УДК 539.3.01

К ТЕОРИИ НОРМАЛЬНОГО КОНТАКТА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В. Н. Солодовников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Развита теория нормального контакта твердых тел с трением Кулона. Дано обобщение принципа Буссинеска на контактные задачи с трением.

1. Основные уравнения. Уравнения равновесия, выражения деформаций через смещения и соотношения закона Гука запишем в виде [1]

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \qquad e_{ij} = 0{,}5(u_{i,j} + u_{j,i}) = E^{-1}[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}]. \tag{1.1}$$

Здесь E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; u_i — смещения; f_i — объемные силы; δ_{ij} — символы Кронекера; e_{ij} — деформации; σ_{ij} — напряжения в декартовой системе координат x_i; индекс i после запятой обозначает частное дифференцирование по x_i; по повторяющимся индексам выполняется суммирование (i, j, $k = 1$, 2, 3).

2. Работа сил трения на вариациях смещений. На основе результатов, полученных в [2, 3] при решении контактных задач для пластины со вставкой, развивается общая теория нормального контакта твердых тел. Рассмотрим контакт двух тел V и $\hat{V}$, ограниченных поверхностями S и $\hat{S}$ соответственно. Пусть эти поверхности состоят из двух частей $S = S_1 \cup S_2$, $\hat{S} = \hat{S}_1 \cup \hat{S}_2$. Через S_1, $\hat{S}_1$ обозначаются те части S и $\hat{S}$, которые при нагружении и деформировании тел могут вступать в контакт друг с другом, причем в неконтактирующих точках S_1 и $\hat{S}_1$ задаются нулевые усилия. На S_2 и $\hat{S}_2$ краевыми условиями могут задаваться, например, в одних точках — смещения, а в других — усилия:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* \quad \text{на} \quad S_2' \ \text{и} \ \hat{S}_2', \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^* \quad \text{на} \quad S_2'' \ \text{и} \ \hat{S}_2'', \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{u}^*$, $\boldsymbol{p}^*$ — заданные векторы смещений и усилий; $S_2 = S_2' \cup S_2''$, $\hat{S}_2 = \hat{S}_2' \cup \hat{S}_2''$.

В соответствии с принципом возможных перемещений при любых вариациях смещений δu_i и соответствующих им вариациях деформаций δe_{ij} работа напряжений в каждом теле равна работе приложенных к нему внешних сил:

$$\delta\Phi = \delta\Phi_V + \delta\Phi_1 + \delta\Phi_2, \qquad \delta\hat{\Phi} = \delta\hat{\Phi}_V + \delta\hat{\Phi}_1 + \delta\hat{\Phi}_2, \tag{2.2}$$

где

$$\delta\Phi = \int\limits_V \sigma_{ij}\delta e_{ij}\,dV; \quad \delta\Phi_V = \int\limits_V \boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dV; \quad \delta\Phi_1 = \int\limits_{S_1} \boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS_1; \quad \delta\Phi_2 = \int\limits_{S_2} \boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS_2;$$

$\boldsymbol{f}$, $\delta\boldsymbol{u}$ — векторы объемных сил и вариаций смещений. Величины $\delta\hat{\Phi}$, $\delta\hat{\Phi}_V$, $\delta\hat{\Phi}_1$, $\delta\hat{\Phi}_2$ для тела $\hat{V}$ определяются аналогично.

Для обоих контактирующих тел работа напряжений должна быть равна сумме работ внешних по отношению к обоим телам сил и работы сил трения в области контакта на вариациях смещений $\delta\Phi_q$, т. е.

$$\delta\Phi + \delta\hat{\Phi} = \delta\Phi_V + \delta\hat{\Phi}_V + \delta\Phi_2 + \delta\hat{\Phi}_2 + \delta\Phi_q. \tag{2.3}$$

Подставив $\delta\Phi$, $\delta\hat{\Phi}$ из (2.2) в (2.3), получим равенство

$$\delta\Phi_q = \int\limits_{S_1} \boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS_1 + \int\limits_{\hat{S}_1} \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\delta\hat{\boldsymbol{u}}\,d\hat{S}_1. \tag{2.4}$$

Векторы $\hat{\boldsymbol{p}}$, $\delta\hat{\boldsymbol{u}}$ относятся к $\hat{S}_1$. Равенство (2.4) выполняется независимо от вида краевых условий на S_2 и $\hat{S}_2$ и используется ниже при формулировке краевых условий на S_1 и $\hat{S}_1$.

