой по сравнению с i .

² Допущение $M_\infty \sin \varphi \gg 1$ принято здесь для простоты и не является существенным ограничением.

2. Поток энергии q_R в движущейся частице газа определяется формулой [4]

$$q_R = \int_0^\infty q_{R\nu} d\nu, \quad q_{R\nu} = \alpha_\nu \left(\int_{4\pi} I_{\nu l} d\Omega - 4\pi B_\nu \right) \quad (2.1)$$

Здесь ν — частота излучения, Ω — телесный угол, α_ν , B_ν и $I_{\nu l}$ — соответственно при частоте ν массовый коэффициент поглощения, функция Планка для распределения по частотам интенсивности излучения черного тела и интенсивность излучения в направлении l .

Если пренебречь рассеянием лучистой энергии, то величина $I_{\nu l}$ будет удовлетворять уравнению [4]

$$\frac{\partial I_{\nu l}}{\partial l} = \rho_\infty \rho_0 \alpha_1 L (B_\nu - I_{\nu l}) \quad (2.2)$$

В рассматриваемом случае коэффициенты этого уравнения постоянные и оно имеет решение

$$I_{\nu l} = B_\nu + (I_{\nu l}^* - B_\nu) e^{-K_\nu l^*} \quad (K_\nu = \rho_\infty \rho_0 \alpha_\nu L) \quad (2.3)$$

Здесь $I_{\nu l}^*$ — интенсивность излучения в точке пересечения границы рассматриваемой области с направлением, обратным l ; расстояние до этой точки равно $l l^*$. Интенсивность лучей, падающих на скачок уплотнения извне, $I_\nu^* = I_{\nu 0}$, будем считать постоянной. Примем пока, что степень черноты поверхности $\varepsilon = 1$, тогда при постоянной температуре поверхности будем иметь на ней $I_{\nu l}^* = B_\nu(T_w) = B_{\nu w}$.

Интеграл в формуле (2.1) для $q_{R\nu}$ разобьем на два с областями интегрирования Ω_1 и Ω_2 , включающими в себя направления, идущие от поверхности клина и скачка уплотнения соответственно. Пусть ω есть угол, отсчитываемый от вертикали, опущенной из точки (x, y) на плоскость $y = 0$. Тогда $l^* = y / \cos \omega$ и $d\Omega_1 = 2\pi \sin \omega d\omega$. Введем обозначения

$$E_n^*(s, \zeta) = \int_1^s e^{-\zeta s \frac{ds}{s^n}}, \quad F(\Omega_i) = \int_{\Omega_i} e^{-K_\nu l^*} d\Omega \quad \left(s = \frac{1}{\cos \omega} \right)$$

К функциям $E_n(\zeta) = E_n^*(\infty, \zeta)$ сводится обычно задача об одномерном переносе излучения. Функции E_2, E_3 приведены на фиг. 1.

Легко видеть, что

$$F(\Omega_1) \rightarrow 2\pi E_2(K_\nu y) \quad \text{при } \Omega_1 \rightarrow 2\pi, \quad F(4\pi - \Omega_1 - \Omega_2) = 0$$

Тогда очевидно неравенство:

$$2\pi E_2(K_\nu y) \geq F(\Omega_1) \geq \pi [E_2(K_\nu y) + E_2^*(s_1, K_\nu y)] \quad (2.4)$$

$$\left(s_1 = \frac{1}{\cos \omega_1} \cdot \operatorname{tg} \omega_1 = \frac{x}{y}, \quad s_1 \geq \frac{1}{\sin \theta_0} \right)$$

При $\theta_0 \ll 1$ относительная разность крайних членов (2.4) мала, что следует из неравенства

$$\frac{E_2(K_\nu y) - E_2^*(s_1, K_\nu y)}{2E_2(K_\nu y)} \leq \frac{1}{2} \left(\int_{s_1}^\infty \frac{ds}{s^2} \right) : \left(\int_1^{s_1} \frac{ds}{s^2} \right) = \frac{1}{2(s_1 - 1)} \ll 1$$

