

УДК 519.6

Кусочно-линейная реконструкция переменных, уменьшающая диссипацию метода HLL при решении уравнений газодинамики*

И.М. Куликов

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: kulikov@ssd.sccc.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 15, 2022.

Куликов И.М. Кусочно-линейная реконструкция переменных, уменьшающая диссипацию метода HLL при решении уравнений газодинамики // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 2. — С. 141–156.

В статье изложена одна конструкция оригинального метода HLL с использованием кусочно-линейного представления физических переменных. Полученный численный метод позволяет воспроизводить профили плотности, давления и скорости с малой диссипацией на разрывах. Для верификации метода использовались задачи о распаде разрыва с различными конфигурациями ударных волн, контактного разрыва и волн разрежения, которые имеют аналитическое решение. На задаче типа Сода был исследован порядок точности разработанного численного метода, а также было показано, что основное падение порядка точности происходит при воспроизведении волны разрежения. Верификация численного метода в трехмерной постановке была произведена на задаче Седова о точечном взрыве и на задаче о взрыве сверхновой типа Ia с двумя симметричными точками поджига, приводящих к формированию остатка типа G1.9+0.3.

DOI: 10.15372/SJNM20220204

Ключевые слова: математическое моделирование, вычислительная астрофизика, метод HLL.

Kulikov I.M. Using piecewise-linear reconstruction to constructing a low-dissipation HLL method for numerical solution of hydrodynamics equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 2. — P. 141–156.

In this paper, one construction of the original “Harten-Lax-van Leer” method using a piecewise-linear reconstruction of physical variables is described. The obtained numerical method makes possible to reproduce a low-dissipation solution at discontinuities. To verify the method, we used the classical problems with an analytical solution based on various configurations of shock waves, contact discontinuities, and rarefaction waves. On the Sod-like problem, the order of accuracy of the developed numerical method was studied, it was shown that the main suppression of the order of accuracy occurs when the rarefaction wave is reproduced. The numerical method was verified by means of a three-dimensional Sedov test of a point explosion, and on the problem of a supernova Ia type explosion with two symmetric ignition points, leading to the formation of a G1.9+0.3 like remnant.

Keywords: numerical modeling, computational astrophysics, HLL solver.

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00044).

1. Введение

В настоящее время оригинальный метод Годунова [1] активно развивается в сторону использования приближенных решений задачи Римана [2]. Среди многих подходов исследователи отдают предпочтение методам типа HLL [3], как достаточно простому робастному консервативному и эффективному численному методу решения уравнений гидродинамики без необходимости нахождения полного спектра матрицы Якоби [4]. В основе оригинального HLL-метода лежит использование левых и правых характеристик, что является обобщением метода Рusanова [5], где используется только характеристика с максимальным наклоном и ее зеркальное отражение. С момента создания оригинального HLL-метода было разработано множество модификаций: HLLC [6], в котором учтены крайние характеристики; HLLEM [7], где учтены области с разреженным газом; HLLC [8], где учтено поведение контактного разрыва, и метод HLL-CPS [9], в котором построена робастная процедура воспроизведения контактного разрыва; HLLS [10], который позволяет воспроизводить сильные ударные волны; HLLI [11], в котором учтена эволюция поперечных волн, и HLLD [12], где разрешена проблема разрывов, в более сложных математических моделях.

Несомненным преимуществом HLL-методов является отсутствие карбункул-эффектов [13, 14]. В связи с этим с помощью комбинации методов типа HLL с другими решателями на основе полного спектрального разложения, например методом Roe [15], были разработаны схемы, позволяющие избежать подобных феноменов [16–18]. Важным преимуществом методов типа HLL является возможность их эффективной векторизации с использованием низкоуровневых средств параллельного программирования [19–22]. Основным же недостатком методов типа HLL является их значительная диссипация. Разумеется, был разработан ряд подходов для уменьшения диссипации методов, такие как введение весов для определения потоков [23], контроль диссипации на волнах [24], искусственная вязкость [25, 26]. Отдельно стоит выделить локальную кусочно-линейную [27], WENO [28] и кусочно-полиномиальную [29] реконструкции. В настоящей статье предлагается одна оригинальная конструкция HLL-метода с малой диссипацией на разрывах на основе использования кусочно-линейного представления физических переменных.

Во втором пункте подробно описана конструкция численного метода. Третий пункт посвящен верификации численного метода на задачах о распаде разрыва. Так как численный метод ориентирован на описание астрофизических процессов, то в качестве тестовой была также рассмотрена задача об истечении плотного газа в разреженный. На этой задаче, как и на задаче о разлете газа в разные стороны, было показано образование энтропийного следа, образуемого в областях сильного разрежения, который в то же время не влияет на общую картину течения. В четвертом пункте исследован порядок точности представленной схемы на задаче с волной разрежения, контактным разрывом и ударной волной, в том числе исследован порядок точности на каждой компоненте решения. Пятый пункт посвящен использованию построенной схемы на задаче Sedova о точечном взрыве и на астрофизическом приложении — взрыве сверхновой типа Ia с множественным подрывом. В шестом пункте мы поднимем некоторые дискуссионные вопросы, касающиеся разработанного численного метода. В седьмом пункте сформулировано заключение.

2. Описание численного метода

Рассмотрим уравнения идеальной гидродинамики, записанные для консервативных переменных, в векторной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{M} \\ E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \vec{u} \\ \vec{M} \otimes \vec{u} + p \\ (E + p)\vec{u} \end{pmatrix} = 0, \quad (1)$$

где ρ — плотность, \vec{u} — вектор скорости, $\vec{M} = \rho \vec{u}$ — момент импульса, p — давление, γ — показатель адиабаты, скорость звука определяется уравнением

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}},$$

а полная энергия записывается в виде

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho u^2}{2}.$$

Уравнения (1) перепишем в форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F = 0, \quad (2)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{M} \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho \vec{u} \\ \vec{M} \otimes \vec{u} + p \\ (E + p)\vec{u} \end{pmatrix}.$$

Запишем численную схему для уравнений (2) в одномерной постановке. Для этого в расчетной области введем равномерную сетку с пространственным шагом h . Шаг по времени τ мы будем вычислять из условия Куранта

$$\frac{\tau \times (c + \max |u|)}{h} = \text{CFL} < 1, \quad (3)$$

где CFL — число Куранта. Консервативные U и физические (ρ, u, p) переменные определим в ячейках с полуцелыми индексами, а потоки F — в узлах с целыми индексами. Метод Годунова для уравнений (2) записывается в виде

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{\tau} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{h} = 0. \quad (4)$$

Схема HLL для интерфейса с номером i в терминах правой (R) и левой (L) ячеек записывается как

$$F^{\text{HLL}} = \frac{\lambda_R F_L - \lambda_L F_R + \lambda_R \lambda_L (U_R - U_L)}{\lambda_R - \lambda_L}, \quad (5)$$