3. Контактные краевые условия, не зависящие от трения. Зададим поверхность Ω, близкую к поверхностям S_1, $\hat{S}_1$, и определим на ней систему координат ξ^α. В каждой точке Ω восстанавливаем нормаль, находим точки пересечения ее с поверхностями S_1, $\hat{S}_1$ и присваиваем им те же координаты ξ^α, что и в рассматриваемой точке на Ω. Предполагаем, что данными тройками точек, лежащих на одной нормали к Ω и имеющих одинаковые координаты ξ^α, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множествами всех точек на Ω, S_1, $\hat{S}_1$ и определяется общая для Ω, S_1, $\hat{S}_1$ система координат ξ^α.

Метрические тензоры $a_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta}$, $\hat{A}_{\alpha\beta}$ на Ω, S_1, $\hat{S}_1$ в точках с одними и теми же координатами ξ^α и радиус-векторами $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + h\boldsymbol{n}$, $\hat{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{r} + \hat{h}\boldsymbol{n}$ соответственно связаны соотношениями [4]

$$A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2hb_{\alpha\beta} + h_{,\alpha}h_{,\beta} + h^2 b_{\alpha\omega}b^\omega_\beta, \quad \hat{A}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\hat{h}b_{\alpha\beta} + \hat{h}_{,\alpha}\hat{h}_{,\beta} + \hat{h}^2 b_{\alpha\omega}b^\omega_\beta, \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{r}_\alpha$ — единичная нормаль и базисные векторы, касательные к Ω, причем вектор $\boldsymbol{n}$ всюду на Ω считается направленным от S_1 к $\hat{S}_1$; h, $\hat{h}$ отсчитываются по нормали к Ω и по абсолютной величине равны расстояниям от S_1, $\hat{S}_1$ до Ω; $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы Ω ($b_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{n}_{,\alpha}\cdot\boldsymbol{r}_\beta$); индекс α после запятой обозначает дифференцирование по ξ^α (α, β, $\omega = 1, 2$). Из (3.1) следует, что для невырожденности и положительной определенности матриц $A_{\alpha\beta}$, $\hat{A}_{\alpha\beta}$ достаточно потребовать малости отношений h, $\hat{h}$ к радиусам кривизн Ω и малости попарных произведений их производных по сравнению с величинами $a_{\alpha\beta}$. В частности, в качестве Ω можно принять поверхность S_1 или $\hat{S}_1$.

Равенство радиус-векторов любых точек на S_1 и $\hat{S}_1$ с координатами ξ^α, $\hat{\xi}^\alpha$ соответственно, контактирующих вследствие полученных ими смещений $\boldsymbol{u}$, $\hat{\boldsymbol{u}}$, представляется в виде

$$(\boldsymbol{r} + h\boldsymbol{n} + \boldsymbol{u})_{\xi^\alpha} = (\boldsymbol{r} + \hat{h}\boldsymbol{n} + \hat{\boldsymbol{u}})_{\hat{\xi}^\alpha}. \tag{3.2}$$

Здесь индексами ξ^α и $\hat{\xi}^\alpha$ обозначены координаты точек, в которых вычисляются величины в скобках. Учитывая малость смещений и следующую из этого малость разностей координат $\Delta\xi^\alpha = \hat{\xi}^\alpha - \xi^\alpha$, разложим правую часть (3.2) в ряд Тейлора в точке ξ^α, опустив произведения $\Delta\xi^\alpha$ на производные от смещений и все слагаемые, содержащие степени $\Delta\xi^\alpha$, выше первой. Получим соотношение $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} + v_3\boldsymbol{n} + v_\alpha\boldsymbol{r}^\alpha$, в котором векторы смещений $\boldsymbol{u}$ на S_1 и $\hat{\boldsymbol{u}}$ на $\hat{S}_1$ берутся в точках, имеющих одинаковые координаты ξ^α. Разности компонент этих смещений $v_3 = (\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}})\cdot\boldsymbol{n} = c + \hat{h}_{,\beta}\,\Delta\xi^\beta$, $v_\alpha = (\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}})\cdot\boldsymbol{r}_\alpha = (a_{\alpha\beta} - \hat{h}b_{\alpha\beta})\,\Delta\xi^\beta$ ($\alpha = 1, 2$) должны быть малыми порядка самих смещений. Величина $c = \hat{h} - h \geqslant 0$ есть расстояние (зазор) между S_1 и $\hat{S}_1$, измеряемое по нормали к Ω. Если в качестве Ω взять $\hat{S}_1$, то $\hat{h} = 0$ и $v_3 = c$, $v^\alpha = \Delta\xi^\alpha$ ($\alpha = 1, 2$).