Вследствие этого можно принять $F(\Omega_1) = 2\pi E_2(K_\nu y)$. Обозначая через $h = x \sin \theta_0 - y \cos \theta_0$ расстояние точки до поверхности скачка и проводя для области Ω_2 рассуждения, аналогичные предыдущему, получим согласно (2.1) формулу:

$$q_\nu = \frac{\alpha_\nu}{4\alpha_1} [(P_{\nu w} - P_\nu) E_2(K_\nu y) + (P_{\nu 0} - P_\nu) E_2(K_\nu h)] \quad (2.5)$$

$$\left(q_\nu = \frac{L q_{R\nu}}{\beta_0 U^3}, \quad \alpha_1 = \int_0^\infty \alpha_\nu P_\nu d\nu, \quad B_0 = \int_0^\infty B_\nu d\nu, \quad P_\nu = \frac{B_\nu}{B_0}, \quad P_{\nu 0} = \frac{I_{\nu 0}}{B_0}, \quad P_{\nu w} = \frac{B_{\nu w}}{B_0} \right).$$

Интегрируя по частотам, будем иметь

$$q = -\frac{1}{4} J_1^*(y) - \frac{1}{4} J_1^*(h) \quad (2.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_1^*(y) &= J_1(y) - J_{1w}(y), & J_1^*(h) &= J_1(h) - J_{10}(h) \\ J_1 &= \frac{1}{\alpha_1} \int_0^\infty \alpha_\nu P_\nu E_2(K_\nu \zeta) d\nu, & J_{1w} &= \frac{1}{\alpha_1} \int_0^\infty \alpha_\nu P_{\nu w} E_2(K_\nu \zeta) d\nu \\ J_{10} &= \frac{1}{\alpha_1} \int_0^\infty \alpha_\nu P_{\nu 0} E_2(K_\nu \zeta) d\zeta \end{aligned}$$

В тех случаях, когда температура набегающего потока и температура поверхности тела малы по сравнению с температурой за скачком уплотнения, величинами J_{1w} и J_{10} можно пренебречь по сравнению с J_1 и, следовательно, $q < 0$.

3. Решение системы (1.3) с учетом (2.6) будем искать в виде

$$p_1 = \frac{u_0}{4i\rho} (\bar{p}^{(1)} + p^{(2)}), \quad v_1 = \frac{u_0}{4i\rho} (v^{(1)} + v^{(2)})$$

Здесь частные решения $p^{(1)}$, $v^{(1)}$ и $p^{(2)}$, $v^{(2)}$ обусловлены наличием в формуле (2.6) слагаемых $J_1^*(y)$ и $J_1^*(h)$ соответственно. Функция $p^{(1)}$ и функция $v^{(1)}$, удовлетворяющая условию $v^{(1)} = 0$ при $y = 0$, имеют вид

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= f_1(x - my) - f_2(x + my) + \frac{1}{\rho_0 u_0} J_2^*(y) \left(m^2 = M^2 - 1, J_2^*(\zeta) = \int_0^\zeta J_1^*(\xi) d\xi \right) \\ p^{(1)} &= \frac{u_0 \rho_0}{m} [f_1(x - my) + f_1(x + my)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для определения функции f_1 из первого условия (1.9) получим известное [5] функциональное уравнение

$$\begin{aligned} f_1(\zeta) + \lambda_1 f_1(\lambda_2 \zeta) &= C_1 J_2^*(\zeta_1) \\ \left(\lambda_1 = \frac{u_0 \rho_0 - \gamma m}{u_0 \rho_0 + \gamma m}, \lambda_2 = \frac{1 - m \operatorname{tg} \theta_0}{1 + m \operatorname{tg} \theta_0}, \zeta_1 = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{1 + m \operatorname{tg} \theta_0} \zeta, C_1 = \frac{\gamma m}{\rho_0 u_0 (u_0 \rho_0 + \gamma m)} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение этого уравнения формально можно записать в виде ряда¹

$$f_1(\zeta) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_1)^n J_2^*(\lambda_2^n \zeta_1) \quad (3.3)$$

Постоянные λ_1 и λ_2 всегда меньше единицы по модулю. Очевидно также, что функции J_1^* и J_2^* ограничены. Следовательно, ряд (3.3) сходится равномерно вместе со своей производной по ζ , и определяемая этим рядом функция $f_1(\zeta)$ удовлетворяет уравнению (3.2) и однородной системе (1.3).