где

$$\lambda_R = \max(u_R + c_R, 0), \quad \lambda_L = \min(u_L - c_L, 0).$$

Для учета случая $\lambda_L = \lambda_R = 0$ перепишем уравнение (5) в виде

$$F^{\text{HLL}} = \frac{F_L + F_R}{2} + \frac{\lambda_R}{2(\lambda_R - \lambda_L)} (F_L - F_R) - \frac{\lambda_L \lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} (U_L - U_R)$$

и рассмотрим предел при $\lambda_L \rightarrow 0^-$ и $\lambda_R \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{\lambda_L \rightarrow 0^-, \lambda_R \rightarrow 0^+} \frac{F_L + F_R}{2} + \frac{\lambda_R + \lambda_L}{2(\lambda_R - \lambda_L)} (F_L - F_R) - \frac{\lambda_L \lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} (U_L - U_R) = \frac{F_L + F_R}{2}.$$

В такой форме и будет использован HLL-метод.

Для уменьшения диссипации численного метода мы используем кусочно-линейную реконструкцию для физических переменных (ρ, u, p) . Для определенности будем конструировать кусочно-линейную функцию физического параметра $q(x)$ на регулярной сетке с шагом h на интервале $[x_i, x_{i+1}]$. В общем виде линейная функция может быть записана как

$$q_{i+1/2}(x) = k_{i+1/2}\xi + b_{i+1/2}, \quad (6)$$

где $k_{i+1/2}$ определяется по формуле

$$k_{i+1/2} = \frac{1}{h} \text{minmod} \left(q_{i-1/2}^n, q_{i+1/2}^n, q_{i+3/2}^n \right),$$

где

$$\text{minmod}(a, b, c) = \min \left(\max(b - a), \max(c - b) \right) + \max \left(\min(b - a), \max(c - b) \right),$$

а свободный коэффициент определяется из интегрального закона сохранения величины q :

$$b_{i+1/2} = q_{i+1/2} - \frac{k_{i+1/2}h}{2}. \quad (7)$$

В этом случае левые и правые значения физических переменных определяются следующим образом:

$$q(-|\lambda|\tau) = q_{i+1/2} + \frac{k_{i+1/2}}{2} (h - |\lambda|\tau), \quad (8)$$

$$q(|\lambda|\tau) = q_{i+1/2} - \frac{k_{i+1/2}}{2} (h - |\lambda|\tau), \quad (9)$$

где λ — наклон соответствующей характеристики. Схема HLL (5) изменяется на

$$F^{\text{HLL}} = \frac{\lambda_R F_L(\lambda_L \tau) - \lambda_L F_R(\lambda_R \tau) + \lambda_R \lambda_L (U_R(\lambda_R \tau) - U_L(\lambda_L \tau))}{\lambda_R - \lambda_L}, \quad (10)$$

где

$$U(\xi) = \begin{pmatrix} \rho(\xi) \\ \rho(\xi)u(\xi) \\ E(\xi) \end{pmatrix}, \quad F(\xi) = \begin{pmatrix} \rho(\xi)u(\xi) \\ \rho(\xi)u^2(\xi) + p(\xi) \\ \left(\frac{p(\xi)}{\gamma - 1} + \frac{\rho(\xi)u^2(\xi)}{2} + p(\xi) \right) u(\xi) \end{pmatrix}.$$

С помощью последней формулы и реализуется вычисление потоков в методе Годунова. Расширение на многомерный случай происходит естественным образом.

3. Верификация численного метода

Для верификации численного метода в одномерной постановке мы рассмотрим пять задач о распаде произвольного разрыва, допускающих аналитическое решение [30]. Начальные состояния для задач приведены в таблице 1, где x_0 — начальная позиция разделителя между двумя соседними состояниями, а индексами L и R обозначены физические величины слева и справа от разделителя соответственно.

Таблица 1. Начальные состояния задач о распаде разрыва

Тест	ρ_L	v_L	p_L	ρ_R	v_R	p_R	x_0	t
1	2	0	2	1	0	1	0.5	0.2
2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.5	0.15
3	1	0	1000	1	0	0.01	0.5	0.012
4	5.99924	19.5975	460.894	5.99242	-6.19633	46.095	0.4	0.035
5	1	0	1	0.001	0	0.001	0.5	0.3

В первой задаче проверяется возможность численного метода корректно воспроизводить ударную волну, контактный разрыв и волну разрежения. Результаты моделирования приведены на рисунке 1. Для вычислительных экспериментов было использовано 100 расчетных ячеек.