Пренебрегая в выражении v_3 слагаемым $\Delta\hat{h} = \hat{h}_{,\beta}\,\Delta\xi^\beta$, приближенно равным разности значений $\hat{h}$ в точках $\hat{\xi}^\beta$ и ξ^β и малым по сравнению с величиной зазора c, положим $v_3 = c$.

Теперь v_3 есть известная функция от координат только одной точки ξ^α. На неконтактирующих участках поверхностей S_1 и $\hat{S}_1$ в качестве условия непроникания потребуем для каждой пары их точек, лежащих на одной нормали к Ω и имеющих одинаковые координаты ξ^α, выполнения неравенства $v_3 \leqslant c$.

Разности касательных смещений v_α при наличии трения могут зависеть от истории нагружения и взаимодействия тел. Посредством v_α в области контакта учитывается скольжение поверхностей S_1 и $\hat{S}_1$ друг относительно друга и смена пар контактирующих точек. Частные производные от v_α по параметру нагружения (времени) τ есть скорости скольжения $\dot{v}_\alpha = (a_{\alpha\beta} - \hat{h}b_{\alpha\beta})\vartheta^\beta$ (точка обозначает дифференцирование по τ; $\vartheta^\beta = d\hat{\xi}^\beta/d\tau$). Если $\dot{v}_\alpha = 0$, то $\vartheta^\alpha = 0$, смены пары контактирующих точек не происходит, реализуется прилипание.

Вычислив $v_\alpha = (\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}})\cdot\boldsymbol{r}_\alpha$, для каждой точки ξ^α на S_1 можно приближенно определить координаты контактирующей с ней точки $\hat{\xi}^\alpha$ на $\hat{S}_1$ из уравнений $v_\alpha = (a_{\alpha\beta} - \hat{h}b_{\alpha\beta})\Delta\xi^\beta$ ($\alpha = 1,\ 2$). Если в этих уравнениях пренебречь слагаемыми $\hat{h}b_{\alpha\beta}$ как малыми порядка отношений $\hat{h}$ к радиусам кривизн Ω, то получим $\hat{\xi}^\alpha = \xi^\alpha + v^\alpha$ ($\alpha = 1,\ 2$).

Перейдем в (2.4) к интегрированию по общим для Ω, S_1, $\hat{S}_1$ координатам ξ^α и используем соотношение между величинами элементарных площадок $dS_1 = \gamma d\hat{S}_1$ ($\gamma = A^{1/2}\hat{A}^{-1/2} > 0$; A, $\hat{A}$ — детерминанты метрических тензоров $A_{\alpha\beta}$, $\hat{A}_{\alpha\beta}$). Определим на Ω области контакта Ω_1 и свободного, ненагруженного края Ω_2 ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$). Пусть при варьировании смещений в области контакта всюду осуществляется прилипание $\delta\boldsymbol{u} = \delta\hat{\boldsymbol{u}}$ на Ω_1. Тогда работа сил трения равна нулю:

$$\delta\Phi_q = 0 = \int\limits_{\Omega_1} (\gamma\boldsymbol{p} + \hat{\boldsymbol{p}}) \cdot \delta\hat{\boldsymbol{u}}\, d\hat{S}_1 + \int\limits_{\Omega_2} (\gamma\boldsymbol{p} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \delta\hat{\boldsymbol{u}})\, d\hat{S}_1.$$

В данных интегралах приравняем к нулю коэффициенты при произвольных вариациях смещений $\delta\hat{\boldsymbol{u}}$ на Ω_1 и $\delta\boldsymbol{u}$, $\delta\hat{\boldsymbol{u}}$ на Ω_2. Получим $\hat{\boldsymbol{p}} = -\gamma\boldsymbol{p}$ на Ω_1 и $\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} = 0$ на Ω_2. Введем разложения векторов усилий на нормаль и касательные к Ω: $\boldsymbol{p} = p_3\boldsymbol{n} + p_\alpha\boldsymbol{r}^\alpha$, $\hat{\boldsymbol{p}} = \hat{p}_3\boldsymbol{n} + \hat{p}_\alpha\boldsymbol{r}^\alpha$. В области контакта вследствие прижатия поверхностей S_1 и $\hat{S}_1$ друг к другу и направленности вектора $\boldsymbol{n}$ от S_1 к $\hat{S}_1$ должны выполняться неравенства $p_3 < 0$, $\hat{p}_3 = -\gamma p_3 > 0$. Касательные составляющие усилий $\boldsymbol{q} = p_\alpha\boldsymbol{r}^\alpha$, $\hat{\boldsymbol{q}} = \hat{p}_\alpha\boldsymbol{r}^\alpha = -\gamma\boldsymbol{q}$ есть силы трения на S_1 и $\hat{S}_1$, отнесенные к единице площади этих поверхностей. Коэффициент γ зависит от размеров вступающих в контакт элементарных площадок на S_1 и $\hat{S}_1$ и наклона их друг к другу в исходном недеформированном состоянии. На свободных участках S_1 и $\hat{S}_1$ в области Ω_2 $\hat{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q} = 0$.