Заметим, что при гиперзвуковых скоростях величина $\lambda_1 > 0$. Это означает, что в отличие от случая, рассмотренного в работе [5], возмущения при отражении от скачка уплотнения меняют знак на обратный.

Функции $p^{(2)}$ и $v^{(2)}$, удовлетворяющие условию (1.9) при $y = \theta_0 x$, имеют вид:

$$\begin{aligned} v^{(2)} &= f_2(x - my) + \lambda_1 f_2[\lambda_2(x + my)] - C_2 J_2^*(h) \\ p^{(2)} &= \frac{u_0 \rho_0}{m} \{f_2(x - my) - \lambda_1 f_2[\lambda_2(x + my)]\} - C_3 J_2^*(h) \\ \left(C_2 = \frac{1}{\rho_0 u_0 (1 - m^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0) \cos \theta_0}, C_3 = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{(1 - m^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0) \cos \theta_0} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

¹ Очевидно, что однородное уравнение (3.2) имеет в данном случае лишь тривиальное решение, так как отличие его от нуля означало бы наличие каких-то начальных возмущений в окрестности $x \simeq 0$ помимо влияния излучения.

Потаяв $v^{(2)} = 0$ при $y = 0$, получим для определения функции f_2 уравнение (3.2) и, следовательно, ряд (3.3), в которых постоянная C_1 заменена на ζ_1 и $\zeta_2 = \zeta \sin \theta_0$. Подставляя (2.6) в (1.5), будем иметь

$$(3.5) \quad f_2 = -\frac{1}{4} \frac{z z_0}{x - x_0} f_1^*(y) - \frac{z z_0 \sin \theta_0}{4} f_2^*(y)$$

Далее из условия (1.8) можно найти ϕ_1 , а затем по (1.5), (1.7) и (1.8) — все остальные искомые величины.

Примем для определенности, что функции $f_1^*(\zeta)$ положительны во всей рассматриваемой области. Тогда функции $f_2^*(\zeta)$ — возрастающие, а $f_1(\zeta)$ и, следовательно, $p^{(1)}$ — положительные. Поведение функций $f_j(\zeta)$ определяется поведением функции

$$\phi(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_1)^n \int_{\lambda_2 \eta}^0 E_2(\eta) d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_1)^n \left[\frac{1}{2} - E_3(\lambda_2 \eta) \right] \quad (\eta = K, \zeta_j)$$

Из фиг. 1, где приведены кривые $\phi(\eta)$ для некоторых λ_1 и λ_2 , следует, что функция $\phi(\eta)$, а вместе с ней и $f_j(\zeta)$, монотонно убывает с

ростом λ_1 и λ_2 .

Рассмотрим разность

$$\frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1} - k \frac{1 + \lambda_2}{1 - \lambda_2} =$$

$$= \frac{m}{n} (\gamma - k p_0 u_0 \operatorname{tg} \theta_0) \quad (3.6)$$

Из (1.8) при $i^0 = 0$ и из

условия сохранения расхода

через ударный слой следует

$$\gamma - k p_0 u_0 \operatorname{tg} \theta_0 =$$

$$= \frac{2 \sin \phi_0 \cos \phi_0}{\cos(\theta_0 + \phi_0)} - k \frac{\sin \phi_0}{\cos \theta_0} =$$

$$= 2 \frac{\sin \phi_0}{\cos \theta_0} \left[\frac{\sin \theta_0 \sin \phi_0}{2 - k} + \frac{\cos(\theta_0 + \phi_0)}{2} \right]$$

Выражение в квадратных

скобках положительно

при $k \leq 2$.

Следовательно, полагая $k = 2$, из (3.6) будем иметь

$$\lambda_2 > \lambda_0 =$$

$$= \lambda_1 + \frac{k + 1 + (k - 1) \lambda_1}{(k - 1)(1 - \lambda_2)}$$

$$= \lambda_1 + \frac{1 - \lambda_2}{3 + \lambda_1}$$

Заметим, что члены в фигурных скобках формулы (1.8), содержащие $1/p_0$ и обычно малы. Следовательно, учет этих чле-

нов не может существенно изменить полученного вывода, и в худшем случае лишь несколько уменьшит величины k и λ_0 .