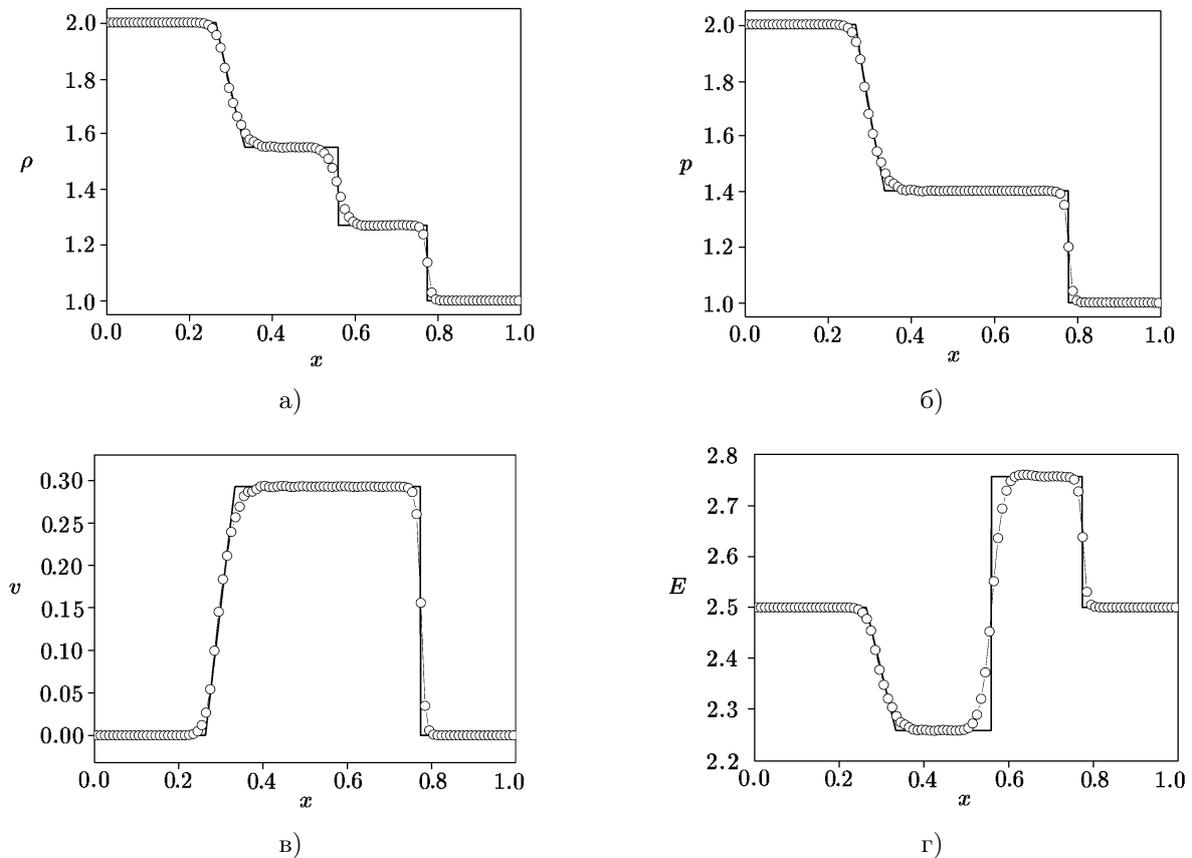


Рис. 1. Плотность (а), давление (б), скорость (в) и удельная энергия (г) в первой задаче о распаде разрыва. Численное решение обозначено кружочками, аналитическое сплошной линией

Из рис. 1 видно, что ударная волна воспроизведена корректно по положению и с малой диссипацией на три ячейки, две из которых отличаются не более чем на 10% от аналитического решения, поэтому фактически диссипация существенна только в одной ячейке. В то время как в исходном HLL-методе такая диссипация происходит на пять ячеек вместо одной. В области ударной волны не наблюдается сколь-либо заметной осцилляции. Контактный разрыв и волна разрежения также корректно воспроизведены с малой диссипацией. Важно подчеркнуть отсутствие энтропийного следа на графиках скорости и давления в области контактного разрыва.

Во второй задаче проверяется возможность численного метода корректно моделировать область сильного разрежения при разлете газа в разные стороны. Результаты моделирования приведены на рис. 2. Для вычислительных экспериментов было использовано 100 расчетных ячеек.

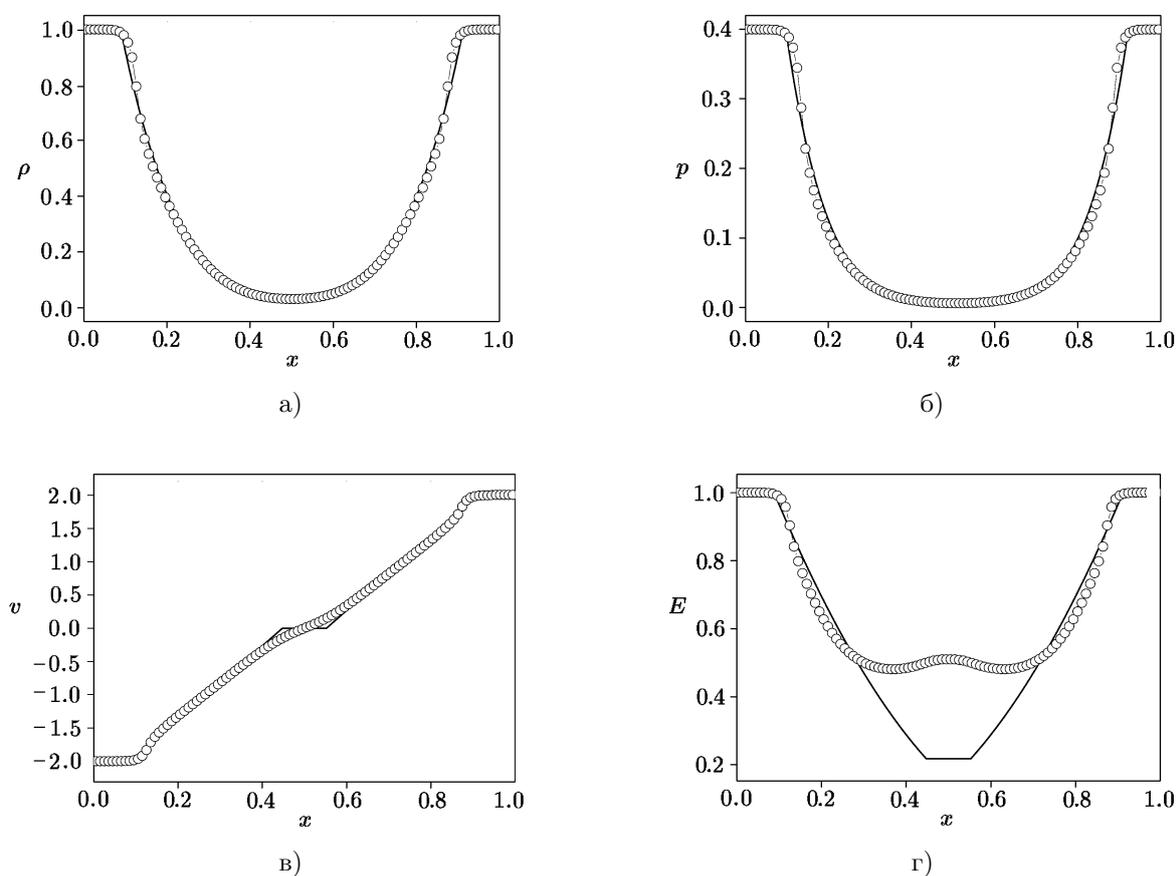


Рис. 2. Плотность (а), давление (б), скорость (в) и удельная энергия (г) во второй задаче о распаде разрыва. Численное решение обозначено кружочками, аналитическое сплошной линией

Из рис. 2 видно, что численный метод корректно воспроизводит графики плотности и давления, также с небольшим сглаживанием воспроизводится скорость. На графике удельной энергии имеет место сильный подъем величины, что характеризует энтропийный след. Отметим его монотонный характер. При использовании исходного HLL-метода такой энтропийный след сопоставим с начальной величиной удельной энергии.

В работе [31] при исследовании точности разрывного метода Галеркина [32] было сделано очень важное замечание, что основной причиной повышения точности численного решения задачи Эйнфельдта (вторая задача о распаде разрыва) является именно использование примитивных (физических) переменных. Пара переменных: плотность и давление — полностью определяет термодинамическое состояние сплошной среды. В отличие от случая консервативных переменных, где вместо давления используется полная энергия, примитивные переменные позволяют более точно аппроксимировать термодинамические свойства газа. При использовании полной энергии сложно обеспечить правильный баланс между внутренней и кинетической энергиями, из которых складывается полная энергия.

В третьей задаче проверяется устойчивость метода и его возможность моделировать сильные возмущения при сильном перепаде давления (5 десятичных порядков) с образованием быстро бегущих ударных волн. Результаты моделирования приведены на рис. 3. Для вычислительных экспериментов было использовано 100 расчетных ячеек.