Итак, имеем краевые условия

$$v_3 = c, \quad \hat{p}_i = -\gamma p_i, \quad p_3 < 0 \ \text{ на } \ \Omega_1, \qquad \hat{p}_i = p_i = 0, \quad v_3 \leqslant c \ \text{ на } \ \Omega_2, \tag{3.3}$$

где $i = 1,\ 2,\ 3$. Эти условия формулируются независимо от свойств поверхностей S_1 и $\hat{S}_1$ и ниже будут дополнены краевыми условиями, учитывающими действие трения. В [5–7] краевые условия в области контакта формулируются также для пар точек, лежащих на одной нормали к заданной поверхности, но при иной аппроксимации равенства (3.2).

Вариации в (2.4) заменим скоростями смещений. С учетом (3.3) и $\dot{v}_3 = 0$ на Ω_1 получим выражения для мощности работы сил трения на скоростях скольжения

$$\dot{\Phi}_q = \int\limits_{\Omega_1} \boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}\, dS_1 = -\int\limits_{\Omega_1} \hat{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}\, d\hat{S}_1,$$

где $\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}_\alpha \boldsymbol{r}^\alpha$. Плотности $Q = \boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}$, $\hat{Q} = -\hat{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} = \gamma Q$ должны быть неположительными: $Q \leqslant 0$, $\hat{Q} \leqslant 0$, $\dot{\Phi}_q \leqslant 0$. На каждой из контактирующих поверхностей скорости ее скольжения относительно другой поверхности и силы трения направлены в противоположные стороны. Взятые с обратным знаком величины $-\dot{\Phi}_q$, $-Q$, $-\hat{Q}$ есть мощность рассеяния энергии на трение и ее плотности на единицу площади S_1 и $\hat{S}_1$.

4. Контактные задачи с трением Кулона. Пусть в области контакта Ω_1 действует трение по закону Кулона [5], тогда отношение модулей векторов касательного и нормального усилий не должно превышать величину коэффициента трения μ и, следовательно, должно быть $p_3 < 0$, $F = |\boldsymbol{q}| + \mu p_3 \leqslant 0$. Равенство $F = 0$ определяет минимально допустимый угол наклона вектора усилий $\boldsymbol{p}$ к поверхности Ω.

Скольжение поверхностей S_1 и $\hat{S}_1$ в области контакта друг относительно друга со скоростью $\dot{\boldsymbol{v}}$ с трением может иметь место только тогда, когда угол наклона вектора усилий $\boldsymbol{p}$ к поверхности Ω достигает минимально допустимой величины, плотность мощности работы сил трения неположительна ($Q \leqslant 0$). На каждой поверхности S_1 и $\hat{S}_1$ скорости ее скольжения относительно другой поверхности и силы трения имеют противоположные направления ($\dot{\boldsymbol{v}} = \chi \boldsymbol{q}$, $\chi \leqslant 0$). Модуль вектора $|\dot{\boldsymbol{v}}|$ законом трения не ограничивается и может быть любым независимо от значений $|p_3|$, $|\boldsymbol{q}|$. В тех точках на Ω_1, где условия скольжения не выполняются, осуществляется прилипание $\dot{\boldsymbol{v}} = 0$.

На основании сказанного выше приходим к краевым условиям

$$\begin{gathered} v_3 = c, \quad \dot{v}_\alpha = 0, \quad \hat{p}_i = -\gamma p_i, \quad p_3 < 0, \quad F < 0 \ \text{ на } \ \Omega_1', \\ v_3 = c, \quad F = 0, \quad \dot{v}_\alpha = \chi p_\alpha, \quad \hat{p}_i = -\gamma p_i, \quad p_3 < 0, \quad \chi \leqslant 0 \ \text{ на } \ \Omega_1'', \\ p_i = \hat{p}_i = 0, \quad v_3 \leqslant c \ \text{ на } \ \Omega_2. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь нормальные и касательные к Ω компоненты векторов смещений и усилий $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{p}$ на S_1 и $\hat{\boldsymbol{u}}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ на $\hat{S}_1$ берутся в точках, лежащих на одной нормали к Ω и имеющих те же координаты ξ^α, что и в рассматриваемой точке на Ω; $v_3 = (\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{n}$, $v_\alpha = (\boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{r}_\alpha$ ($i = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2$). Прилипание осуществляется на Ω_1', а также в тех точках на Ω_1'', где $\chi = 0$. В остальных точках на Ω_1'' имеем скольжение, плотность мощности работы сил трения на скоростях скольжения неположительна. Неравенство $v_3 \leqslant c$ выполняется всюду на $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = \Omega_1' \cup \Omega_1''$.