Кривые $\phi(\eta)$ на фиг. 1 имеют максимум, величина которого убывает с ростом λ_2 и становится неравной нулю при $\lambda_2 \leq \lambda_0$. Таким образом, функцию $\phi(\eta)$, а вместе с ней и $f_j(\zeta)$, при указанных ограничениях можно считать всюду монотонно возрастающей. Учитывая в дополнение к изложенному очевидные соотношения

$$(x - my) \geq \lambda_2(x + my), \quad (x - my) \sin \theta_0 \geq h, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_1)^n = \frac{1}{1 + \lambda_1}$$

легко убедиться в справедливости неравенства

$$\begin{aligned} \frac{mC_2}{u_0\rho_0} p^{(2)} &= f_2(x-my) - \lambda_1 f_2[\lambda_2(x+my)] - \sin\theta_0 J_2^* h \geq \\ &\geq J_2^* [(x-my)\sin\theta_0] \left(\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1} - m\sin\theta_0 \right) > 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

При этом знак равенства между средними членами (3.7) достигается при любых λ_1 и λ_2 при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, показано, что

$$p^{(1)} > 0, \quad p^{(2)} > 0, \quad p_1 = \frac{u_0}{4i_\rho} (p^{(1)} + p^{(2)}) < 0$$

Следовательно, потеря энергии за счет излучения, или высвечивание, приводит к уменьшению давления, уменьшению наклона скачка уплотнения и, согласно (3.5), к уменьшению полной энтальпии газа.

Если средняя оптическая толщина ударного слоя много меньше пути пробега излучения¹, то, пренебрегая излучением поверхности клина и набегающего потока, можно положить $J_1^*(y) \approx J_2^*(h) \approx 1$, $q \approx -1/2$, и решение задачи будет иметь вид

$$p_1 = \frac{\gamma u_0 \rho_i \operatorname{tg} \theta_0}{2(u_0 \rho_0 + \gamma m^2 \operatorname{tg} \theta_0)} x, \quad i_{12} = -\frac{1}{2u_0} \left(x - \frac{y}{\operatorname{tg} \theta_0} \right) \quad (3.8)$$

Остальные искомые функции будут, очевидно, также линейными.

Все искомые функции обращаются в нуль при $x = 0$ и, кроме i_{12} и ρ_{12} , ограничены при $x \rightarrow \infty$. Функции i_{12} и ρ_{12} неограничены при $x \rightarrow \infty$ при больших значениях y . Это свидетельствует о том, что для достаточно больших тел влияние излучения будет существенно даже при малых β_0 . Действительно, при большой средней оптической толщине ударного слоя пристеночный слой газа будет экранирован от внешней среды, но лучистый теплообмен его с поверхностью тела будет продолжаться, пока газ в пристеночном слое не примет температуру поверхности.

Из структуры полученного решения видно, что влияние излучения, за исключением изменения полной энтальпии i_{12} , пропорционально величине $\rho_i = 1/i_\rho$ — уплотнения газа, вследствие охлаждения при постоянном давлении. Это обстоятельство непосредственно вытекает из механизма влияния излучения на движение газа, который заключается в следующем. Газ, двигаясь вдоль линий тока, охлаждается, вследствие чего плотность его увеличивается на величину $\beta_0 \rho_{12} = \beta_0 \rho_i i_{12}$.

Это внутреннее сжатие газа генерирует волны разрежения, которые взаимодействуют с поверхностью тела и скачком уплотнения, чем и обусловлено появление адиабатической составляющей решения. Так как даже при бесконечном уплотнении газа угол скачка уплотнения не может уменьшиться более, чем на малую величину θ_0 , то давление и другие связанные с углом наклона скачка величины не могут существенно измениться даже при значительном охлаждении газа. В линейной постановке задачи это обстоятельство находит отражение в ограниченности всех величин, кроме i_{12} и ρ_{12} . Численный анализ формул (3.8) показывает, что даже при малых x относительное изменение полной энтальпии $2\beta_0 i_{12}$ для тупых клиньев в несколько раз больше относительного изменения давления $\beta_0 \rho_1 / \rho_0$.

Таким образом, можно считать, что основное влияние излучения на движение газа выражается в охлаждении и уплотнении газа (нагревании и расширении в случае положительной величины q) без существенного изменения давления и скорости.