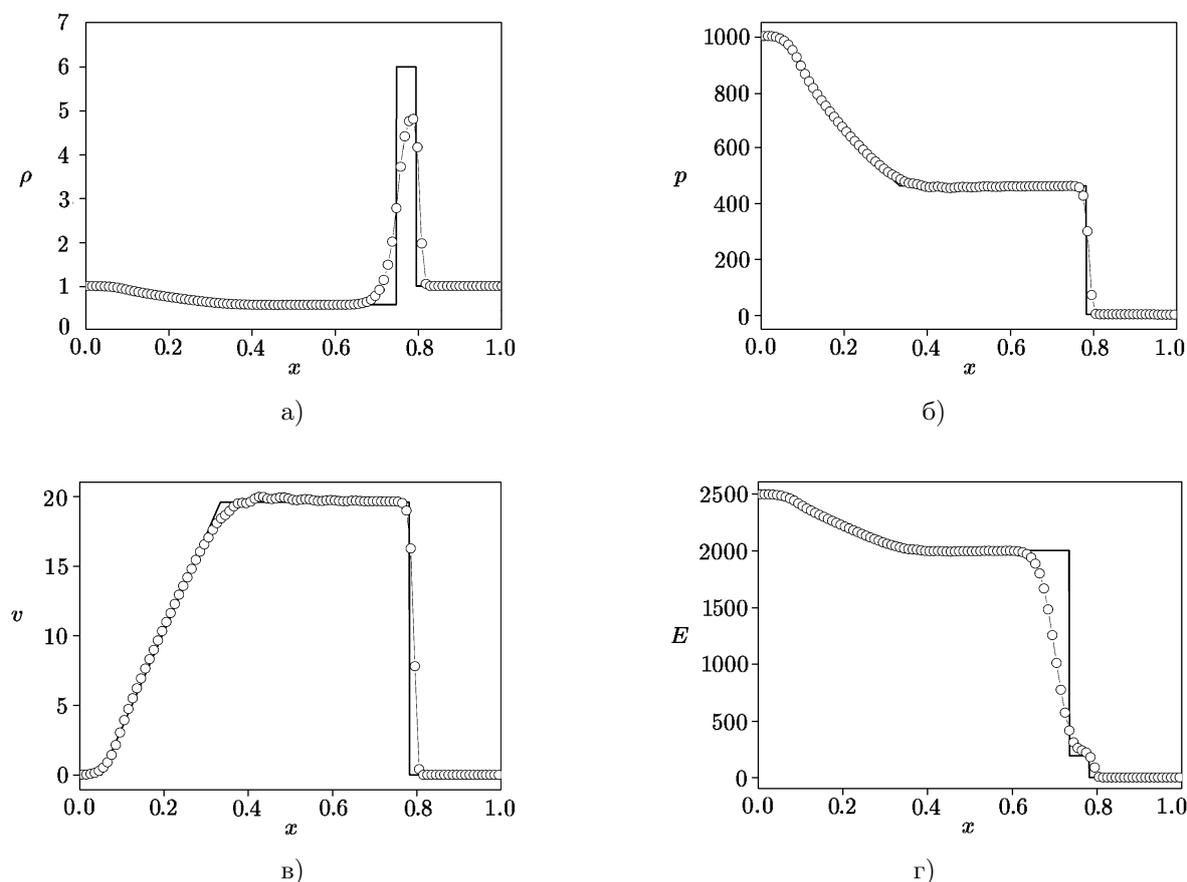


Рис. 3. Плотность (а), давление (б), скорость (в) и удельная энергия (г) в третьей задаче о распаде разрыва. Численное решение обозначено кружочками, аналитическое сплошной линией

Из рис. 3 видно, что численный метод корректно воспроизвел местоположение быстрой ударной волны. Имеет место диссипация на контактном разрыве, из-за чего происходит уменьшение амплитуды ударной волны. Также отметим, что на графике удельной внутренней энергии корректно воспроизводится ступенька-предшественник с малой ам-

плитудой. В то же время при использовании исходного метода HLL график удельной энергии фактически не имеет изменений выпуклости в области ступеньки-предшественника.

В четвертой задаче проверяется способность метода одновременно воспроизводить две ударные волны. Результаты моделирования приведены на рис. 4. Для вычислительных экспериментов было использовано 100 расчетных ячеек.