В (4.1) в отличие от [2] на Ω_1'' пренебрегается возможностью выполнения неравенства $\dot{F} < 0$, предполагающего разрывное изменение $\dot{F}$ по времени. В [2, 3] случай $\dot{F} < 0$ на Ω_1'' в численных решениях задач не реализуется. В остальном (4.1) являются обобщением краевых условий, данных в [2, 3] для пластины со вставкой.

Разбиения $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = \Omega_1' \cup \Omega_1''$ определяются только по величинам p_3, F в текущий момент времени. Эти величины, а также области Ω_1', Ω_1'', Ω_2 и решения задач в целом могут зависеть от истории нагружения тел, прилипания и проскальзывания контактирующих поверхностей друг относительно друга. Решения задач с краевыми условиями (4.1) должны находиться с прослеживанием истории нагружения.

Подчеркнем, что краевые условия (4.1) удовлетворяются не в действительно контактирующих, а в задаваемых согласно предлагаемой приближенной постановке задачи парах точек, лежащих на одной нормали к Ω. Возможность скольжения поверхностей S_1 и $\hat{S}_1$ в области контакта друг относительно друга и смены пар контактирующих точек учитывается посредством разностей касательных смещений v_α. Вычислив v_α, можно приближенно определить координаты контактирующих точек.

В случае отсутствия трения, присоединяя к (3.3) равенства нулю касательных усилий в области контакта, получаем краевые условия

$$v_3 = c, \quad p_\alpha = \hat{p}_\alpha = 0, \quad \hat{p}_3 = -\gamma p_3, \quad p_3 < 0 \ \text{ на } \ \Omega_1, \quad p_i = \hat{p}_i = 0, \quad v_3 \leqslant c \ \text{ на } \ \Omega_2 \tag{4.2}$$

($i = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2$), которые также следуют из (4.1) при $\mu = 0$. Области Ω_1, Ω_2 определяются из решения задачи. В задаче для уравнений (1.1) с краевыми условиями (2.1), (4.2) имеем единственное решение. Функционал полной потенциальной энергии

$$\Psi = \int\limits_{V \cup \hat{V}} \Big(\frac{1}{2}\,\sigma_{ij}e_{ij} - f_iu_i\Big)\,dV - \int\limits_{S''_2 \cup \hat{S}''_2} \boldsymbol{p}^* \cdot \boldsymbol{u}\,dS$$

достигает на нем минимума в пространстве смещений, удовлетворяющих краевым условиям $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ на S'_2 и $\hat{S}'_2$ и условию непроникания $v_3 \leqslant c$ всюду на $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

5. Обобщение принципа Буссинеска. Во многих работах (см., например, [5, 8]) для определения границ зон контакта применяется принцип, предложенный Буссинеском для задач без учета трения, согласно которому в области контакта Ω_1 при приближении к границе с областью свободного края Ω_2 нормальное усилие p_3 должно стремиться к нулю. При наличии трения принцип может быть дополнен предположением, что в области прилипания Ω'_1 при приближении к границе с областью скольжения Ω''_1 функция усилий F стремится к нулю. Если Ω'_1 граничит с Ω_2, то естественно ожидать, что в Ω'_1 при приближении к границе с Ω_2 будут стремиться к нулю обе функции p_3 и F. Выполнение сформулированных условий обеспечивает непрерывность искомых функций при переходе через границы контакта. Данный обобщенный принцип применяется в [2, 3] при решении контактных задач для пластины со вставкой методом конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости. М.: Наука, 1975.
2. **Солодовников В. Н.** О действии трения в контактной задаче для пластины со штифтом // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 184–192.
3. **Солодовников В. Н.** Решение контактной задачи для пластины с деформируемой вставкой // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 216–226.
4. **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ. М.: Физматгиз, 1963.
5. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
6. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980.
7. **Кравчук А. С.** К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44, № 1. С. 122–129.
8. **Boussinesq J.** Application des potentials à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris: Gauther-Villard, 1885.

Поступила в редакцию 5/XI 1998 г.