4. Рассмотрим случай, когда степень черноты поверхности клина $\varepsilon < 1$. Примем, что интенсивность отраженных от поверхности лучей не зависит от направления. Поток лучистой энергии H , от излучающе-

¹ Так как для различных частот величины K_ν могут иметь самые различные порядки, то путь пробега излучения естественно определить как минимальную величину $L\delta$, при которой можно принять $J_1(\delta) \approx 0$. Эта величина $L\delta$ является характерным масштабом для определения оптической толщины слоя.

го слоя в точку поверхности x' равен [4].

$$H_v = \int_{2\pi} I_{vl} \cos(l, y) d\Omega$$

Отсюда, учитывая (2.3) и полагая для простоты $\bar{I}_{v0} = 0$, $B_{vw} = 0$, будем иметь

$$H_v = \pi B_v [1 - 2E_3(K_v x' \sin \theta_0)]$$

$$I_{vw}(x') = \frac{1}{\pi} (1 - \varepsilon) H_v = (1 - \varepsilon) B_v [1 - 2E_3(K_v x' \sin \theta_0)] \quad (4.1)$$

Луч, выходящий из точки (x, y) под углом ω с перпендикуляром к поверхности клина в плоскости, составляющей с осью x угол ψ , пересечет поверхность клина в точке $x' = x + y \cos \psi \operatorname{tg} \omega$. Функция E_3 в (4.1) теряет смысл при $x' < 0$, поэтому при вычислении соответствующего интеграла в формуле (2.4) для q нельзя подобно п. 2 заменить отражающую поверхность клина неограниченной плоскостью. Вместо этого воспользуемся тем, что при $\theta_0 \ll 1$ можно пренебречь влиянием той части поверхности клина, которая лежит вне круга радиуса x с центром в точке $(x, 0)$. Тогда, проводя рассуждения, аналогичные п. 2, в том же приближении, получим формулу

$$q = -\frac{1}{4} [\varepsilon J_1(y) + J_1(h) + (1 - \varepsilon) J_3(x, y)] \quad (4.2)$$

Здесь

$$J_3(x, y) = \frac{2}{\alpha_1} \int_0^\infty \alpha_v P_v \int_0^{s_1} e^{-K_v y s} \int_0^\infty e^{-K_v x t \sin \theta_0} Z(K_v y t \sqrt{s^2 - 1} \sin \theta_0) \frac{dt}{t^3} \frac{ds}{s^2} dv$$

$$s_1 = \sec \arctg \frac{x}{y} \quad Z(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-Z \cos \psi} d\psi$$

Легко убедиться, что функция $Z(z)$ удовлетворяет уравнению

$$(zZ')' - zZ = 0 \quad (Z(0) = 1, Z'(0) = 0)$$

и является функцией Бесселя от мнимого аргумента $Z = Z_0(iz)$.

Таким образом, нахождение величины i_{12} сводится к вычислению квадратур от известных функций. В случае малой оптической толщины ударного слоя будем иметь $J_1 \simeq J_3 \simeq 1$. Следовательно, в этом случае степень черноты не будет влиять на движение газа. В общем случае, так как $J_1(y) \geq J_3(x, y)$, с уменьшением ε величина q уменьшается по абсолютной величине, и, следовательно, уменьшается влияние излучения.

В наиболее интересном случае $y = 0$ формула (4.2) существенно упрощается, и определение величины i_{12} сводится к вычислению простого интеграла.

Поступила
16 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. З е л ь д о в и ч Я. Б., Р а й з е р Ю. П. Ударные волны большой амплитуды в газах. Успехи физ. наук, 1957, т. XIII, № 3.
2. Р а й з е р Ю. П. О структуре фронта сильных ударных волн. ЖЭТФ, 1957, т. 32, № 6.
3. П р е д в о д и т е л е в А. С. и др. Таблицы термодинамических функций воздуха. Изд-во АН СССР, М., 1957.
4. К у з н е ц о в Е. С. Лучистый теплообмен в движущейся среде. Изв. АН СССР. Серия геогр. и геофиз., 1941, № 1.
5. B o a T e h C h u. On weak interaction of strong shock and Mach waves, generated downstream of the shock IAS, 1952, № 7.