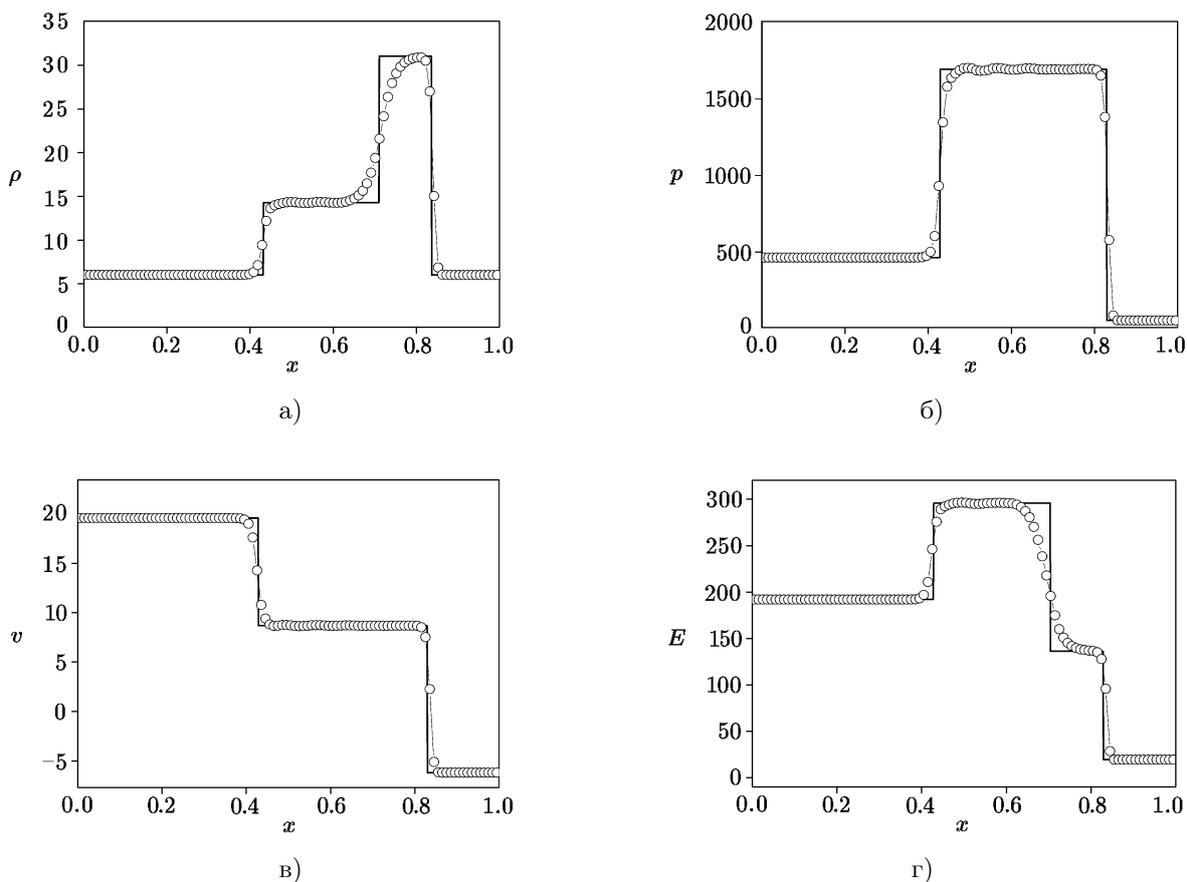


Рис. 4. Плотность (а), давление (б), скорость (в) и удельная энергия (г) в четвертой задаче о распаде разрыва. Численное решение обозначено кружочками, аналитическое сплошной линией

Из рис. 4 видно, что при различии амплитуд ударных волн в два раза их диссипация происходит на две ячейки. В то время как при использовании исходного HLL-метода такая диссипация происходит на шесть ячеек вместо двух. Отметим корректность воспроизведения амплитуды ударных волн даже при диссипации численного решения на контактном разрыве, что имело место в предыдущей задаче.

В пятом тесте проверяется возможность численного метода корректно воспроизводить ударную волну, контактный разрыв и волну разрежения при взаимодействии плотного и разреженного газов. Результаты моделирования приведены на рис. 5. Для вычислительных экспериментов было использовано 100 расчетных ячеек.

Из рис. 5 видно, что на графиках скорости и удельной внутренней энергии имеет место энтропийный след. В то же время плотность и давление воспроизведены достаточно корректно, хотя и с диссипацией на ударной волне в плотности.

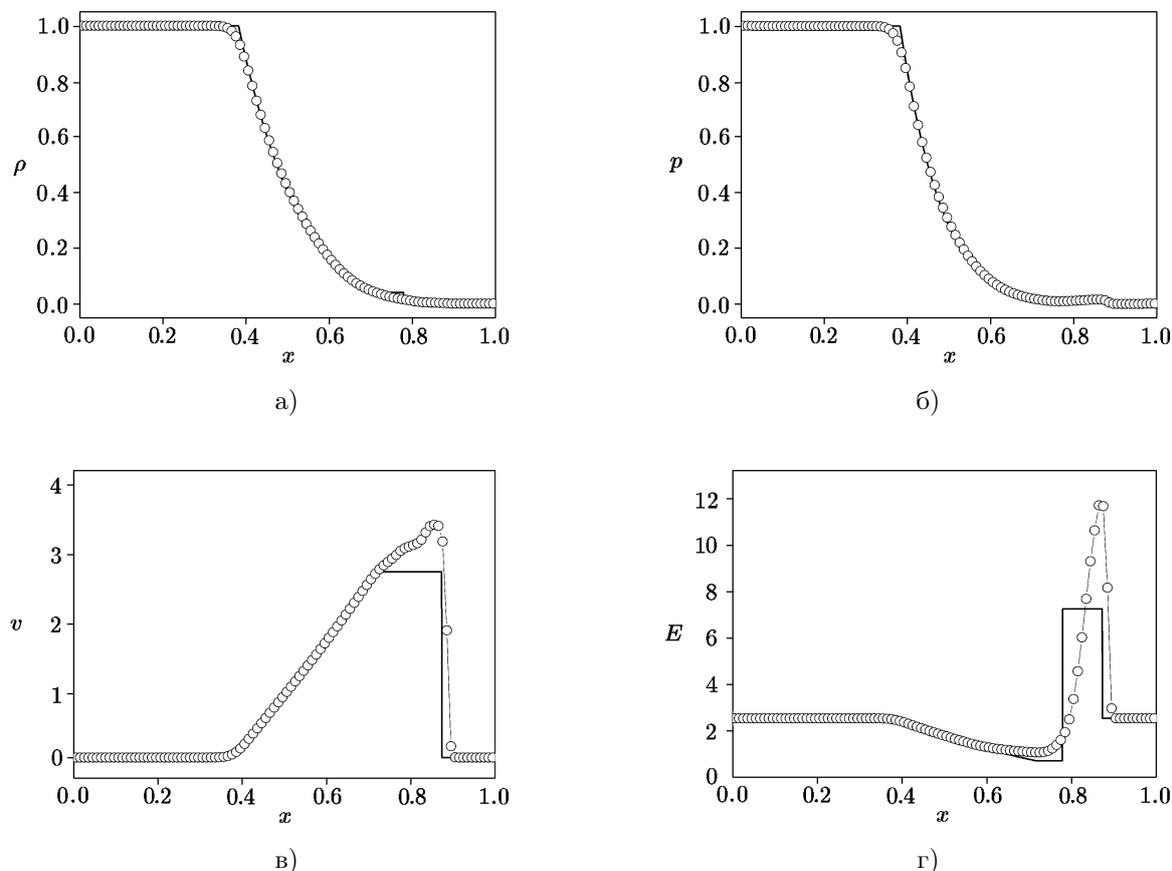


Рис. 5. Плотность (а), давление (б), скорость (в) и удельная энергия (г) в пятой задаче о распаде разрыва. Численное решение обозначено кружочками, аналитическое сплошной линией

4. Исследование порядка сходимости

Для оценки сходимости численного метода на первой задаче о распаде разрыва мы будем исследовать поведение L_1 -нормы ошибки:

$$L_1 = \sum_i h |u_{i+1/2} - u(x_{i+1/2})|,$$

где $u(x_{i+1/2})$ — точное решение в точке $x_{i+1/2}$, $u_{i+1/2}$ — численное решение, h — шаг по пространству. Поведение нормы L_1 приведены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что для функций плотности и скорости сходимость падает почти до половинной, затем поднимается и выходит на порядок сходимости ~ 0.6 , на это же значение выходит поведение сходимости для функции давления, с той лишь разницей, что падение порядка сходимости спадает до ~ 0.4 . Аналогичное поведение порядка сходимости для разрывного решения имело место и для классической схемы Годунова. Мы проведем дополнительное исследование поведения порядка сходимости для функции плотности на различных компонентах течения газа: волна разрежения, контактный разрыв, ударная волна.

Поведение нормы L_1 для плотности приведены в табл. 3. Заметим, что основное падение порядка точности происходит на волне разрежения, в то время как ударная волна показывает порядок, чуть менее чем первый.

Таблица 2. Поведение L_1 -ошибки

Величина	Сетка	L_1 -ошибка	Порядок сходимости
Плотность	100	9.851210 e-03	—
	200	5.717905 e-03	0.784814
	400	3.963820 e-03	0.528595
	800	2.705459 e-03	0.551018
	1600	1.772816 e-03	0.609831
	3200	1.143708 e-03	0.632324
	6400	7.357147 e-04	0.636500
Давление	100	6.903850 e-03	—
	200	3.352745 e-03	1.042058
	400	2.432622 e-03	0.462831
	800	1.764196 e-03	0.463501
	1600	1.178776 e-03	0.581721
	3200	7.789606 e-04	0.597667
	6400	5.204041 e-04	0.581918
Скорость	100	4.327950 e-03	—
	200	1.985720 e-03	1.124022
	400	1.362512 e-03	0.543393
	800	9.431750 e-04	0.530672
	1600	6.129237 e-04	0.621818
	3200	4.004850 e-04	0.613959
	6400	2.636687 e-04	0.603022

Таблица 3. Поведение L_1 -ошибки для функции плотности

Величина	Сетка	L_1 -ошибка	Порядок сходимости
Плотность	100	9.851210 e-03	—
	200	5.717905 e-03	0.784814
	400	3.963820 e-03	0.528595
	800	2.705459 e-03	0.551018
	1600	1.772816 e-03	0.609831
	3200	1.143708 e-03	0.632324
	6400	7.357147 e-04	0.636500
Плотность на волне разрежения	100	2.794560 e-03	—
	200	1.596305 e-03	0.807885
	400	1.342915 e-03	0.249368
	800	1.045357 e-03	0.361372
	1600	7.620744 e-04	0.455992
	3200	5.134178 e-04	0.569799
	6400	3.474631 e-04	0.563274
Плотность на контактном разрыве	100	4.854430 e-03	—
	200	3.273980 e-03	0.568256
	400	2.168240 e-03	0.594521
	800	1.402431 e-03	0.628595
	1600	8.982800 e-04	0.642693
	3200	5.673653 e-04	0.662887
	6400	3.536111 e-04	0.682114
Плотность на ударной волне	100	2.202220 e-03	—
	200	8.476200 e-04	1.377469
	400	4.526650 e-04	0.904974
	800	2.576700 e-04	0.812919
	1600	1.124619 e-04	1.196088
	3200	6.292500 e-05	0.837731
	6400	3.464047 e-05	0.861175

5. Моделирование трехмерных течений газа

5.1. Задача Седова о точечном взрыве

Рассмотрим в области $[-0.5; 0.5]^3$ статичный газ с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$, начальной плотностью $\rho_0 = 1$ и начальным давлением $p_0 = 10^{-5}$. В момент времени $t = 0$ в центре области выделяется внутренняя энергия $E_0 = 0.6$. Область взрыва ограничена радиусом $r_0 = 0.01$. Для вычислительного эксперимента использовалась расчетная сетка 200^3 . Смоделированный профиль плотности на момент времени $t = 0.05$ изображен на рис. 6.

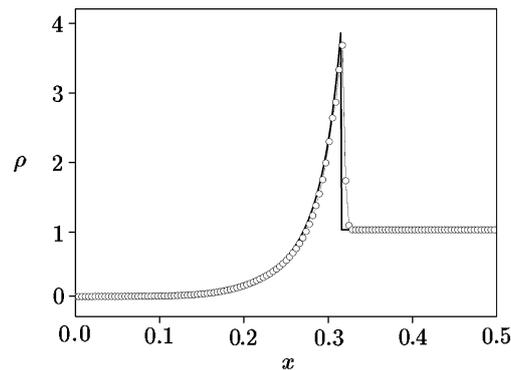


Рис. 6. Плотность при решении задачи Седова на момент времени $t = 0.05$

Задача Седова о точечном взрыве является стандартным тестом, проверяющим способность метода и его реализации воспроизводить сильные ударные волны с большими числами Маха. Скорость звука фоновой среды пренебрежимо мала, поэтому число Маха достигает потенциально бесконечных значений при бесконечно малом уменьшении радиуса взрыва. Оригинальный численный метод достаточно хорошо воспроизводит положение и амплитуду ударной волны.

5.2. Взрыв сверхновой типа Ia

В качестве модельной астрофизической задачи рассмотрим множественный подрыв белых карликов массы Чандрасекара в трехмерной постановке [33]. Математическая модель эволюции белых карликов основана на решении переопределенной системы уравнений гравитационной гидродинамики [27]. На удалении 200 км от центра карлика заданы две симметричные точки подрыва. На рис. 7 изображена изоповерхность плотности в момент времени $t = 5$ секунд.

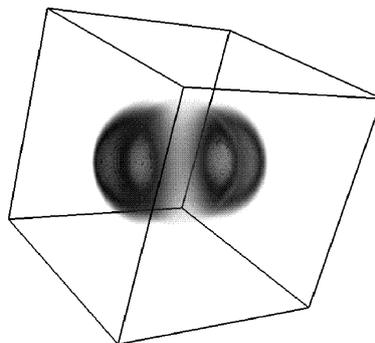


Рис. 7. Изоповерхность плотности при взрыве SNeIa

Из рис. 7 видно, что при двойном подрыве имеет место образование двух ударных волн, которые расходятся в разные стороны с образованием волны разрежения посередине. Такой остаток сверхновой качественно соответствует наблюдаемому объекту G1.9+0.3.

6. Дискуссия

В настоящем пункте отметим ограничения и преимущества построенного в работе численного метода:

1. Разработанный численный метод не свободен от энтропийных следов при воспроизведении областей сильного разрежения. Несмотря на это, в таких областях сохраняется монотонность решения, и энергетический вклад этих ошибок не существен. Тем не менее, при воспроизведении астрофизических объектов мы должны учитывать это свойство и вводить дополнительные подходы к его регуляризации.
2. Несомненным преимуществом разработанного метода является его простота. Метод прост как в части конструкции и реализации, так и в части расширения на многомерный случай. В оригинальный метод нам удалось достаточно органично вложить прозрачную процедуру реконструкции физических переменных, что сохранило простоту оригинального численного метода при малой диссипации решения. Также отметим робастность численного метода.
3. Очень часто высказывается мнение, что основной причиной падения порядка точности является сложность воспроизведения ударной волны. Однако проведенные вычислительные эксперименты показали, что основное падение порядка точности происходит на волне разрежения. Разумеется, необходимо комплексно исследовать порядок сходимости метода на множестве тестовых задач, хотя это тема отдельной статьи.
4. В современных процессорах значительный процент производительности достигается за счет использования низкоуровневой векторизации. Заметим, что конструкция метода позволяет использовать векторизацию на трех этапах: кусочно-линейная реконструкция физических переменных, вычисление HLL-потоков и схема Годунова.

Разумеется, все приведенные позиции не могут быть безапелляционными. Однако их необходимо озвучить при обсуждении конструкции численного метода.

7. Заключение

Предложена новая конструкция оригинального HLL-метода с использованием кусочно-линейного представления физических переменных. Полученный численный метод позволяет воспроизводить решение с малой диссипацией на разрывах. Метод был верифицирован на задачах о распаде произвольного разрыва и на задаче Седова о точечном взрыве. На модельной задаче о взрыве сверхновой типа Ia с двумя симметричными точками поджига было показано формирование остатка типа G1.9+0.3.

Литература

1. **Godunov S.K.** A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics // *Matematicheskii Sbornik*. — 1959. — Vol. 47. — P. 271–306.

2. **Balsara D.** Higher-order accurate space-time schemes for computational astrophysics — Part I: finite volume methods // *Living Reviews in Computational Astrophysics*. — 2017. — Vol. 3. — Article Number 2.
3. **Harten A., Lax P., van Leer B.** On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM Review*. — 1983. — Vol. 25. — P. 289–315.
4. **Simon S., Mandal J.C.** A cure for numerical shock instability in HLLC Riemann solver using antidiffusion control // *Computer & Fluids*. — 2018. — Vol. 174. — P. 144–166.
5. **Rusanov V.V.** The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 1961. — Vol. 1. — P. 267–279.
6. **Einfeldt B.** On Godunov-type methods for gas dynamics // *SIAM J. Numerical Analysis*. — 1988. — Vol. 25. — P. 294–318.
7. **Einfeldt B., Munz C.-D., Roe P., Sjogreen B.** On Godunov-type methods near low densities // *J. Computational Physics*. — 1991. — Vol. 92. — P. 273–295.
8. **Toro E., Spruce M., Speares W.** Restoration of the contact surface in the Harten–Lax–van Leer Riemann solver // *Shock Waves*. — 1994. — Vol. 4. — P. 25–34.
9. **Mandal J.C., Panwar V.** Robust HLL-type Riemann solver capable of resolving contact discontinuity // *Computer & Fluids*. — 2012. — Vol. 63. — P. 148–164.
10. **Xie W., Li W., Li H.** On numerical instabilities of Godunov-type schemes for strong shocks // *J. Computational Physics*. — 2017. — Vol. 350. — P. 607–637.
11. **Dumbser M., Balsara D.** A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems // *J. Computational Physics*. — 2016. — Vol. 304. — P. 275–319.
12. **Miyoshi T., Kusano K.** A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics // *J. Computational Physics*. — 2005. — Vol. 208. — P. 315–344.
13. **Pandolfi M., D’Ambrosio D.** Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the “carbuncle” phenomenon // *J. Computational Physics*. — 2000. — Vol. 166. — P. 271–301.
14. **Chauvat Y., Moschetta J.-M., Gressier J.** Shock wave numerical structure and the carbuncle phenomenon // *Intern. J. Numerical Methods in Fluids*. — 2005. — Vol. 47. — P. 903–909.
15. **Roe P.** Approximate Riemann solver, parameter vectors and difference schemes // *J. Computational Physics*. — 1981. — Vol. 43. — P. 357–372.
16. **Davis S.F.** A rotationally biased upwind difference scheme for the Euler equations // *J. Computational Physics*. — 1984. — Vol. 56. — P. 65–92.
17. **Levy D.W., Powell K.G., van Leer B.** Use of a rotated Riemann solver for the two-dimensional Euler equations // *J. Computational Physics*. — 1993. — Vol. 106. — P. 201–214.
18. **Nishikawa H., Kitamura K.** Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers // *J. Computational Physics*. — 2008. — Vol. 227. — P. 2560–2581.
19. **Kulikov I.M., Chernykh I.G., Glinskiy B.M., Protasov V.A.** An efficient optimization of HLL method for the second generation of Intel Xeon Phi processor // *Lobachevskii J. Mathematics*. — 2018. — Vol. 39, iss. 4. — P. 543–551.
20. **Kulikov I.M., Chernykh I.G., Tutukov A.V.** A new parallel Intel Xeon Phi hydrodynamics code for massively parallel supercomputers // *Lobachevskii J. Mathematics*. — 2018. — Vol. 39, iss. 9. — P. 1207–1216.
21. **Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A.** A new hydrodynamic code with explicit vectorization instructions optimizations that is dedicated to the numerical simulation of astrophysical gas flow. I. Numerical method, tests, and model problems // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 2019. — Vol. 243. — Article Number 4.

22. **Chernykh I., Kulikov I., Tutukov A.** Hydrogen–helium chemical and nuclear galaxy collision: hydrodynamic simulations on AVX-512 supercomputers // J. Computational and Applied Mathematics. — 2021. — Vol. 391. — Article Number 113395.
23. **Kim S.D., Lee B.J., Lee H.J., Jeung I.S.** Robust HLLC Riemann solver with weighted average flux scheme for strong shock // J. Computational Physics. — 2009. — Vol. 228. — P. 7634–7642.
24. **Simon S., Mandal J.C.** A simple cure for numerical shock instability in the HLLC Riemann solver // J. Computational Physics. — 2019. — Vol. 378. — P. 477–496.
25. **Rodionov A.V.** Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle phenomenon // J. Computational Physics. — 2017. — Vol. 345. — P. 308–329.
26. **Rodionov A.V.** Artificial viscosity to cure the shock instability in high-order Godunov-type schemes // Computer & Fluids. — 2019. — Vol. 190. — P. 77–97.
27. **Kulikov I.M., Chernykh I.G., Sapetina A.F., Lomakin S.V., Tutukov A.V.** A new Rusanov-type solver with a local linear solution reconstruction for numerical modeling of white dwarf mergers by means massive parallel supercomputers // Lobachevskii J. Mathematics. — 2020. — Vol. 41, iss. 8. — P. 1485–1491.
28. **Guy C.** A HLL-Rankine–Hugoniot Riemann solver for complex non-linear hyperbolic problems // J. Computational Physics. — 2013. — Vol. 251. — P. 156–193.
29. **Capdeville G.** A high-order multi-dimensional HLL-Riemann solver for non-linear Euler equations // J. Computational Physics. — 2011. — Vol. 230. — P. 2915–2951.
30. **Toro E.** Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. — Springer-Verlag, 2009.
31. **Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф.** Численное решение задачи Эйнфельдта на основе разрывного метода Галеркина. — Москва, 2019. — (Препринт / ИПМ им. М.В.Келдыша РАН; 90).
32. **Kriksin Y.A., Tishkin V.F.** Variational entropic regularization of the discontinuous Galerkin method for gasdynamic equations // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2019. — Vol. 11. — P. 1032–1040.
33. **Reinecke M., Hillebrandt W., Niemeyer J.C.** Three-dimensional simulations of type Ia supernovae // Astronomy & Astrophysics. — 2002. — Vol. 391. — P. 1167–1172.

Поступила в редакцию 24 сентября 2021 г.

После исправления 2 октября 2021 г.

Принята к печати 27 января 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Godunov S.K.** A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics // Matematicheskii Sbornik. — 1959. — Vol. 47. — P. 271–306.
2. **Balsara D.** Higher-order accurate space-time schemes for computational astrophysics — Part I: finite volume methods // Living Reviews in Computational Astrophysics. — 2017. — Vol. 3. — Article Number 2.
3. **Harten A., Lax P., van Leer B.** On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // SIAM Review. — 1983. — Vol. 25. — P. 289–315.
4. **Simon S., Mandal J.C.** A cure for numerical shock instability in HLLC Riemann solver using antidiffusion control // Computer & Fluids. — 2018. — Vol. 174. — P. 144–166.
5. **Rusanov V.V.** The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1961. — Vol. 1. — P. 267–279.

6. **Einfeldt B.** On Godunov-type methods for gas dynamics // *SIAM J. Numerical Analysis.* — 1988. — Vol. 25. — P. 294–318.
7. **Einfeldt B., Munz C.-D., Roe P., Sjogreen B.** On Godunov-type methods near low densities // *J. Computational Physics.* — 1991. — Vol. 92. — P. 273–295.
8. **Toro E., Spruce M., Speares W.** Restoration of the contact surface in the Harten–Lax–van Leer Riemann solver // *Shock Waves.* — 1994. — Vol. 4. — P. 25–34.
9. **Mandal J.C., Panwar V.** Robust HLL-type Riemann solver capable of resolving contact discontinuity // *Computer & Fluids.* — 2012. — Vol. 63. — P. 148–164.
10. **Xie W., Li W., Li H.** On numerical instabilities of Godunov-type schemes for strong shocks // *J. Computational Physics.* — 2017. — Vol. 350. — P. 607–637.
11. **Dumbser M., Balsara D.** A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems // *J. Computational Physics.* — 2016. — Vol. 304. — P. 275–319.
12. **Miyoshi T., Kusano K.** A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics // *J. Computational Physics.* — 2005. — Vol. 208. — P. 315–344.
13. **Pandolfi M., D’Ambrosio D.** Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the “carbuncle” phenomenon // *J. Computational Physics.* — 2000. — Vol. 166. — P. 271–301.
14. **Chauvat Y., Moschetta J.-M., Gressier J.** Shock wave numerical structure and the carbuncle phenomenon // *Intern. J. Numerical Methods in Fluids.* — 2005. — Vol. 47. — P. 903–909.
15. **Roe P.** Approximate Riemann solver, parameter vectors and difference schemes // *J. Computational Physics.* — 1981. — Vol. 43. — P. 357–372.
16. **Davis S.F.** A rotationally biased upwind difference scheme for the Euler equations // *J. Computational Physics.* — 1984. — Vol. 56. — P. 65–92.
17. **Levy D.W., Powell K.G., van Leer B.** Use of a rotated Riemann solver for the two-dimensional Euler equations // *J. Computational Physics.* — 1993. — Vol. 106. — P. 201–214.
18. **Nishikawa H., Kitamura K.** Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers // *J. Computational Physics.* — 2008. — Vol. 227. — P. 2560–2581.
19. **Kulikov I.M., Chernykh I.G., Glinskiy B.M., Protasov V.A.** An efficient optimization of HLL method for the second generation of Intel Xeon Phi processor // *Lobachevskii J. Mathematics.* — 2018. — Vol. 39, iss. 4. — P. 543–551.
20. **Kulikov I.M., Chernykh I.G., Tutukov A.V.** A new parallel Intel Xeon Phi hydrodynamics code for massively parallel supercomputers // *Lobachevskii J. Mathematics.* — 2018. — Vol. 39, iss. 9. — P. 1207–1216.
21. **Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A.** A new hydrodynamic code with explicit vectorization instructions optimizations that is dedicated to the numerical simulation of astrophysical gas flow. I. Numerical method, tests, and model problems // *The Astrophysical J. Supplement Series.* — 2019. — Vol. 243. — Article Number 4.
22. **Chernykh I., Kulikov I., Tutukov A.** Hydrogen–helium chemical and nuclear galaxy collision: hydrodynamic simulations on AVX-512 supercomputers // *J. Computational and Applied Mathematics.* — 2021. — Vol. 391. — Article Number 113395.
23. **Kim S.D., Lee B.J., Lee H.J., Jeung I.S.** Robust HLLC Riemann solver with weighted average flux scheme for strong shock // *J. Computational Physics.* — 2009. — Vol. 228. — P. 7634–7642.
24. **Simon S., Mandal J.C.** A simple cure for numerical shock instability in the HLLC Riemann solver // *J. Computational Physics.* — 2019. — Vol. 378. — P. 477–496.
25. **Rodionov A.V.** Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle phenomenon // *J. Computational Physics.* — 2017. — Vol. 345. — P. 308–329.

26. **Rodionov A.V.** Artificial viscosity to cure the shock instability in high-order Godunov-type schemes // *Computer & Fluids*. — 2019. — Vol. 190. — P. 77–97.
27. **Kulikov I.M., Chernykh I.G., Sapetina A.F., Lomakin S.V., Tutukov A.V.** A new Rusanov-type solver with a local linear solution reconstruction for numerical modeling of white dwarf mergers by means massive parallel supercomputers // *Lobachevskii J. Mathematics*. — 2020. — Vol. 41, iss. 8. — P. 1485–1491.
28. **Guy C.** A HLL-Rankine–Hugoniot Riemann solver for complex non-linear hyperbolic problems // *J. Computational Physics*. — 2013. — Vol. 251. — P. 156–193.
29. **Capdeville G.** A high-order multi-dimensional HLL-Riemann solver for non-linear Euler equations // *J. Computational Physics*. — 2011. — Vol. 230. — P. 2915–2951.
30. **Toro E.** *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. — Springer-Verlag, 2009.
31. **Kriksin Yu.A., Tishkin V.F.** Chislennoe reshenie zadachi Einfeldta na osnove razryvnogo metoda Galerkina. — Moskva, 2019. — (Preprint / IPM im. M.V.Keldysha RAN; 90).
32. **Kriksin Yu.A., Tishkin V.F.** Variational entropic regularization of the discontinuous Galerkin method for gasdynamic equations // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2019. — Vol. 11. — P. 1032–1040.
33. **Reinecke M., Hillebrandt W., Niemeyer J.C.** Three-dimensional simulations of type Ia supernovae // *Astronomy & Astrophysics*. — 2002. — Vol. 391. — P. 1167–1172.